

대수 레이놀즈 응력모델에 의한 단이 진 벽면분류에 대한 수치해석

서호택*, 이득수**, 부정숙***

Numerical Analyses on Wall-Attaching Offset Jet with Algebraic Reynolds Stress Model

Ho Taek Seo, Deuck Soo Lee, Jung Sook Boo

Key Words: Wall Jet (벽면분류), Reattachment Length (재부착길이), $k-\epsilon$ 모델, Reynolds Stress Model (레이놀즈 응력모델),

Abstract

Algebraic Reynolds Stress (ARS) model is applied in order to analyze the turbulent flow of wall-attaching offset jet and to evaluate the model's predictability. The applied numerical schemes are upwind scheme and skew-upwind scheme. The numerical results show good prediction in first order calculations (i.e., reattachment length, mean velocity, pressure), while they show slight deviations in second order (i.e., kinetic energy and turbulence intensity). By comparison with the previous results using $k-\epsilon$ model, ARS model predicts better than the standard $k-\epsilon$ model, however, predicts slightly worse than the $k-\epsilon$ model including the streamline curvature modification. Additionally this study can reconfirm that skew-upwind scheme has approximately 25% improved predictability than upwind scheme.

1. 서론

난류 전단류의 여러 가지 흐름의 형태중 분류 유동은 공학적으로 그 응용범위가 매우 넓기 때문에 많은 실험적 및 수치적 연구가 진행되어 왔으며, 최근 컴퓨터의 급격한 발달에 의해 유체 유동을 수치해석하기 위한 난류모델의 적합성 및 개발 등에 관련된 많은 연구가 이루어지고 있다^{(1)~(9)}.

특히, 단이 진 2차원 벽면분류(wall-attaching offset jet; 이하 "WAOJ")는 Fig. 1과 같이 자유분류와 벽면분류의 복합구조에 더불어 Coanda 효과에 의해 야기되는 재부착, 재순환유동 및 유선의 급격한 곡률 등 복잡한 난류유동장을 형성한다⁽¹⁰⁾. 따라서 난류모델의 적합성을 파악하기 위한 좋은 유동장중 하나이다.

서호택⁽¹¹⁾은 Fig. 1의 WAOJ에 대해 first accu-

racy upwind (이하 "upwind") 기법으로 $k-\epsilon$ 모델과 유선곡률수정 및 preferential dissipation (이하 "PD") 수정을 고려한 수정모델을 개별적으로 적용하였으며, 유선곡률수정을 고려한 경우는 해석결과가 다소간 개선되었으나, PD 수정만을 고려한 경우는 실험치와 많은 차이를 보였다.

상기 연구와 계속하여 서호택⁽¹²⁾은 skew-upwind central (이하 "SK") 기법을 적용하여 재해석한 결과, SK 기법은 upwind 기법에 비해 재부착길이, 속도 및 압력 같은 1차 계산에는 약 25%의 향상을 보였으나 난류운동에너지와 같은 2차 계산에는 뚜렷한 개선효과가 나타나지 않았으며, 유선곡률수정만을 고려한 $k-\epsilon$ 모델이 가장 좋은 결과를 산출함을 도출하였다.

본 논문은 Fig. 1의 유동장에 대한 상기 2편^(11,12)의 후속연구로서 대수 레이놀즈 응력모델을 upwind 기법 및 SK 기법을 적용하여 (1) 수치해석기법 차이에 의한 계산결과 차이를 재확인하며, (2) $k-\epsilon$ 모델 대비 개선효과를 파악하고자 한다.

