

가변 중력장하의 밀폐 용기 내 자연 대류

김기현* · 현재민** · 곽호상***

Natural Convection in an Enclosure under Time Dependent Gravity

Ki Hyun Kim, Jae Min Hyun and Ho Sang Kwak

Key Words : Natural Convection(자연대류), Square Cavity(정사각형 용기), Gravity Oscillation(중력 진동), Rayleigh number(레이리 수)

Abstract

Comprehensive numerical computations are made of side-heated squire cavity which is exposed to time dependent external mechanical forcing. Numerical solutions are acquires to the governing two-dimensional Navier-Stokes equations for a Boussinesq fluid. Time dependent heat transfer characteristics of interior fluid are analyzed to illustrate resonance phenomenon. When system is exposed to pure sinusoidal mechanical forcing, the numerical results disclose that the basic mechanism of resonance of mechanical forcing is same as that of thermal forcing of Ref. [3, 9]. In comparatively small amplitude of mechanical forcing, thermal characteristics of the system are similar to basic system($\epsilon=0$).

기호설명

$A(Nu)$	amplitude of fluctuation of $Nu(t)$
f	dimensional frequency of the external force
g	gravitational acceleration
$g_x(t), g_y(t)$	horizontal and vertical accelerations due to mechanical forcing
$G(Nu)$	gain of the time-mean Nusselt number
L	height of the square cavity
N	Brunt-Väsälä frequency, $N=(RaPr)^{1/2} \kappa/L^2$
$Nu(t)$	instantaneous Nusselt number at the vertical mid-plane $x=0.5$
P, p	non-dimensional and dimensional pressure
Pr	Prandtl number, $Pr=\nu/\kappa$
Ra	Rayleigh number, $Ra=g\alpha\Delta TL^3/\nu\kappa$
S	stratification parameter
T	dimensional temperature
τ, t	non-dimensional and dimensional times
u, v	dimensional velocities in x and y
U, V	non-dimensional velocities in x and y
x, y	dimensional horizontal and vertical axes
X, Y	non-dimensional horizontal and vertical axes

α	volumetric expansion coefficient
ΔT	mean temperature difference between the hot and cold side-walls
ϵ	non-dimensional amplitude of external forcing
θ	non-dimensional temperature
χ	thermal diffusivity

1. 서론

측벽 온도차가 존재하는 밀폐 용기내의 자연 대류 현상은 그 폭 넓은 응용성 때문에 많은 연구가 행해졌다. 특히 최근에는 시스템의 열적 경계 조건이 주기적으로 변화하는 경우에 대한 연구가 공진 현상의 존재로 인해 많은 관심을 받고 있다.

Lage & Bejan[1]은 측벽 온도차가 존재하는 밀폐 용기에 열속을 주기적으로 가할 경우 특정 주파수에서 용기 중간에서의 열전달을 변화 진폭이 최대가 되는 공진 현상을 처음 발견하였다. Antohe & Lage[2]는 밀폐용기에 주기적인 열속을 가할 때 열속의 진폭을 변화 시켜도 공진에 거의 영향을 미치지 않는 것을 발견하여 공진이 시스템의 고유 진동수에만 관계 있음을 확인 하였다.

Kwak & Hyun[3]은 밀폐 용기의 고온 측벽 온도가 주기적으로 변화하는 경우에 있어서의 공진 발생에 관해 연구하였다. 이들은 이러한 공진현상이

* 한국과학기술원 기계공학과

** 한국과학기술원 기계공학과

*** 금오공과대학교 기계공학과

성층화 된 시스템이 가지는 Internal gravity 진동모드와 관련 있음을 주장하였고 실제 공진 주파수와 정량적으로 상당히 근사한 공진 주파수를 예측하였다.

