대한기계학회 2000년도 춘계학술대회논문집 A pp. 672~677 KSME 00S115

자유도 변화 시스템의 해석에 사용되는 마찰 모델의 비교

이진원* · 조형준* · 장욱진* · 임원식** · 이장무***

Comparison of Friction model on the variable DOF system

Chinwon Lee, Hyung Jun Cho, Wook Jin Jang, Won Sik Lim and Jang Moo Lee

Key Words : Friction(마찰), Extended Dahl's Model(확장 달 모델), Stick/Slip(스틱/슬립), Clutch(클러치), Transmission(변속기)

Abstract

This paper compares the two kinds of friction model. The first model is classical stick/slip model. In the stick/slip model, the system is treated to have two different states, namely, stick state or slip state. The second one is continuous model developed by Dahl et. al, namely, Extended Dahl's model. Each model has unique properties, and can be best useful when it is applied on the appropriate system. In this paper, each model is applied on the simple two-block system and the complex automatic transmission system. And the simulation result including simulation accuracy and time required are compared.

기호설명

F	External Force (Torque)
Ff	Frictional Force(Torque)
v	Velocity difference between friction faces
ω	Rotational Velocity difference
N	Normal Force
μ_s	Maximum static friction coefficient
μ_k	Kinetic friction coefficient

1. 서 론

마찰현상에 대한 학문적인 연구는 다른 어떤 연구 분야보다 오랜 역사를 가지고 있다. 마찰 및 마모현상에 대한 미시적인 현상 규명에 관한 연구와 더불어 기계의 작동에 어떻게 영향을 줄 것인가를 예측하기 위한 마찰 현상의 수학적 모델링은 기계 시스템의 거동을 예측하려는 제어공학자등에 의해 수행되어 왔다.

* 서울대학교 대학원
** 서울산업대학교
*** 서울대학교

전통적인 마찰 현상은 소위 스틱/슬립(Stick/Slip: 고착/미끄러짐) 모델로 불리며, 정지마찰력과 쿨롱의 운동마찰력의 전이로서 설명이 되었다. 이러한 전통적인 스틱/슬립 모델은 마찰면을 경계로 두 물체의 속도차가 영인 지점에서 불연속성이 존재하는 단점이 있다. 이러한 강한 비선형성의 문제를 해결하기 위하여 Dahl[1]은 간단한 미분방정식 형태로 마찰력을 모델링 하였으나 몇 가지 일반적인 마찰 특징을 모사하지 못하고 영점 근처를 벗어난 영역에서는 사용할 수 없다는 단점을 가지고 있다. 이 외에도 마찰의 미시적인 구조로부터 발생하는 무작위성을 모사하기 위한 취성모델 및 쿨롱의 법칙과 고착과정을 스프링 모델로 대체한 7-인자 모델 등이 마찰현상의 모델링에 사용되고 있다.

이러한 여러 가지 모델의 개발과 적용은 주로 마찰면이 하나뿐인 간단한 서보 시스템에 대해서 수행되어 왔다. 본 논문에서는 전통적인 스틱/슬립 모델과 달의 모델을 보완, 수정하여 확장 Dahl 의 모델을 간단한 블록 시스템과 복잡한 자동변속기

시스템에 적용하여 수치해석을 수행함으로써 각 모델의 장단점을 분석하였다. 특히 마찰면 여러 개가 동시에 붙고 떨어짐을 반복하며 그 시스템의 자유도가 계속 변하는 자동변속기의 수치해석을 통해 확장 Dahl 모델의 적용 한계 등을 논의 하였다. 이를 위하여 본 논문에서는 기존의 마찰 모델에 수직항력까지 포함한 모델을 제안하여 수치해석에 사용하였다.

