

# Kármán 경계층 유동의 공간증폭에 관한 이론적 연구

황 영 규\*, 이 윤 용\*\*

## A study of the spatial amplification of the Kármán boundary-layer

Young-Kyu Hwang, Yun-Yong Lee\*

**Key Words:** Kármán boundary-layer flow(Kármán 경계층유동), Hydrodynamic stability(수동력학적 안정성), Rotating disk(회전원판), Moving disturbance wave(이동교란파), Spatial amplification(공간증폭)

### Abstract

The hydrodynamic instability of the three-dimensional boundary layer on a rotating disk introduces a periodic modulation of the mean flow in the form of stationary cross flow vortices. Detailed numerical values of the growth rates, neutral curves and other characteristics of the two instabilities have been calculated over a wide range of parameters. Presented are the neutral stability results concerning the two instability modes by solving new linear stability equations reformulated not only by considering whole convective terms but by correcting some errors in the previous stability equations. The present stability results are agree with the previously known ones within reasonable limit. The flow is found to be always stable for a disturbance whose dimensionless wave number at  $Re=1200$  is greater than 0.75. Also, the spatial amplification contours have been calculated for the moving disturbance wave, whose azimuth angle is between  $\epsilon=15^\circ$  and  $12.5^\circ$

#### 기호설명

$C$  :  $\cos \epsilon$   
 $Cp$  : 파속도,  $\beta_R/a_R$   
 $D$  : 특성경계층 두께,  $\sqrt{\nu/\omega_D}$   
 $D_1$  : 경계층 두께,  $(D \cdot r)^{1/2}$   
 $J$  : 스켈링 인자,  $[O(1)]$   
 $r$  : 무차원반경,  $\bar{r}/D$   
 $Re$  : Reynolds 수,  $\Delta\omega\bar{r}D/\nu$   
 $Ro$  : Rossby 수,  $\Delta\omega/\omega_D=-1$   
 (Kármán 경계층일 경우  $Ro=-1$ )

$S$  :  $\sin \epsilon$   
 $z$  : 무차원 축방향 길이,  $\bar{z}/D$   
 $\alpha$  :  $\hat{y}$  방향 무차원 복소수 교란파수  
 $\beta_R$  :  $\hat{y}$  방향 무차원 교란주파수  
 $\xi$  :  $\hat{x}$  방향 섭동와도방정식  
 $\omega_D$  : 원판의 회전속도

### 1. 서론

항공기 익형이나 잠수함, 어뢰등의 선단부 부근에 형성되는 교란유동이나 천이현상은 정체된 와도관의 줄무늬로 나타나고 난류로 천이되는데 선형안정성, bypass transition, Görtler 불안정성, 직교류 불안정성등과 같은 여러 가지 메카니즘으로 설명할 수 있다. 이러한 메카니즘을 규명하기

\* 성균관대학교 기계공학부

\*\* 성균관대학교 대학원 기계공학과

위하여 회전원판 주위 유동장을 취급함으로써 적절하게 모사될 수 있다.

정지된 유체속에 무한디스크의 회전으로 인한 정상 축대칭 비압축성유동의 Navier-Stokes 방정식은 1921년 von Kármán에 의해 경계층에서의 상사해가 구해진 이후, 회전유동의 불안정성에 관한 이론과 실험적인 연구가 여러 연구자들에 의해 폭발적으로 수행되어 왔으며, 현재까지도 회전원판을 이용한 안정성, 불안정성 및 천이에 관한 연구등이 활발하게 진행되고 있다.

이러한 연구의 목적은 측정하기에는 너무 작은 불안정성을 규명하고 교란유동에 의한 천이유동을 지연시켜 항력을 줄일 수 있으며, 연료를 절감할 수 있어 저 연료소비의 수송수단을 가능케 한다. 실제로 25% 또는 그 이상의 연료절감을 실현한 연구도 발표된 바 있다.<sup>(1)</sup>

정체된 와도관의 줄무늬에 대한 설명은 기본유동에 미소한 교란성분을 가정하고 시간과 공간에 관한 증폭이론을 선택하여 선형 안정성 이론으로 해석하고자하는 것이 보편적이며, 선형 안정성 이론은 새로운 주제는 아니며, 다만 그 중요성이 더해 가고 있다.