* 정희원, 한국전력기술주식회사

** 한국전력기술주식회사

*** 정희원, 부산대학교 기계공학과, 기계기술연구소

2. 레이놀즈 응력모델

레이놀즈 응력방정식은 다음과 같다⁽¹³⁾.

$$\frac{\partial(\overline{U_k u_i u_j})}{\partial x_k} = P_{ij} + R_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$P_{ij} = -(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}) : \text{생성항}$$

$$R_{ij} = \frac{\rho}{\rho} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) : \text{압력-변형률항}$$

$$D_{ij} = -\frac{\partial(\overline{u_i u_j u_k})}{\partial x_k} : \text{확산항}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu (\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}) : \text{소실항}$$

확산항 D_{ij} 는 난류유동에 의한 확산만을 고려하여 다음과 같이 모델링하였다.

$$D_{ij} = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} [\frac{k}{\varepsilon} (\overline{u_i u_l} \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l})] \quad (2)$$

소실항 ε_{ij} 에 대해서는 소실은 등방성으로 일어난다고 가정하여 다음과 같은 모델을 사용한다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (3)$$

압력-변형률항(R_{ij})은 요동속도들만의 관계에 의한 $\pi_{ij,1}$ 및 평균 변형률과 요동속도와 관계에 의한 $\pi_{ij,2}$ 을 결합시킴으로써 모델링한다.

$$\pi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ij,2} = & -B_1 (P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) - B_2 k (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}) \\ & - B_3 (G_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (5)$$

상기 식에서 P_k , G_{ij} , B_1 , B_2 , B_3 는 다음과 같다.

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$G_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

$$B_1 = \frac{1}{11} (C_2 + 8)$$

$$B_2 = \frac{1}{55} (30 C_2 - 2)$$

$$B_3 = \frac{1}{11} (8 C_2 - 2)$$

벽 근처에서는 벽에 수직인 방향의 법선 레이놀즈 응력성분이 평행한 방향의 법선 성분에 비해 현저히 작아지며, 난류운동에너지에 대한 레이놀즈 전단응력의 비 ($-\overline{uv}/k$) 도 벽으로부터 먼 곳에 비해 작아진다. 이 현상은 압력-변형률항이 벽의 영향을 받기 때문이며, 이 벽의 영향은 다음 항을 압력-변형률항에 더하여 수정함으로써 고려한다.

$$\begin{aligned} \pi_{ij,1W} = & C'_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} \\ & - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i}) f_n (\frac{1}{x_n}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ij,2W} = & C'_2 (\pi'_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \pi'_{ik,2} n_k n_j \\ & - \frac{3}{2} \pi'_{jk,2} n_k n_i) f_n (\frac{1}{x_n}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\pi'_{ij,2} = -\gamma (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) \quad (8)$$

식 (6), (7) 및 (8)에서 보정함수 f 는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$f_n = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon x_n \kappa} \quad (9)$$

따라서, 레이놀즈 응력 전달식의 최종 형태는 다음과 같이 된다⁽¹⁴⁾.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\overline{u_i u_j}) = & -(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \\ & - C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) + \pi_{ij,2} + \pi_{ij,1W} + \pi_{ij,2W} \\ & + C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{k}{\varepsilon} (\overline{u_i u_l} \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_l} \\ & + \overline{u_j u_l} \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l}) \end{aligned} \quad (10)$$

k , ε 에 대한 전달방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho U_l k) = & \frac{\partial}{\partial x_l} (c_s \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_l u_m} \frac{\partial k}{\partial x_m}) \\ & + P_k - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho U_l \varepsilon) = & \frac{\partial}{\partial x_l} (c_\varepsilon \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_l u_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m}) \\ & + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon_1} P_k - c_{\varepsilon_2} \rho \varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (10)~(12)에서 나타나는 $\overline{u^2}$ 및 $\overline{v^2}$ 는 대수 레이놀즈 응력방정식 모델을 이용하였다. 상기 식들에서 사용된 상수값들은 Table 1과 같다.

Table 1 Values of constants in ARS model.