2. 마찰 모델의 비교

2.1 전통적인 스틱/슬립 모델

마찰 현상의 일반적인 특징인 스트리벡 효과, Pre-sliding, 히스테리시스 현상 등은 시스템의 상태 변수인 속도차와 작용하는 수직항력에 의해 결정되므로 일반적인 마찰모델은 식 (1)과 같이 비선형 함수로 표현된다.

$$F = F(v, N, parameters) \tag{1}$$

모델에 사용되는 파라메터는 사용모델에 따라 바뀌며 스틱/슬립 모델의 경우 식 (2)에 주어진 바와 같이 최대 정지 마찰계수 및 운동 마찰계수 사용된다.

$$F = N \cdot sign(v) \cdot ((\mu_s - \mu_k)\exp(-(\frac{\Delta V}{V_c})^2) + \mu_k) \tag{2}$$

전통적인 스틱/슬립 모델을 사용하며 시스템을 해석할 경우는 항상 마찰하는 양 단의 속도차를 감시하여 속도차가 없을 경우 최대 정지 마찰력과 외부의 전달력을 비교하여 두 시스템의 결합되어 있는 상태인지(스틱), 미끄러지고 있는 상태(슬립)인지를 감시하여야 하며 그 상태에 따라 전체 시스템의 운동방정식이 달라지게 된다. 일반적으로 전통적인 마찰 모델이라 함은 스틱/슬립 상태를 판단하는 다음과 같은 알고리즘을 포함하여야 한다.

스틱 → 슬립 조건

$$F_{s,\max} \le F_{tranmit}$$

슬립 → 스틱 조건

$$v = 0 \quad \wedge \quad F_{s,\max} \ge F_{tranmit}$$

이러한 스틱/슬립을 판단하는 알고리즘은 시스템의 운동방정식을 적분하여 푸는 과정과 어울려 조금씩 변화하며 복잡해 지게 된다.

2.2 확장된 Dahl 의 모델

달의 마찰모델은 전통적인 마찰모델이 수학적으로 비연속성이기 때문에 불편한 점을 극복하기 위하여 하나의 미분방정식으로 마찰면의 힘을 예측한 것이다. 확장된 Dahl 의 모델은 새로운 상태변수 z 를 도입하여 다른 시스템의 운동방정식과 함께 마찰력을 풀 수 있게 하였고 정상상태의 마찰력을 모사하기 위한 함수 $g(v)$ 을 도입하였다. 원래 Dahl 의 모델은 $K_d = K_c = 0$ 이고 $g(v) = N \cdot \mu_s$ 인 특수한 경우로 볼 수 있다. 하지만 이러한 모델은 수직항력의 변화에 대해 예측이 불가능 하고 새로운 변수 z 의 물리적 의미가 없으므로 식 (3) 과 같은 새로운 마찰모델을 본 연구에 사용하였다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v[1 - sign(v)z / g(v)] \\ F &= N(K_s z + K_d \dot{z} + K_v v) \\ g(v) &= \frac{1}{K_s}(\mu_s - \mu_k)\exp(-\frac{abs(v)}{V_c}) + \mu_k \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3) 에 주어진 확장된 Dahl 의 모델에 사용된 상태변수 z 는 시간에 따른 마찰계수의 의미를 갖는다. 따라서 정상상태에 도달하였을 경우 마찰력은 전통적인 방법의 마찰력과 같은 값을 같게 된다. 즉 $\lim_{t\to\infty} z(t) = g(v)$ 임을 쉽게 알 수 있다. 본 식에서 사용된 Ks 와 Kd 는 각각 마찰력의 강성계수, 감쇠계수를 의미한다. 이 값들은 어느 구조물의 실제적인 강성 및 감쇠가 아니라 마찰 계수 혹은 마찰력의 동적 변화 상태를 나타내는 계수로서 그 값이 커질수록 기존의 전통적인 마찰모델과 같이 상태전이현상을 분명히 드러내게 된다. 또한 Kv 는 스트리벡 효과를 모사하기 위한 계수로 일반적으로 0.0 의 값을 갖는다. 따라서 본 논문에 제시한 확장된 Dahl 의 모델을 사용하기 위해서는 전통적인 계수 이외에 마찰력의 동 특성을 반영하기 위한 두 개의 계수가 더 필요하며 이러한 계수는 실험을 통해 구할 수 있다.