여러 선행 연구(1-3)에서 살펴 본 바와 같이 열적 가진에 의해 공진에 처한 시스템은 활발한 유동장 및 온도장의 변화를 보이고 있어 열 교환기 같은 열 전달 시스템에 적용가치가 높다. 그러나 실제로 공진 현상을 유도하기 위해서는 가진력의 정확한 주파수 제어가 필수적으로 요구 되지만 열적 가진을 가하는 경우 가진력의 제어면에서 많은 기술적 어려움을 안고 있다. 따라서 본 연구에서는 측벽 온도차가 존재하는 밀폐용기에서 보다 제어가 쉬운 기계적 가진에 의한 공진현상 유도 방안에 대해 논의 하겠다.

열 전달 시스템에 기계적인 힘을 가하여 공진을 유도하는 연구는 몇 가지 경우에 대해 논의 되어져 왔다. Iwatsu et. al.[5]는 고온의 천정과 저온의 바닥 사이에 수직으로 잘 성층화 된 밀폐 용기의 위판을 기계적으로 진동 시키는 경우에 대해 연구 하였다. 이들은 수치해석 방법으로 특정 가진 주파수 영역에서 열 전달이 증가하는 공진 현상을 발견 하였고 가진력이 시스템의 Internal gravity 진동모드를 자극하여 공진이 발생함을 확인 하였다. Fu & Shieh[6]는 측벽 온도차가 존재하는 밀폐 용기를 중력방향으로 진동 시키는 경우에 대해 연구에서 다른 주파수 영역보다 시스템의 유동장이나 열전달이 활발해지는 공진 주파수 영역의 존재를 확인 하였다.

앞에서 언급 했듯이 측벽 온도차가 존재하는 밀폐 용기에 열적 가진에 의해 나타난 공진 현상을 기계적 가진으로 대체하는 것은 공진의 실용화 측면에서 상당히 중요한 일이다. 이를 위해서는 공진 시 열적 가진과 기계적 가진에서 나타나는 현상에 대해 정성적, 정량적 비교가 필요하다. 따라서 본 연구에서는 측벽 온도차가 존재하는 밀폐 용기에 직접 일정 크기의 기계적 가진을 가하는 방법으로 가진력의 진폭 및 주파수의 변화가 시스템에 미치는 영향에 대해 살펴보았다. 기계적 가진 시 가진력의 방향이 Internal gravity 진동모드에 미치는 영향을 보기 위하여 용기에 수평 및 수직 방향으로 기계적 가진을 가하는 경우를 다루었다. 이러한 해석을 바탕으로 열적 가진을 가하는 경우와 공진 영역에서 정성적인 유사성과 정량적인 상관 관계에 대해 살펴 보았다.

2. 수치 해석

정사각형 용기 안에 비압축성 Boussinesq 유체가 가득 차 있고 용기의 윗벽과 아랫벽은 단열 되어 있다. 용기의 좌측벽은 T_c , 우측벽은 T_h 로 온도가 일정하게 유지되고($T_c < T_h$) 중력은 아래로 향하고 있다. 본 연구에서는 이러한 기본 상태의 시스템에 수평(이하 case 1) 및 수직(이하 case 2) 방향으로 $g_x(t)$, $g_y(t)$ 의 가속을 가하는 경우와 고온 측벽 온도를 주기적으로 변화 시키는 열적 가진(이하 case 3)을 가하는 경우에 대해 살펴 볼 것이다. 이러한 시스템 개요는 그림 1에 잘 나타나 있다.