Constant	Value	Constant	Value	Constant	Value
C_{II}	1.8	$C_{\epsilon 2}$	1.92	C_s	0.25
C_1	1.5	C_1'	0.5	C_ϵ	0.15
C_2	0.4	C_2'	0.3	κ	0.4
$C_{\epsilon 1}$	1.44	τ	0.6	C_μ	0.09

3. 수치적 해석 방법

수치적 해석기법 변경에 의한 난류모델의 해석 결과를 정확히 분석하기 위해 제어체적, 격자수, 격자선 간격, 이완계수, 경계조건 등은 격자의존도, 수렴도 및 수렴속도 등에 대한 민감도 분석을 토대로 이루어진 참고문헌 (11) 및 (12)의 경우와 동일하게 하였다. 즉, 제어체적은 $X=34D$, $Y=9.7D$ 되는 부분으로 하였으며, 격자수는 55×37 , 격자선 간격은 Fig. 1의 원점을 기준으로 X축 및 Y축 방향으로 각각 1.04, 1.02로 하였다. 그리고 U, V, k, ν 및 uv의 이완계수는 각각 0.1, 0.1, 0.3, 0.3 및 0.1로 선정하였다.

경계조건중 노즐출구에서 초기값은 실험값과 동일하게 하였는데, 노즐출구속도 U_j 는 30m/sec, $V=0$ 인 균일 유동으로, 초기 난류운동에너지는 실험결과에서 중력장 방향의 속도변동치를 고려해서 $k_j = \frac{3}{4}(\overline{u^2} + \overline{v^2})$ 로 가정하였고 u, v의 난류강도는 모두 실험값인 0.2%로 선정하였다. 기타 경계조건은 Table 2와 같다.

Table 2 Boundary conditions for the flow geometry.

Variable Boundary	U	V	k	ϵ	P	$u_i u_j$	
Jet inlet $X/D = 0$	Exper.	0	Exper.	$k_j^3 / (-\frac{1}{2} C_o D)$	-	Exper.	
Free Surface $Y/D = 9.7$	0	$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$	P_{atm}	$\frac{\partial u_i u_j}{\partial y} = 0$	
Exit $X/D = 34$	$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$	-	$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x} = 0$	
Wall	$X/D=0$	0	Wall Fun.	Wall Fun.	Wall Fun.	-	0
	$Y/D=0$	Wall Fun.	0	Wall Fun.	Wall Fun.	-	0

한편, 운동량방정식의 경계조건 및 난류운동에너지전달방정식의 생성항으로서 대수벽함수를 적용하였다⁽¹¹⁾.

4. 결과 및 고찰

4.1 재부착길이

Fig. 1에서 단의 높이(H)와 노즐출구폭(D)의 비가 2.5인 WAOJ의 수치적 해석 결과를 기존 수치 연구결과^(11,12)와 비교하여 Table 3에 나타내었다.

Potential core length(X_c)는 실험의 경우 3.8D인데 반해 upwind 기법에 의한 유선곡률수정을 고려한 수정 k- ϵ 모델의 수치적 결과(이하 MOCUP)는 2.69D, SK 기법에 의한 유선곡률수정을 고려한 수정 k- ϵ 모델의 수치적 결과(이하 MOCSK)는 2.66D이었다. 반면, ARS 모델로 upwind 기법을 사용한 경우(이하 ARSUP)는 2.53D, ARS 모델로 SK 기법을 사용한 경우(이하 ARSSK)는 4.49D로 나타났다.

재부착길이(X_R)는 Table 3에 나타난 바와 같이 실험결과는 $X_R/D=7.5$ 인데 반해, MOCUP, MOCSK, ARSUP 및 ARSSK의 경우 각각 5.32, 7.22, 5.25, 7.38으로서 난류모델변경보다는 수치적 해석기법 변경에 따른 개선효과가 크게 나타남을 확연히 알 수 있다. 이들 결과를 토대로 기존 연구결과^(11,12)와 비교 분석하면 SK 기법의 해석능력은 upwind 기법에 비해 약 25~30%의 개선효과가 있고, ARS 모델은 표준 k- ϵ 모델에 비해 약 5%의 개선 효과가 있음을 알 수 있다.