확장된 Dahl 모델은 그 수학적인 간단함 이외에도 동적 특성을 포함하고 있다는 점과 전통적인 모델처럼 상태 변화를 모니터링 하면서 전체 기계

시스템의 자유도를 변화시킬 필요가 없다는 점에서 유리하다. 또한 마찰과 관련된 스프링 현상, 임의로 결정되는 정상상태 구조 등을 반영할 수 있고 초기조건의 변화에 따라 히스테리시스를 반영할 수 있는 장점이 있다.

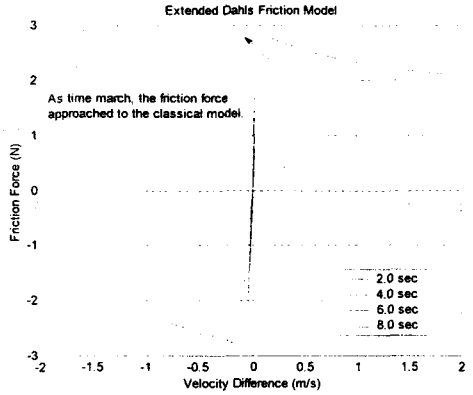

Fig. 1 Extended Dahl's Friction Model

Fig. 1 은 시간의 변화에 따라 확장 Dahl 모델이 예측한 속도차에 대한 마찰력 곡선이다. 시간이 흐를수록 전통적인 마찰모델과 같은 불연속 곡선으로 움직임을 볼 수 있다.

3. 간단한 시스템에 적용한 마찰 모델

3.1 Simple two block system

우선 두 마찰 모델의 유효성을 확인하기 위하여 Fig. 3 에 도시 된 간단한 블록 시스템을 수치적으로 해석하였다.

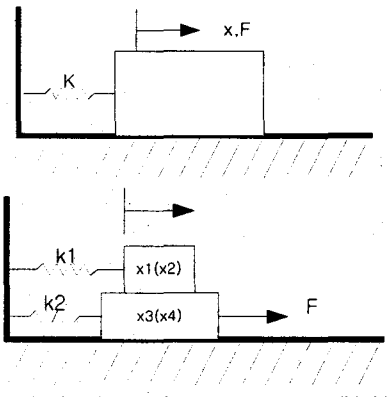

Fig. 2 (a) Simple Block System (Upper) (b) Simple Two Block System (Lower)

Fig. 2 의 (a) 는 바닥과 블록간의 마찰현상에 의해 블록의 운동이 결정되는 시스템이고 (b)는 블록과 바닥면 사이의 마찰과 블록과 블록 사이의 마찰이 동시에 존재하는 경우의 시스템이다. 이상과 같은 두 개의 간단한 시스템의 수학적 모델링은 뉴톤의 운동방정식으로부터 식 (4)-(5)와 같이 주어진다.

3.1.1 단일 블록 시스템

스틱/슬립 모델

(1)스틱인 경우

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

(2)슬립인 경우

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}(-kx - F_f + F)$$

Dahl 의 모델

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}(-kx - F_f + F)$$

$$\dot{z} = v[1 - sign(v)z / g(v)]$$

$$F_f = mg(K_s z + K_d \dot{z} + K_v v)$$

3.1.2 두 블록 시스템

스틱/슬립 모델

(1)두 면이 모두 스틱인 경우(MODE=b00)

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_3 = 0$$

$$\dot{x}_4 = 0$$

(2) 블록 사이가 스틱/ 바닥이 슬립인 경우 (MODE=b01)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1 + m_2}(-k_1 x_1 - k_2 x_3 - F_{f2} + F)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_1 + m_2}(-k_1 x_1 - k_2 x_3 - F_{f2} + F)$$