시스템에 가하는 외부 가진력($g_x(t)$, $g_y(t)$, $T_h(t)$)은 연속적인 정현파(Series sinusoidal wave)형태로 가해지며 아래의 식과 같이 표현된다.

$$g_x(t) = g_o \varepsilon \sin(ft) \quad (1)$$

$$g_y(t) = -g_o \varepsilon \sin(ft) \quad (2)$$

$$T_h(t) = T_c + \Delta T(1 + \varepsilon \sin(ft)) \quad (3)$$

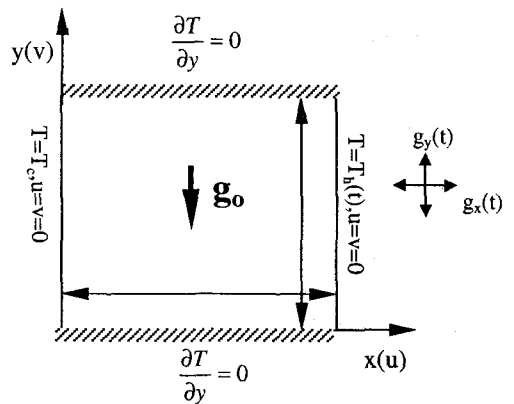


Fig 1. Schematic diagram of flow configuration.

유동장과 온도장은 비정상 Boussinesq Navier-Stokes 방정식에 의해 지배되고, 무차원화된 형태는 아래와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U^2) + \frac{\partial}{\partial Y}(UV) = -\frac{\partial P}{\partial X} - g_x(\tau)\theta + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \nabla^2 U \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(UV) + \frac{\partial}{\partial Y}(V^2) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + (1 + g_y(\tau))\theta + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \nabla^2 V \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U\theta) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\theta) = \left(\frac{1}{PrRa}\right)^{1/2} \nabla^2 \theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (7)$$

시스템의 경계조건은 다음과 같다.

$$U = V = \partial \theta / \partial Y = 0 \text{ at } Y = 0, 1 \quad (8)$$

$$U = V = \theta = 0 \text{ at } Y = 0, 1 \quad (9)$$

$$U = V = 0 \text{ at } X = 1 \quad (10-a)$$

$$\theta = 1 \text{ at } X = 1 \text{ for case 1 \& case 2} \quad (10-b)$$

$$\theta = 1 + \varepsilon_T \sin(\omega \tau) \text{ at } X = 1 \text{ for case 3} \quad (10-c)$$

사용된 무차원 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$(U, V) = (u, v)(RaPr)^{-1/2} \frac{L}{K}, \quad \tau = t(RaPr)^{1/2} \frac{K}{L^2}$$

$$P = \frac{(p + \rho g y)L^2}{\rho \kappa^2 RaPr}, \quad (X, Y) = (x, y)/L$$

$$g_x(\tau), g_y(\tau) = \varepsilon \sin(\omega \tau), \quad \theta = \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)}$$

무차원 진동수 ω 는 아래와 같이 Brunt-väsällä 진동수로 무차원하여 공진 진동수와 Brunt-väsällä 진동수의 비교를 용이하게 하였다.

$$\omega = f / N \quad (11)$$

SIMPLER algorithm(Patankar[7])과 QUICK scheme(Hayase et.al[8])을 사용하여 주어진 방정식을 풀었다. 격자계 및 시간 간격은 충분한 테스트를 통하여 61x61 엇갈림 격자계를 사용하였으며 비균등 격자계를 사용하여 모든 경계층 내에 5 개 이상의 격자점이 포함되게 하였다. Rayleigh 수와 Prandtl 수는 각각 10^7 , 0.7 로 고정하였다. 계산 시간을 줄이기 위해 기본상태($\varepsilon=0$)에서 얻어진 정상 상태의 온도와 속도장을 초기 조건으로 주었다. 각 시간 마다의 수렴 조건은 유동장과 속도장의 최대 상대 변화율이 10^{-4} 이하로 하였고 한 주기 동안의 용기의 세 지점($X=0, X=0.5, X=1$)에서 평균 Nusselt 수의 상대 오차가 1 퍼센트 이하가 될 때 까지 충분히 긴 시간을 계산 하여 Quasi-periodic 정상상태의 값을 얻었다. 수치계산의 분석을 위해 아래와 같이 변수를 정의하였다.