공간상 교란의 증폭이론은 초기에 분포된 교란으로부터 공간에 따라 성장할 것인가 아니면 감소할 것인가 하는 안정성을 판별하는 것이다. 즉, 교란주파수( $\beta_R$ )는 실수로 취하고 교란파수( $\alpha$ )는 복소수로 취하여 고유치를 구한다.

2차원 축대칭 유동의 천이점을 예측하는데 가장 넓게 사용되는 도구로서  $e^n$  방법은 매우 유용하며 선형안정성에 근거하고 있다. 일반적으로 지수 값  $n$ 이 9를 가지며, Chin과 Litt<sup>(2)</sup>의 실험에 의하면  $410 < Re < 590$ 에서 천이유동이 존재한다고 밝혔다.

본 연구에서 재유도된 선형안정성 방정식은 Coriolis 힘과 유선곡률효과를 고려한 회전원판 주위 유동의 안정성에 관한 연구로서 Faller의 선형안정성 방정식에서 부호오류를 수정하고, ( $r, \theta$ ) 좌표계에서 ( $x, y$ ) 좌표계로 변환시 교란 미분항을 모두 고려한 시도이다. 또한, 이동하는 교란파의 공간상 증폭곡선도 구하였는데, 방위각이 증가함에 따라 가장 증폭이 잘 되는 호의의 등주파수선( $B^*$ )의 값이 감소해 가며, 정체된 교란파가 관측되는 부근의 각도인 방위각  $\varepsilon = 12.5^\circ$  에

서 교란의 시간상 증폭곡선의 등 주파수선의 값과 거의 일치하고 있다.

이동교란파의 공간상 증폭곡선으로부터 방위각  $\varepsilon = 12.5^\circ$  에서 구한  $e^{10}$ 은  $Re \approx 582$ 에서 천이유동이 발생할 것으로 예측된다.

## 2. 지배방정식 및 수치해법

### 2.1 기본유동 방정식

유체는 비압축성이며 균질하고 회전원판의 한 쪽면에 무한 영역으로 주어져 있다고 가정한다. Kármán 경계층 유동의 정상 층류 기본유동에 대한 상사방정식은 이미 잘 알려져 있다. 따라서 원판과의 상대 각속도는

$$\Delta\omega = -\omega_D. \quad (1)$$

비정상 상태의 운동량 방정식을  $\omega_D$ 의 속도로 회전하고 있는 원통 좌표계로 표현하고 가속도항을 회전계와 관성계로 나누어 정리하면 기본유동 방정식이 유도된다. (Faller<sup>(3)</sup>, Hwang과 Lee<sup>(4)</sup> 참조)

경계조건은

$$\begin{aligned} F(0) = G(0) = H(0) = 0, \\ F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

경계치문제는  $\eta_\infty = 20-240$ 을 사용하여 구간  $[0, \eta_\infty]$ 에서 풀어졌다. 정확한 두 점 경계치 문제를 해석하기 위하여 컴퓨터 코드 COLNEW<sup>(5)</sup>가 사용되었다.

### 2.2 안정성방정식

선형 안정성 이론을 적용하여 기본유동의 속도 분포에 각 성분의 미소한 교란항들을 중첩시킨 교란방정식을 유도하고, 이 방정식의 수를 줄이기 위하여  $r, \theta, z$  성분을  $\xi, \eta$  로 표현하고, 원통 좌표계의 교란방정식을 직교 좌표계로 좌표 변환을 한다. (즉,  $r$  방향은  $x$  방향,  $\theta$  방향은  $y$  방향, 그리고  $z$  방향을 회전축으로 하는 와도 전달 방정식을 유도하면, Faller<sup>(3)</sup>와 같이  $x, y$  방향의 와도 전달 방정식을 얻을 수 있다.) 만약 초기유동을 고려한 경우라면, 기본유동항은 비정

상 상태로 처리해야만 한다.