(3) 블록사이는 슬립/ 바닥은 스틱인 경우 (MODE=b10)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}(-k_1 x_1 - F_{f1})$$

$$\dot{x}_3 = 0$$

$$\dot{x}_4 = 0$$

(4) 두면이 모두 슬립인 경우(MODE=b11)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}(-k_1 x_1 - F_{f1})$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}(-k_2 x_3 - kx_3 + F_{f1} - F_{f2} + F)$$

Dahl 의 모델

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}(-k_1 x_3 - F_{f1})$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}(-k_2 x_3 + F_{f1} - F_{f2} + F)$$

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{K_s}(x_2 - x_4)[1 - sign(x_2 - x_4) z_1 / g(x_2 - x_4)]$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{K_s} x_4 [1 - sign(x_4) z_2 / g(x_4)]$$

$$F_{f1} = m_1 g(K_s z_1 + K_d \dot{z}_1 + K_v (x_2 - x_4))$$

$$F_{f2} = (m_1 + m_2) g(K_s z_2 + K_d \dot{z}_2 + K_v x_4)$$

스틱/슬립 방법으로 마찰력을 모델링 할 경우 슬립 시 운동 마찰력은 식(2)에 주어진 바와 같고 이상에서 주어진 운동방정식과 수치적분 알고리즘 이외에도 앞 절에서 설명한 바와 같이 각 마찰면에서 전달력과 최대 정지 마찰력을 항시 비교하여 현재의 상태가 스틱 상태인지 슬립 상태인지를 판단하여야 한다. 전통적인 방법으로 마찰력을 모델링 할 경우는 그 시스템의 방정식이 마찰력의 개수에 지수적으로 비례하는 집합이 생기는 특징이 있다. 앞에서 보는 바와 같이 마찰면이 한 개인 경우 두 가지의 방정식 집합이 필요하고 두 개의 마찰면이 존재할 경우 네 가지의 방정식 집합이 필요하다.

확장된 Dahl 의 방법으로 주어진 시스템을 모델링 할 경우는 1 차 미분 방정식이 마찰면의 개수와 비례하여 증가하게 된다. 따라서 모델링의 편의성에서는 확장된 Dahl 의 모델이 우수하다고 할 수 있다. 그러나 위의 모델을 수치적으로 적분하는 과정에서 전통적인 스틱/슬립 모델은 룽게쿠타 4 차-5 차 알고리즘등 알고리즘에 상관없이 해석이 되는 반면 확장된 Dahl 의 모델은 시스템 강성이 높은 문제를 풀 수 있는 특수한 알고리즘만이 적용 가능하다. 이는 Dahl 의 동적 모델링에 사용된 강성계수 Ks 의 값이 다른 시스템에 비해 높은 수치이기 때문이다. 즉 마찰계수의 동적 변화는 다른 시스템의 변화보다 상대적으로 빠르게 일어나기 때문이다.

3.2 수치해석 결과

Table 1 은 이상의 시스템을 수치해석 하기 위한 구체적인 모델링 파라메터를 정리한 것이다.

Table 1 Modeling parameter

M1	M2	K1	K2
1.0	1.0	1.0	100.0
Ks	Kd	Kv	Vs
1e4/1e6	1e2/1e3	0.0	0.1

Fig. 3 ~ Fig. 5 는 단일 블록 시스템과 이중 블록 시스템이 1Hz 의 정현파 가진을 받았을 때 운동을 예측한 결과 이다. 사용된 마찰 모델에 관계없이 시스템의 운동을 예측한 결과가 근사한 것을 알 수 있다. 하지만 확장된 Dahl 의 모델을 사용할 겨우 시스템의 강성이 증가하여 전통적인 방법에 비해 1.5 배에서 2 배 정도의 연산 시간이 걸리게 된다.