4.2 평균속도

Fig. 2은 실험 및 수치해석결과에 의한 평균속도분포를 나타낸 것이다. $X/D=2$ [Fig. 2(a)]에서 $0 \leq Y/D \leq 2$ 는 재순환영역인데 upwind 기법보다는 SK 기법을 사용한 경우가 바람직함을 알 수 있으며, ARS 모델보다는 유선곡률수정을 고려한 k- ϵ 모델이 다소간 바람직한 것으로 나타났다. 한편, Fig. 2(e)~(f)에 나타난 바와 같이 하류로 갈수록 수치적 해석 기법에 따른 계산 결과차이를 뚜렷이 알 수 있으며, 이는 SK 기법에서 skewness error의 축소로 인하여 수치해석이

Table 3 Analytic results and comparison with the previously analytic results.

Model	Characteristic	Scheme ¹⁾	Grid	SCM ²⁾	PDM ³⁾	Potential Core Length (X/D)		Reattachment (X/D)		Iteration	Convergence	Remarks
						Xc ⁴⁾	Error ⁵⁾	X _R	Error ⁵⁾			
Standard	k-ε	Upwind	55x37	X	X	2.19	42 %	5.34	29 %	590	0.001 %	Reference (10)
Modified	k-ε	Upwind	55x37	O	X	2.69	29 %	5.32	29 %	600	0.003 %	Reference (10) MOCUP
Modified	k-ε	Upwind	55x37	X	O	2.10	45 %	4.91	35 %	620	0.002 %	Reference (10)
Modified	k-ε	Upwind	55x37	O	O	1.92	49 %	4.47	40 %	610	0.002 %	Reference (10)
Standard	k-ε	Skew-upwind	55x37	X	X	2.75	28 %	6.85	9 %	710	0.004 %	Reference (11)
Modified	k-ε	Skew-upwind	55x37	O	X	2.66	30 %	7.22	4 %	690	0.004 %	Reference (11) MOCSK
Modified	k-ε	Skew-upwind	55x37	X	O	2.19	42 %	6.02	20 %	690	0.002 %	Reference (11)
Modified	k-ε	Skew-upwind	55x37	O	O	2.80	26 %	6.83	9 %	690	0.001 %	Reference (11)
ARS		Upwind	55x37	X	X	2.53	33 %	5.25	30 %	700	0.005 %	ARSUP
ARS		Skew-upwind	55x37	X	X	4.49	-18 %	7.38	2 %	830	0.005 %	ARSSK

Note

0 : Application X : Non-application

1) Scheme for momentum equation (Upwind scheme is used for other equations.)

2) SCM : Streamline Curvature Modification 3) PDM : Preferential Dissipation Modification

4) Mean velocity in potential core : $U = 0.99U_j$

6) $Error = \frac{X_{exp} - X_{num}}{X_{exp}} \times 100(\%)$ (X_{exp} : Experimental result, X_{num} : Numerical result)