Fig. 1은  $(r, \theta)$ 로 부터  $(x, y)$ 로 변환한 좌표계이며,  $\hat{x}$  축이 접선방향과 이루는 각은 동일한 평면상에서 방위각  $\epsilon$  이고, 좌표계  $(x, y)$ 에서  $\delta$  만큼 회전한 좌표계  $(\hat{x}, \hat{y})$ 로 변환하면 교란속도 방정식과 안정성방정식이 유도된다. (Faller<sup>(3)</sup>, Hwang과 Lee<sup>(4)</sup> 참조) 여기서, 새로운 좌표계로 변환하게 되는 이유는 교란의 형태는 불안정이 발생하기 시작하는 위치에서 나선형 교란의 접선 방향에 거의 평행하고 원주의 접선방향과 이루는 각을 가지게 된다. 따라서, 교란을 규명하기 위하여 이의 접선방향으로 좌표계를 회전시킨다면 회전원판 평면상의 2 차원적인 접근이 가능하다.

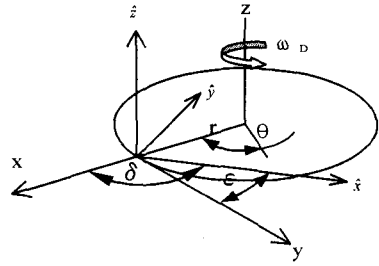


Fig.1 Rotation System

Reynolds 수  $Re$ 는  $\bar{r}$  를 무차원화 하면  $Re = \Delta \omega r / \Omega$ 가 되어 Kármán 유동의 경우  $Re = -r$ 이 된다. 그러나 편의상 양(+)의  $Re$ 를 사용하여 계산하였다.

교란속도방정식과 마찬가지로 방위각  $\epsilon$  만큼 회전한 새로운 좌표계  $(\hat{x}, \hat{y})$ 로 변환하면 안정성방정식을 구할 수 있다. (Faller<sup>(3)</sup>, Hwang과 Lee<sup>(4)</sup> 참조)

Faller<sup>(3)</sup>의 방정식에 대해 추가된 항은 방위각이 커짐에 따라 무시할 수 없는 항  $(F_z C + G_z S) x(uS + vC)$ 과 누락항  $(FS - GC)w_y S$ 이며, 부호 오류항은  $GC - FS$ 이다. 연속 방정식을 교란 유선함수  $\phi$ 를 사용하여 다음의 식 (3)으로 나타낼 수 있다.

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \xi = \nabla^2 \phi. \quad (3)$$

교란속도  $u$ 와 유선함수  $\phi$ 를 식 (4)와 같이 가정하면

$$\begin{aligned} u(y, z, t) &= U(z) \exp i[(\bar{\alpha}_R + i\bar{\alpha}_i)y - (\bar{\beta}_R + i\bar{\beta}_i)t], \\ \phi(y, z, t) &= \Phi(z) \exp i[(\bar{\alpha}_R + i\bar{\alpha}_i)y - (\bar{\beta}_R + i\bar{\beta}_i)t]. \end{aligned} \quad (4)$$

$x$  방향의 교란속도 방정식과 안정성방정식을 구할 수 있다. (Faller<sup>(3)</sup>, Hwang과 Lee<sup>(4)</sup> 참조)  
경계조건은 다음과 같다.

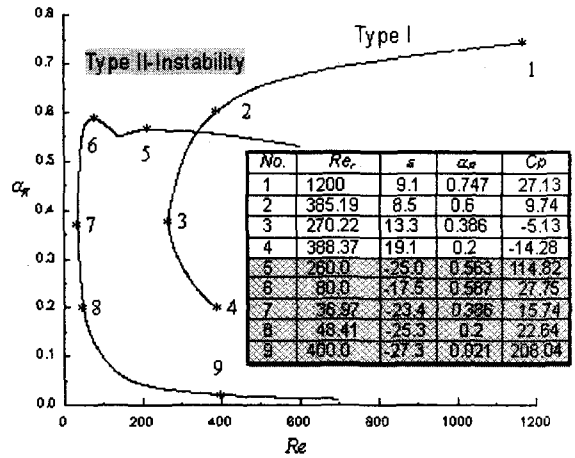


Fig. 2 4-dim. neutral stability curves for the Kármán layer, corresponding to the Type I and II instabilities.

$$\begin{aligned} U(0) &= \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \\ U'(\infty) &= \Phi(\infty) = \Phi''(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.3 수치해석방법