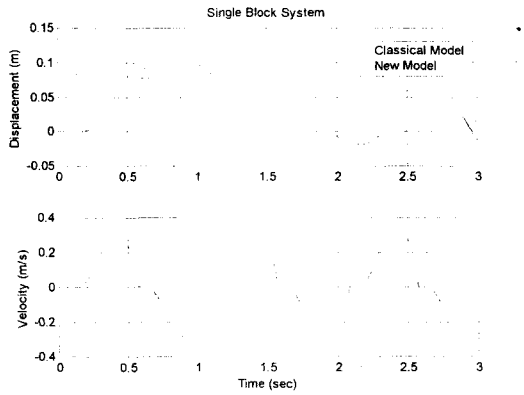

Fig. 3 One block system with 1 Hz sinusoidal input

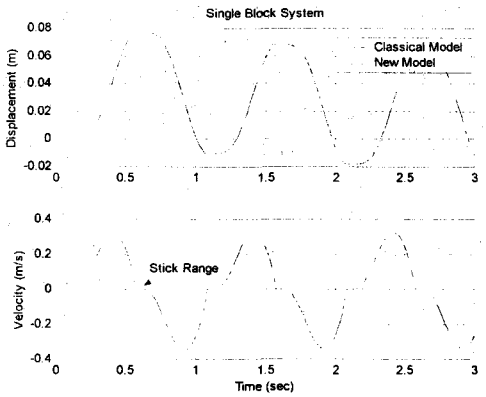

Fig. 4 One block system with 1 Hz sinusoidal input and stiff dahl's coefficient

Fig. 3 과 Fig. 4 는 마찰 모델에 사용된 계수의 변화에 따라 동일한 시스템의 해석 결과가 어떻게 변화하는지를 나타내고 있다. Fig. 3 은 Ks=1e4 인 경우, Fig. 4 는 Ks=1e6 인 경우로 계수가 증가함에 따라 전통적인 스틱/슬립 모델과 더욱 비슷한 결과를 나타냄을 알 수 있다.

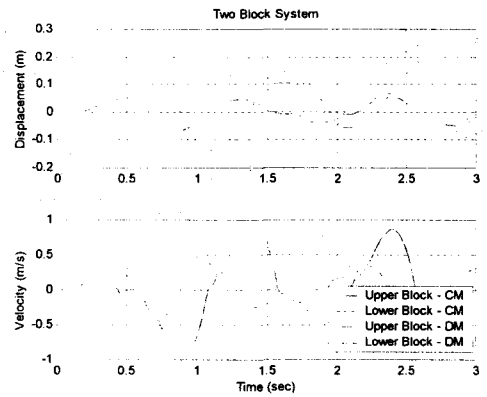

Fig. 5. Two block system with 1 Hz sinusoidal input

Fig.5 는 마찰면이 두 개로 전통적인 마찰모델과 확장된 Dahl 의 모델 모두 두 면에서의 고착상태를 모사하고 있음을 확인할 수 있다.

4. 복잡한 4 단 자동 변속기

4.1 자동변속기의 구조와 모델링

두 가지의 마찰 모델을 실용적인 대상에 적용했을 때도 유효한 결과를 얻을 수 있는지 확인하기 위하여 Fig. 6 에 도시한 구조의 4 단 자동변속기 수치해석에 적용하였다.

수치해석 대상이 된 자동변속기는 1.5L 엔진에 장착되는 아이신 사의 자동변속기로 C1,C2,C3 세 개의 습식 다판 클러치와 B1,B2,B3,B4 네 개의 밴드 브레이크로 1 단부터 4 단까지의 변속을 결정하게 된다.

자동변속기 차량의 구체적인 모델링 파라메터는 서울대학교 정밀연구소에서 수행한 G7 공통기반 과제 최종보고서에 제시되어있고 수치해석은 POTAS-MSM 으로 수행되었다.