$$G(\phi) = \frac{\phi - \phi_{ss}}{\phi_{ss}} \times 100 \quad (12)$$

$$A(\phi) = \frac{Max[\phi(\tau)] - Min[\phi(\tau)]}{2Nu_s} \quad (13)$$

for $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + 2\pi/\omega$

ϕ 는 임의의 비정상 변수 값이다. $A(\phi)$ 는 ϕ 가 무차원 시간 τ 에 따라 변할 때 한 주기 동안의 ϕ 변동 진폭을 나타내며 $G(\phi)$ 는 임의의 비정상 변수값과 기본 상태에서의 변수값(ϕ_{ss})과의 비율을 나타낸다. 임의의 지점 $X=a$ 에서의 Nusselt-number 은 아래와 같이 정의 했다.

$$Nu(\tau)_{x=a} = \int_0^1 \left[U\theta(RaPr)^{1/2} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_{x=a} dy \quad (14)$$

3. 결과

그림 2는 case 3에서 시스템의 열적 경계조건을 주기적으로 변화 시켰을 때 용기 중간에서의 $Nu(\tau)$ 의 변화 경향과 가진 주파수에 따른 $Nu(\tau)$ 의 진폭($A(Nu)$)을 나타낸 것이다. 이미 Kwak & Hyun[3], Kwak et. al.[9]에서 보인 것처럼 특정 주파수 영역에서 열전달율 진폭이 최대가 되는 공진현상을 확인할 수 있다.

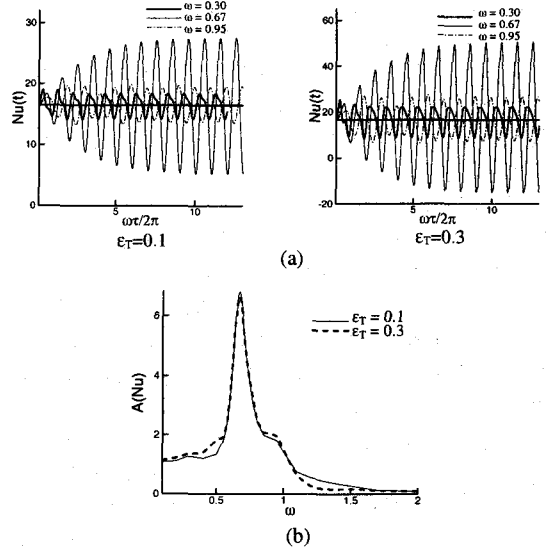


Fig. 2. (a) Time-dependent behavior of the nusselt number at the vertical mid-plane of case 3. (b) Variation of $A(Nu)/\varepsilon$ vs ω of case 3.

그림 3은 case 1, case 2의 기계적 힘을 시스템에 가했을 때 가진력의 진폭과 주파수에 따른 $Nu(\tau)_{x=0.5}$ 의 변화를 도식한 것으로 정성적으로

case 3 과 매우 유사한 $Nu(\tau)$ 의 변화 경향을 보여주고 있다. case 1 의 $\varepsilon_x=0.01$ 을 살펴 보면 $\omega=0.67$ 일 때가 그것보다 큰($\omega=0.9$)경우나 작은 경우($\omega=0.3$)보다 진폭이 더 큰 것을 알 수 있다. case 1 의 다른 크기의 진폭이나 case 2 에서도 마찬가지로 현상이 나타나는데 이는 명백히 기계적 가진에서도 열적 가진과 유사한 공진이 존재함을 보여 주는 것이다. 또한 가진력이 증가하면 이와 비례하여 $Nu(\tau)$ 진폭도 함께 증가하는 경향이 case 1, case 2 에서 나타난다.