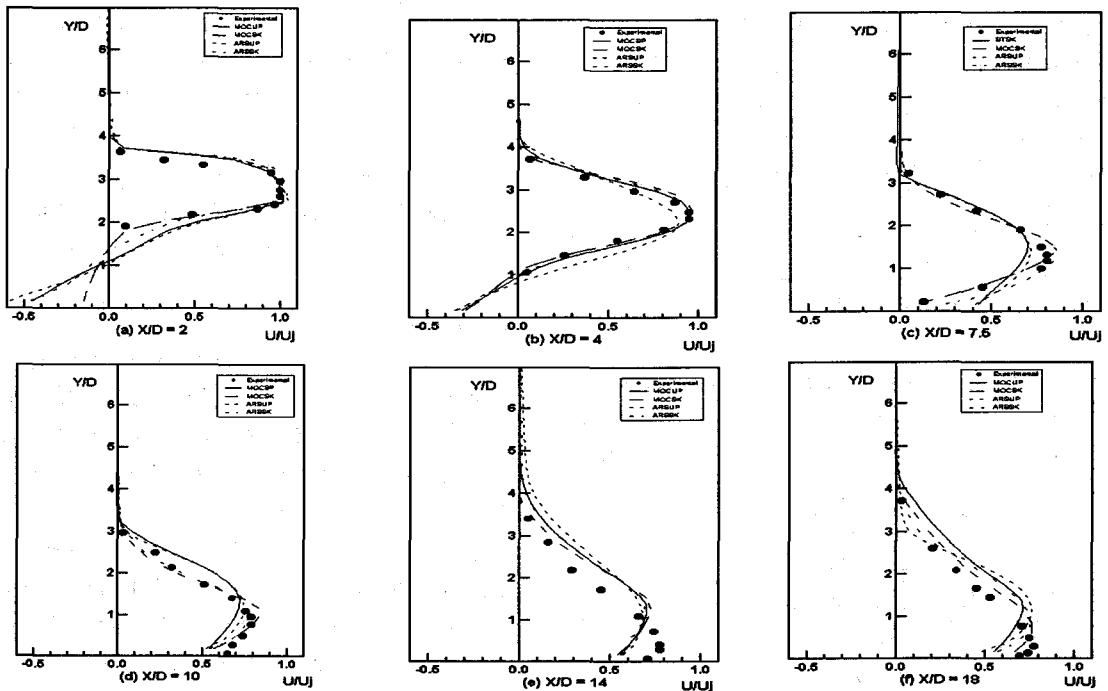


Fig. 2 Mean velocity profiles along streamwise.

상당히 개선된 것을 뜻한다.

Fig. 3은 주류방향 최대속도 U_m 에 대한 변화를 대수로 나타낸 것으로 본 해석결과 실험치와 유사함을 보이고 있다.

Fig. 4는 유동방향의 분류반폭의 변화를 나타낸 것으로 MOCSEK의 경우가 가장 바람직하였는데, 이는 레이놀즈 응력모델에서 유선곡률의 영향에 대한 난류전단응력과 수직응력 사이의 비등방성 정도를 고려하였기 때문이다.

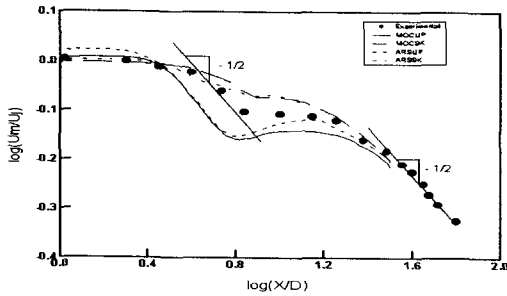


Fig. 3 Logarithmic plots of the maximum velocity variations.

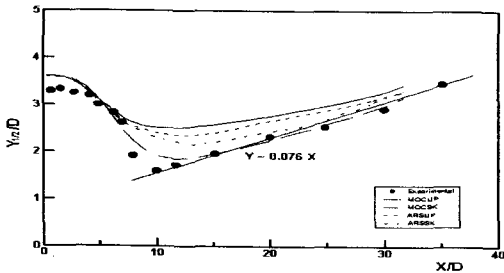


Fig. 4 Variation of jet half width.

4.3 정압분포

Fig. 5는 주류방향의 벽면정압분포를 나타낸 것으로 수치적 결과들은 재순환영역에서는 실험치와 다소 상이하였지만, 하류로 갈수록 실험치와 유사함을 보여준다. 특히 최대 정압계수값은 실험치와 거의 유사하며, 유선곡률을 고려한 수정 $k-\epsilon$ 모델이 ARS 모델보다 다소간 정확한 결과를 산출함을 알 수 있다.

Fig. 6은 Y-방향을 따라 정압분포를 나타낸 것인데 upwind 기법의 결과는 다소간 실험치와 차이가 있으나, SK 기법의 결과는 실험치와 유사함을 보인다.