안정성 해석시 단순사격법은  $\eta_\infty$ 가 증가하게 되면 적분시 오차누적 및 파급에 의해 계산이 불가능하게 되므로, 두 점 경계치 문제를 정확하게 만족하는 수치해를 구하기 위해 orthogonal collocation 방법<sup>(6)</sup>을 이용하였으며, 이 기법을 사용한 컴퓨터 코드 COLNEW를 이용하였다.<sup>(5)</sup>

안정성 방정식과 경계 조건을 실수부와 허수부로 분리하여 12차 1계(order) 방정식으로써 계산

한다.

교란의 공간상 증폭곡선을 구하기 위한 고유값 계산시  $Re$ , 방위각  $\epsilon$ 과 복소수 주파수  $\beta_R$ 을 고정하고 복소수 파수  $\alpha_R$ 과  $\alpha_I$ 를 아주 조금씩 변화시키면서 두 점 경계치 문제로 푼다.

또한, 경계 조건이 모두 '0'일 경우 무용해를 얻을 수 있으므로 다음과 같은 수정된 경계 조건식 (6.a, b)를 사용하여 원래의 경계조건  $|\phi_R(0)| = |\phi_I(0)| = 0$ 을 만족시키기 위해  $|\phi_R(0)| + |\phi_I(0)| \leq 10^{-5}$ 인 조건을 사용하고,  $10^{-3} \leq J \leq 10^1$ 의 범위의 '0'이 아닌 값으로 취한다

$$U_R(0) = U_I(0) = \phi_R(0) = \phi_I(0) = 0, \\ \phi_R'''(0) = \phi_I'''(0) = J. \quad (6.a)$$

$$U_R(\infty) = U_I(\infty) = \phi_R(\infty) = \phi_I(\infty) = 0, \\ \phi_R''(\infty) = \phi_I''(\infty) = 0. \quad (6.b)$$

### 3. 결과 및 고찰

교란유동의 증폭과정을 규명하기 위하여는 증립안정곡선상에서 충분히 유동의 안정성을 해석할 수 있어야 한다. Kármán 경계층( $Ro=-1$ )의 선형 안정성 방정식유도시 Faller의 안정성 방정식에서 부호 오류를 수정하고,  $(r, \theta)$  좌표계에서  $(x, y)$  좌표계로 변환시  $r$ 에 의한 교란 미분항을 대개 무시하는데 반해 모두 고려함으로써 새로운 안정성방정식을 제시하였으며, 안정성계산을 제시도 하였고 충분한 설명이 있어왔다<sup>(4,7)</sup>.

제 1형 및 제 2형 불안정성에 해당하는 고유값들은 기존연구자의 안정성방정식에서 부호 오류항을 수정하고 2점 경계치 문제로 정확히 계산하여 4차원 증립안정곡선의 평면상에 도시하였다. 여기서, 주목할 점은 Faller<sup>(3)</sup>가 얻은 형태의 선형 안정성 방정식을 계산해본 결과 대류항을 무시한 결과의 차이도 나타나며, 수치계산의 방법에서도 차이가 나타난다는 것이었다<sup>(7)</sup>.

안정성 평면의 내부는 교란유동이 불안정하게 되는 조건을 나타내며, 본 연구자들의 해석결과  $Re=1200$  부근에서 파수  $\alpha_R=0.75$ 의 값으로 한정되며, 거리( $Re$ )와 방위각, 파수, 파속도의 4차원 증립안정곡선들을 Fig. 2에 나타내었다.