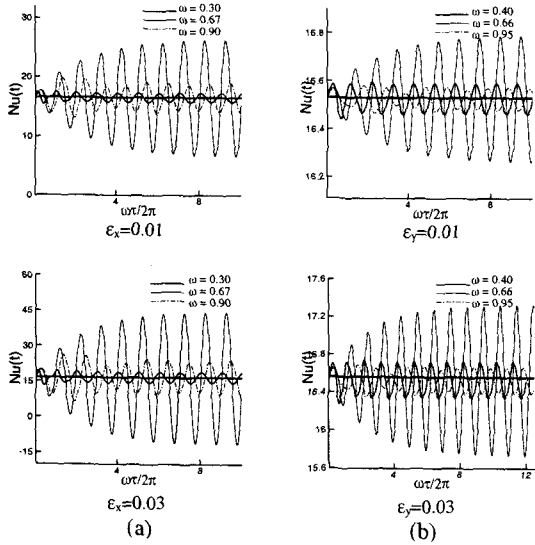


Fig. 3. Time-dependent behavior of the nusselt number at the vertical mid-plane of (a) case1 & (b)case2

case 1, case 2 에서 가진력의 진폭 및 주파수가 $A(Nu)$ 에 미치는 영향은 그림 4 에 잘 나타나 있다. 기계적 가진 시 특정 주파수 영역에서 진폭이 최대로 증가하는 공진 현상이 명확히 나타나고 있다. 또한 그림 5 를 보면 시스템이 공진에 처한 경우가 그렇지 않은 경우보다 활발한 유동장 및 온도장 변화를 볼 수 있다.

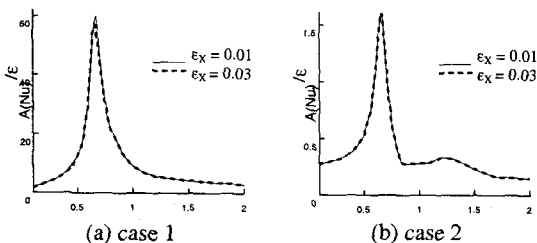


Fig. 4. Variation of $A(Nu)/\varepsilon$ vs ω of (a) case 1, (b) case 2.

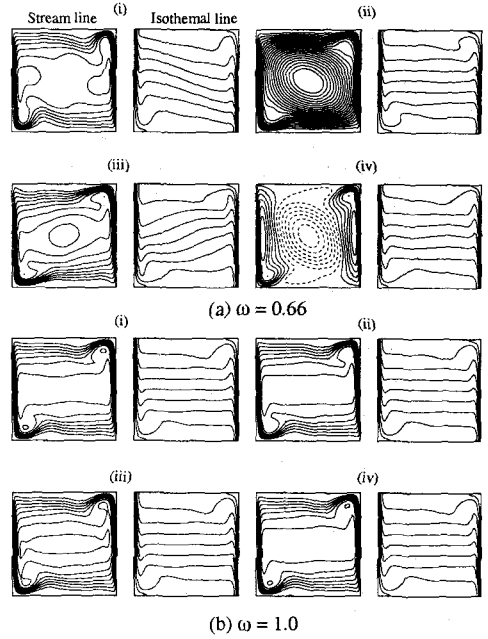


Fig. 5. Stream line and Isothermal line of the system during a cycle of mechanical forcing for case 1. (a) Resonance frequency($\omega = 0.66$), (b) $\omega = 1.0$ (i) the start of cycle, (ii) 1/4 cycle, (iii) 1/2 cycle, (iv) 3/4 cycle.

그림 4 에서 기계적 가진을 가하는 경우 가진력의 진폭 및 주파수에 따른 열전달율 진폭 변화를 살펴보면 열적 가진을 가하는 경우와 그 정성적인 경향이 매우 비슷할 뿐만 아니라 공진 주파수(ω_c)가 거의 일치하고 있다. 이것은 열적 가진과 기계적 가진이 같은 물리적 배경으로 공진이 발생함을 의미한다. Kwak & Hyun[3]은 Paulucci & Chenoweth[10]의 주장을 바탕으로 성층화된 시스템의 Internal gravity 진동수의 예측 방법을 제시하였다. 이들의 방법을 이용하여 본 연구에서 사용한 무차원 변수로 Internal gravity 진동수를 표현하면 식(15)와 같이 표현된다.