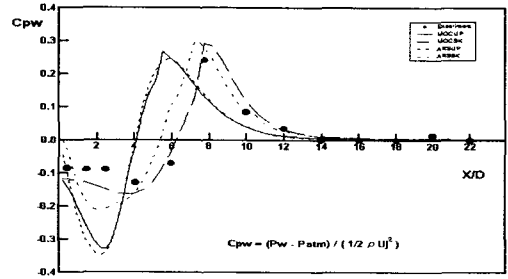


Fig. 5 Wall static pressure distribution.

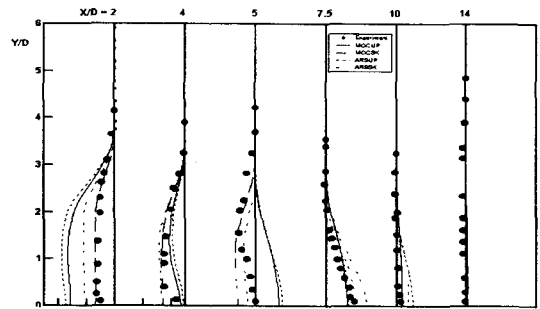


Fig. 6 Static pressure distribution.

4.4 난류운동에너지와 난류운동에너지소산율

Fig. 7은 난류운동에너지의 분포를 나타내고 있는데 전구간에서 정성적으로는 실험치와 유사하나 정량적으로는 작게 나타나고 있다.

Fig. 8는 초기경계조건 ϵ_j 로 표준화시킨 난류운동에너지의 소산율 분포를 나타낸 것인데, $X/D = 2$ 및 4에서 매우 큰 값을 가지나 하류로 갈수록 약해지고, 전반적으로 upwind 기법이 SK 기법보다 큰 소산율을 나타내고 있음을 보여준다.

Fig. 9는 레이놀즈 전단응력의 유동방향에 대한 분포현상을 보여주고 있는데, $k-\epsilon$ 모델의 경우 실험치와 정성적으로는 일치하나 정량적으로 큰 차이를 보이고 있다.

Fig. 10 및 11은 난류강도 u/U_j , v/U_j 의 분포현상을 나타낸 것이다. 실험치의 경우 재순환영역의 반 정도까지는 평면분류의 난류강도와 비슷한 분포현상을 보이며 재부착되면서 벽의 존재로 v 가 급격히 줄어들며 서서히 벽면분류의 난류강도와 비슷한 분포경향을 보여주고 있다.

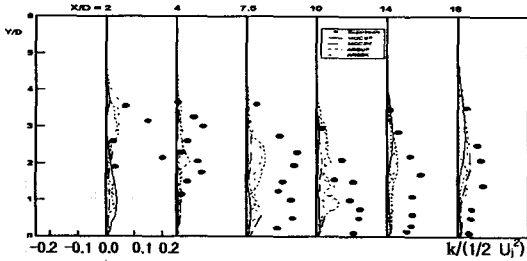


Fig. 7 Turbulent intensity distribution.

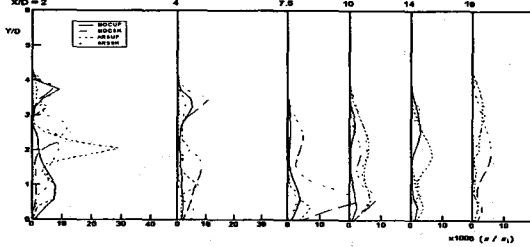


Fig. 8 Dissipation rate distribution.

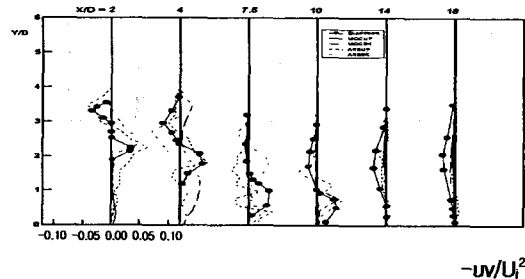


Fig. 9 Reynolds stress distribution.