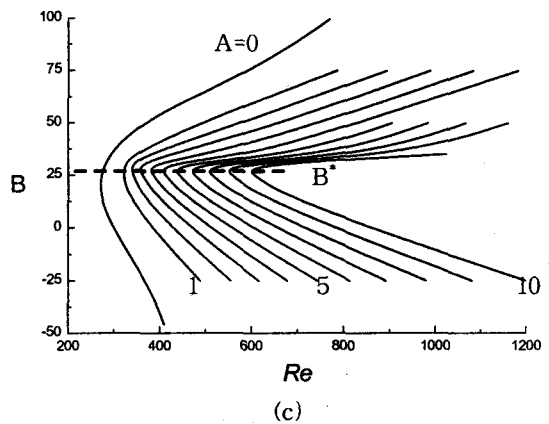
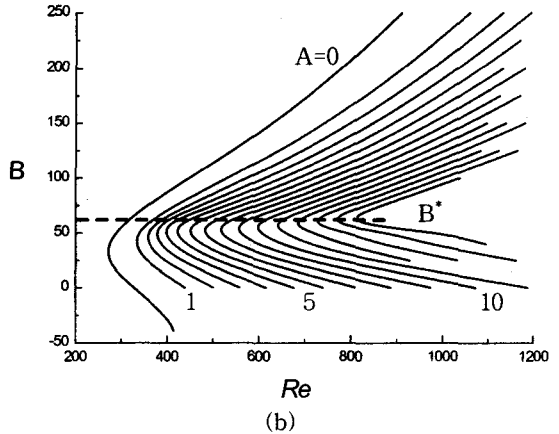
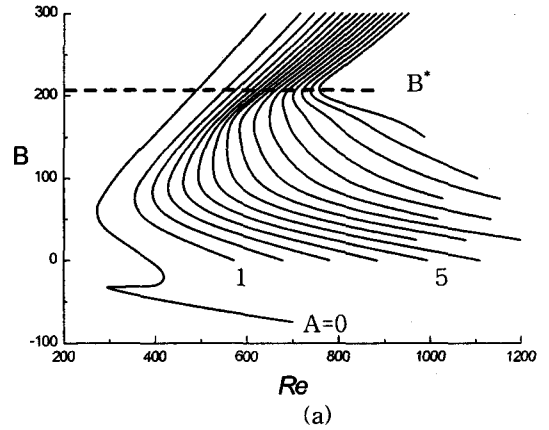


Fig. 3 Spatial amplification contours for (a)  $\epsilon = 15^\circ$ , (b)  $13.3^\circ$  and (c)  $12.5^\circ$  in the  $(Re, B)$ -planes.

제 1형과 제 2형 불안정성에 해당하는 중립안정곡선은 Hwang과 Lee<sup>(4)</sup>에 의해 논의되었으며,  $\epsilon = 13.2^\circ$  이하의 작은 각도에서 정제된 교란을 예측하였다.

중립안정평면에서 해석된 결과는  $(Re, B)$ -평면으로 표현하면

$$B = \beta_R Re^{1/2} = \frac{2\pi f}{\omega_D} \quad (7)$$

여기서,  $B$ 는  $r$  과 무관하며, 오직 실제적인 주파수  $f$  에 비례하는 등 주파수선이다.

이동하는 교란파의 공간상 증폭에 관한 성장률을 계산한 결과로써  $\epsilon = 15^\circ, 13.3^\circ, 12.5^\circ$  에서 교란유동의 증폭곡선은 Fig. 3에 도시하고 있다. 여기서, 등 주파수선은  $(Re, B)$ -평면에서 수평선이 된다.

증폭선도에서 주목할 점은  $Re$  수가 증가할수록 주어진 방위각  $\epsilon$  에서 가장 증폭이 잘 될 수 있는 호의의 등 주파수선(favorable constant frequency line,  $B^*$ )의 값이 뚜렷이 나타남을 볼 수 있고, 방위각이 감소함에 따라 이 값도 감소해 간다. 즉, 정제된 교란의 와도관을 나타내는 방위각의 값에 가까워짐에 따라 낮은 주파수의 형태로 유동교란이 성장하고 가시화 될 수 있을 것으로 보인다. 이것은 공간적으로 성장하는 교란파에서도 Wilkinson과 Malik<sup>(8)</sup>이 발견한 방위각의 범위  $11 \sim 14^\circ$  에서 정제된 와도관의 줄무늬가 갖는 방위각을 잘 설명해 준다.