$$\omega_i = S/\sqrt{2} \quad (15)$$

$S^2 (\equiv \partial\theta/\partial y)$ 은 성층화 정도를 나타내는 무차원 변수로 기본상태($\varepsilon=0$)에서 수치 계산으로 구한 용기 중간에서의 온도 분포를 수직 방향으로 선형 fitting 하여 구할 수 있다. 식(15)를 이용한 Internal gravity 주파수(ω_i)와 실제 공진 주파수(ω_c)를 표 1 에 비교해 보면, 표에서와 같이 대체적으로 ω_i 와 ω_c 이 잘 일치하고 있어 기계적 가진 시에도 열적 가진과 마찬가지로 외부 가진력이 Internal gravity 진동 모드를 자극하여 공진이 발생함을 알 수 있다.

이러한 기계적 가진과 열적 가진의 유사성을

배경으로 두 경우에 있어서 선형 관계식을 유도할 수 있다. 그림 6-a는 선형영역에서 $A(Nu)/\epsilon-\omega$ 하나의 그림으로 도시한 것이다. 그림에서와 같이 대체적으로 case1, case2, case3이 공진영역 ($0.62 \leq \omega \leq 0.7$)에서 정성적으로 매우 유사한 모습을 보이며 정량적으로 아래의 선형관계식이 만족된다.

$$\left[\frac{A(Nu)}{\epsilon_T} \right]_{case3} \approx 0.113 \times \left[\frac{A(Nu)}{\epsilon_x} \right]_{case1} \quad (16)$$

$$\left[\frac{A(Nu)}{\epsilon_T} \right]_{case3} \approx 4.141 \times \left[\frac{A(Nu)}{\epsilon_y} \right]_{case2} \quad (17)$$

위의 선형 관계식을 바탕으로 $A(Nu)/\epsilon \times \alpha - \epsilon$ 를 그려보면 그림 6-b에서와 같이 case 1, case 2, case 3이 잘 겹쳐지고 있다. 이것은 기계적 가진력의 적절한 진폭 조절로 열적 가진에 의한 열전달 현상을 구현할 수 있음을 의미한다.

Internal gravity frequency(ω_i)			0.68
Resonance Frequency(ω_r)	case 1(g_x)	$\epsilon_x=0.01$	0.67
		$\epsilon_x=0.03$	0.66
	case2(g_y)	$\epsilon_y=0.01$	0.66
		$\epsilon_y=0.03$	0.66
	case3($T_h(t)$)	$\epsilon_T=0.1$	0.67
		$\epsilon_T=0.3$	0.67

Table 1. Comparisons of Resonance frequency (ω_r) with Internal gravity Frequency (ω_i).

그림 6-a를 살펴보면 case 1과 case 2가 정성적으로 비슷하지만 정량적으로 case 1이 $O(10)$ 배가량 큰 $A(Nu)$ 값을 나타내고 있다. 이는 공진이 internal gravity 진동과 관련 있기 때문이다. Kwak & Hyun[3]이 언급했듯이 internal gravity 진동모드에 의해 공진이 발생할 경우 성층화 된 용기 중심부 등온선의 주기적인 기울어짐 현상이 발생하게 되는데 수평 방향으로 가진 할 경우 중력벡터의 주기적인 방향 변화가 직접 등온선의 기울어짐 현상을 유도하기 때문에 강한 공진 현상을 유도할 수 있다.