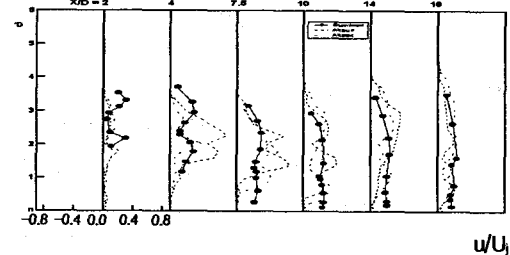


Fig. 10 Turbulence intensity (u) distribution.

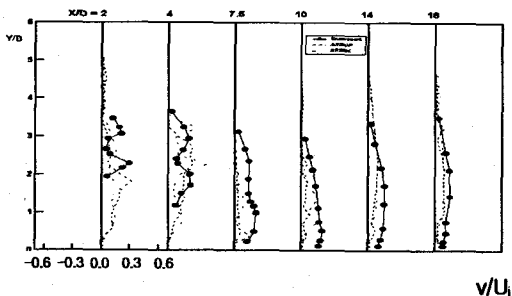


Fig. 11 Turbulence intensity (v) distribution.

5. 결론

(1) Skew-upwind 기법은 upwind 기법에 비해 재부착점 길이, 속도 및 압력과 같은 first-order 계산에서는 약 25~30%의 향상을 보이고, 모델의 개선에 따른 정확성 증가보다는 수치해석 기법의 개선에 따른 정확성 증가가 큼을 재확인하였다.

(2) 1차 계산에서는 ARS 모델보다는 유선곡률을 고려한 수정 $k-\epsilon$ 모델이 다소간 바람직한 것으로 나타났으나, 난류강도 및 레이놀즈 응력과 같은 2차 계산에서는 ARS 모델이 바람직함을 보였다.

(3) 아울러, ARS 모델은 표준 $k-\epsilon$ 모델에 비해 수치적 해석 정확도 측면에서 약 5%의 개선 효과가 있음을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) Ljubora, M. and Rodi, W., 1980, *Trans. of the ASME*, Vol. 102, pp. 350~356.
- (2) 백세진, 유정열, 1989, 대한기계학회논문집 제 13권 제 5호, pp. 999~1011.
- (3) 박태선, 성형진, 1995, 대한기계학회논문집 제 19권 제 8호, pp. 2051~2063.
- (4) 김경천, 부정숙, 양종필, 정지용, 1996, 대한기계학회논문집 제 20권 제 4호, pp. 1510~1520.
- (5) 신종근, 최영돈, 1996, 대한기계학회논문집 제 20권 제 1호, pp. 304~320.
- (6) 김원갑, 최영돈, 1996, 대한기계학회논문집 제 20권 제 5호 pp. 1661~1670.
- (7) 양희천, 유홍선, 임중환, 1997, 대한기계학회논문집 제 21권 제 9호 pp. 1149~1164.
- (8) 안종우, 박태선, 성형진, 1997, 대한기계학회논문집 제 21권 제 6호 pp. 735~746.
- (9) 이성혁, 유홍선, 최영기, 1998, 대한기계학회논문집 제 22권 제 3호, pp. 280~293.
- (10) Kim, J, Kline, S.J., Johnston, J.P., 1980, *Trans. of the ASME*, Vol. 102, pp. 302~308.
- (11) 서호택, 윤순현, 부정숙, 1999, 대한박용기관학회지 Vol. 23, No. 2, pp. 106~116.
- (12) 서호택, 부정숙, 2000, 대한기계학회논문집 제 24권 제 2호, pp. 224~232.
- (13) Launder, B.E., Reece, G.J., and Rodi, W., 1975, *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, pp. 537~566.
- (14) Gibson, M.M. and Launder, B.E., 1978, *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, pp. 491~500.