공간상의 교란 증폭 문제인 경우 교란증폭을 의미하는  $\alpha_I$  가 일정한 교란의 주파수  $B$ (즉,  $\beta_R Re^{1/2}$ )에 대해 원판의 중심으로부터 반경방향으로의 거리  $r$ (즉,  $Re$ 수)에 따라 변한다고 보고 그 증폭 계수  $A$ 는 다음과 같이 적분하여  $A$ 의 값이 일정한 교란의 증폭 곡선들을 구하였다.

$$A = - \int_{Re_0}^{Re} \frac{\alpha_I}{D_1} dRe \quad (8)$$

여기서,  $Re_0$ 는 중립안정곡선상의  $B$ 에 대응하는 지점의 값이고  $D_1 = (D \cdot r)^{1/2}$ 이며 실제 전체 증폭률은  $e^A$  이다.

## 4. 결론

본 연구에서는 Kármán 경계층에 대해 새롭게 유도된 유동 안정성방정식들을, 고유값 두 점 경계조건들을 정확히 만족시키는 수치해법으로 부터 선행연구자의 방법과 비교하여 좀 더 넓은 범위에서 수행하였다. 또한, 중립안정성 해석결과를 바탕으로 이동하는 교란파의 공간상 증폭곡선들을 구하고 정제된 교란파의 특성을 규명하였으며, 다음과 같은 중요한 사항들을 얻을 수 있었다. 이것은 모두 제 1형 불안정성에 해당한다.

(1) 중립안정성 해석은 기존의 결과보다 더 작은 임계  $Re$  수에서 일어날 수 있고, 파수  $\alpha_R$  과 교란 방위각  $\epsilon$  은 정성적으로 기존하는 여러 연구자들의 실험결과와 잘 일치한다고 볼 수 있으며, 정제된 와도관의 방위각은 파속도( $Cp$ )가 거의 0으로 나타나는  $\epsilon = 12^\circ$  부근에서 나타난다.

(2) 교란의 공간상 증폭곡선에 따르면 방위각  $\epsilon = 12.5^\circ$  로 형성된 줄무늬 와도관의 경우  $e^{10}$  이 되는 위치인  $Re \approx 582$ 에서 천이유동을 관측할 수 있을 것으로 예측된다.

(3) 교란의 공간상 증폭곡선에서는 이동하는 교란파의 방위각이 감소함에 따라 가장 증폭이 잘 되는 호의의 등 주파수선( $B^*$ )의 값이 감소( $210 \rightarrow 27$ )하며, 정제된 교란이 관측된 방위각  $\epsilon = 12.5^\circ$  에서 유동교란의 시간상 증폭곡선과 비교할 때 이들 두 값은 거의 일치한다. 따라서 시간과 공간적으로 증폭된 유동 불안정성은 정제된 교란형태로 천이유동을 관측할 수 있다고 판단된다.

## 후기

이 논문은 1999년도 두뇌한국21사업 핵심분야 사업비에 의하여 지원되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Saric, W. S., 1994, "Physical Description of Boundary-Layer Transition : Experimental Evidence," AGARP Rep. No. 793.
- (2) Chin, D. T. and Litt, M., 1972, "An Electro-

- chemical Study of Flow Instability on a Rotating Disk," J. Fluid Mech., Vol.54, pp. 613-625
- (3) Faller, A. J., 1991, "Instability and Transition of Disturbed Flow over a Rotating Disk," J. Fluid Mech., Vol. 230, pp. 245-269.
- (4) Hwang, Y.-K. and Lee, Y.-Y., 2000, "Theoretical Flow Instability of the Kármán Boundary Layer," KSME International J., Vol. 14, No. 3, pp. 358-368.
- (5) Bader, G. and Ascher, U., 1985, "A New Basis Implementation for a Mixed Order Boundary O.D.E. Solver," Tech. Rep. 85-11, Dept. of Computer Science, U. of British Columbia, Vancouver, Canada.
- (6) Hwang, Y.-K., 1996, "Stability of Buoyancy-Induced Flows Adjacent to a Vertical Isothermal Surface in Cold Pure Water," KSME Journal, Vol. 10, No. 4, pp. 498-508.
- (7) 황영규, 이윤용, 2000, "Kármán 경계층 유동의 안정성에 관한 연구," 설비공학 논문집 제 12권 제8호, pp. 771-781.
- (8) Wilkinson, S. P. and Malik, M. R., 1983, "Stability Experiments in the Flow over a Rotating Disk," J. AIAA, 23, pp. 588-595.