그림 7-a는 시스템에 동시에 수평($\epsilon_x=0.005$), 수직($\epsilon_y=0.2$)방향의 가진력을 가했을 때 가진 주파수 및 가진력의 위상차에 따른 열전달을 진폭변화를 도시한 것이다. 식(16), (17)에서와 같이 수평방향 가진은 수직방향 가진에 비해 40배 정도의 효과가 있으므로 그림 7-b에서와 같이 $\epsilon_x=0.005$ 는 $\epsilon_y=0.2$ 와 비슷한 크기의 $Nu(\tau)$ 변화를 가지게 된다. 그림 7-a에서 $\pi/2$ 의 가진력 위상차를 주면 $Nu(\tau)$ 의 극점이 서로 겹치게 되어 공진영역에서 한 방향으로만 가진력을 가한 경우에 비해 거의 2배정

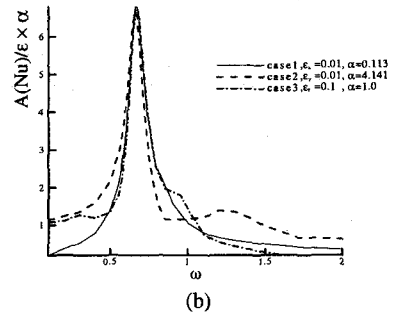
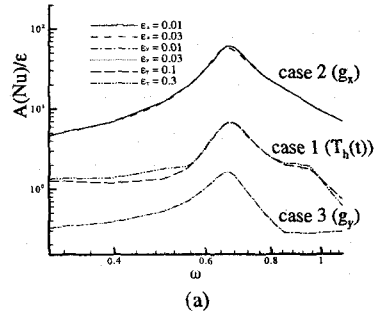


Fig. 6. Comparisons of $A(Nu)/\epsilon$ vs ω

도의 열전달 진폭이 증가현상이 나타난다. 반면 $3\pi/2$ 의 가진력 위상차를 주면 case 1과 case 2의 $Nu(\tau)$ 최대점과 최소점이 서로 겹치게 되어 그림에서와 같이 거의 공진현상이 나타나지 않고 열전달 진폭도 현저하게 감소하게 된다. 이 두 경우에 있어서의 유동장 및 온도장 변화는 그림 8에서 쉽게 비교할 수 있다.

4. 결론

지금까지 축벽의 온도차가 존재하는 밀폐형 사각 용기에 기계적 가진 및 열적 가진을 가했을 때 나타난 시스템의 변화에 대해 살펴 보았다. 용기에 수평 및 수직 방향으로 기계적 가진을 주었을 때 특정 가진 주파수에서 $Nu(\tau)_{\alpha=0.5}$ 의 진폭이 최대가 되는 공진 현상을 확인하였고 이러한 공진 현상이 열적 가진을 가하는 경우와 마찬가지로 기계적 가진력이 시스템의 internal gravity 진동 모드를 자극하여 발생함을 알 수 있었다. 열적 가진과 기계적 가진의 유사성을 바탕으로 이들 사이의 선형 관계식을 유도하였고 식(16), (17)을 통하여 적절한 기계적 가진의 진폭 조절로 열적 가진의 공진현상을 대체할 수 있음을 확인하였다.

기계적 가진을 용기에 수평 방향으로 가한 경

우가 수직 방향으로 가했을 때에 비해 훨씬 활발하게 공진이 발생 하는 것을 확인 하였다. 이런 현상은 수평 방향 가진이 보다 직접적으로 용기 내부의 internal gravity 진동 모드에 영향을 줄 수 있기 때문이다.

수평 및 수직방향 기계적 가진을 동시에 가할 경우 $Nu(t)$ 의 증첩 현상으로 인해 적절한 가진력의 위상조절로 공진현상을 강화 혹은 약화 시킬 수 있었다

참고 문헌

(1) J. L. Lage & A. Bejan, 1993, "The resonance of natural convection in an enclosure heated periodically from the side," *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol. 36, pp 2027-2038

(2) B. V. Antohe & J. L. Lage, 1996, "Amplitude effect on convection induced by time-periodic horizontal heating," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol 39, pp. 1121-1133.

(3) H. S. Kwak & J. M. Hyun, 1996, "Natural convection in an enclosure having a vertical a sidewall with time-varying temperature," *J. Fluid Mech*, Vol. 329, pp.65-88

(4) H. S. Kwak, K. Kuwahara & J. M. Hyun, 1998, "Prediction of the resonance frequency of natural convection in an enclosure with time-periodic heating imposed on one sidewall," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol 41, pp. 3157-3160.

(5) R. Iwatsu, J. M. Hyun & K. Kuwahara, 1992, "Convection in a differentially-heated square cavity with a torsionally-oscillating lid," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol 35, pp. 1069-1076

(6) W. S. Fu & W. J. Shieh, 1992, "A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration," *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 35, pp.1695-1710

(7) S. V. Patankar, 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," *Hemisphere/McGraw-Hill, New York*.

(8) T. Hayase, J. A. C. Humphrey, & R. Grief, 1992, "A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures," *J. Fluid Mech*, Vol. 98, pp. 108-118.

(9) H. S. Kwak, K. Kuwahara & J. M. Hyun, 1998, "Resonant enhancement of natural convection heat transfer in a square enclosure," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol 41, pp. 2837-2846.

(10) S. Paolucci & D. R. Chenoweth, 1989, "Transient to chaos in a differentially heated vertical cavity," *J. Fluid Mech*, Vol. 201, pp. 379-410.

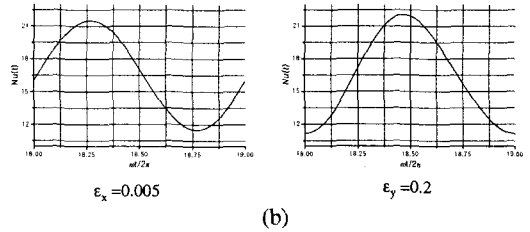
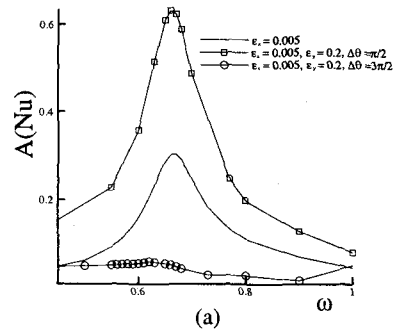


Fig. 7. (a) $A(Nu)$ vs ω behavior of multi-direction mechanical forcing.

(b) $Nu(t)$ behavior of case1 & case2.

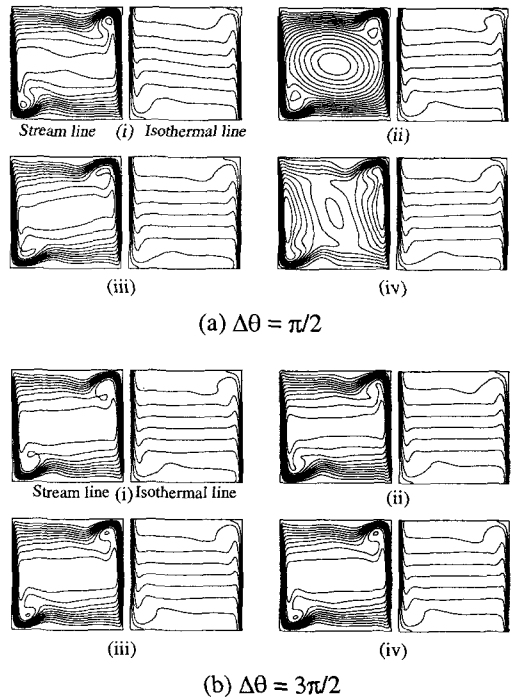


Fig. 8. Stream line and Isothermal line of the system during a cycle of multi mechanical forcing.

($\epsilon_x = 0.005$, $\epsilon_y = 0.2$)

(a) $\Delta\theta = \pi/2$, (b) $\Delta\theta = 3\pi/2$