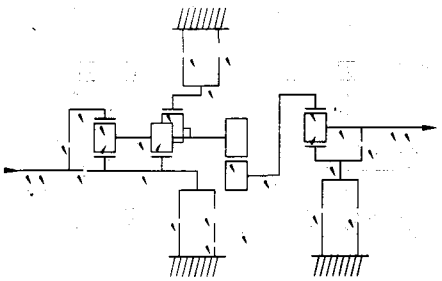

Fig. 6 Schematic Diagram of Automatic Transmission

Fig. 6 에 주어진 개략도와 같이 4 단 자동변속기를 전통적인 마찰 모델을 이용하여 정확히 모델링 한 경우는 2^6 즉 64 가지의 상태의 운동방정식의 조합이 생긴다. 각 마찰 요소의 상태를 검사하며 상황에 맞는 방정식의 집합을 풀어야 한다. 반면 Dahl 의 모델을 사용하는 경우 모델링에 걸리는 시간 및 노력은 줄어들게 되나 자동변속기 차량과 같이 미끄러짐이 단시간만 일어나는 시스템의 경우 운동방정식의 강성이 높아져 계산시간이 증가하는 단점이 있다.

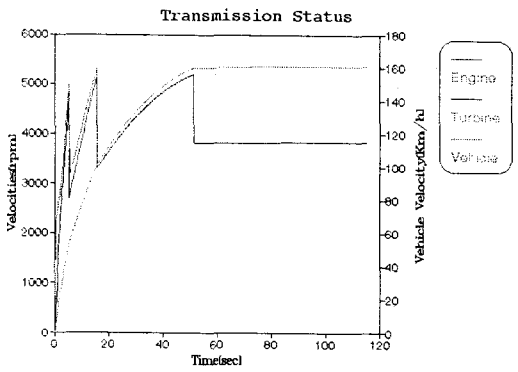

Fig. 7 Speed change during 120 second

Fig. 7 은 스틱/슬립 모델과 Dahl 의 모델을 사용하여 자동변속기의 변속과정을 해석 그림이다. 해석결과는 마찰 모델에 따라 미시적인 변속과도 특성에는 약간의 차이가 있지만 큰 경향은 일치하며 이 결과는 시험결과와도 일치함을 알 수 있다. [5]

Table 2 Computing Time (seconds)

	스틱/슬립모델	Dahl 의 모델
One block (Low Ks)	2.78	5.97
One block (High Ks)	2.78	5.46
Two block	8.48	11.24
4 Automatic Transmission	500	1000(?)

5. 결 론

마찰면을 가지고 있는 기계시스템을 해석할 경우 기존에 많이 사용하고 있던 스틱/슬립 모델은 마찰면이 증가할수록 모델링이 까다롭고 상태전이를 감시하는 알고리즘이 추가로 필요한 반면 스틱 상태가 오래되는 작동상태에서 시스템의 자유도를 줄이게 되므로 상대적으로 해석 시간이 빠른 장점이 있다. 따라서 실용적인 문제를 반복적으로 풀어야 할 경우 유리하게 된다.

Dahl 의 모델은 마찰면마다 한 개의 1 차 미분방정식을 추가함으로써 모델링을 완성할 수 있으므로 개념적으로 편리하며 미끄러짐이 주를 이루는 시스템의 해석에 유리하다. 하지만 미끄러짐이 적어지게 될수록 마찰 모델의 강성이 증가하여 기하급수적으로 계산시간이 증가하는 단점이 있고 수치적분 알고리즘의 선택도 제한적이다. 따라서 제어 알고리즘의 개발처럼 수 회의 모의 실험만이 필요한 경우, 또는 미끄러짐이 지배적인 시스템을 해석할 경우 유리하게 된다.

Table 3. Comparison of two friction models

	스틱/슬립 모델	연속모델
모델링의 편의성	마찰면이 증가함에 따라 2 의 지수 승으로 미분방정식의 집합이 생김	마찰면 하나 당 하나의 미분 방정식이 생김
계산시간	스틱 영역이 많을수록 유리	일반적으로 전통 모델에 비해 1.5 배에서 2.5 배의 시간이 걸림. 슬립 영역이 많을수록 유리
모델의 정확성	미시적인 마찰현상을 모델하지 못함	Pre-sliding, Hysterisis 등을 모사할 수 있음
수치적분 알고리즘	제한 없음.	제한적. 강성이 높은 문제를 풀 수 있는 알고리즘
상태 판단 알고리즘	필요	필요없음
응용분야	자동변속기, 상태천이 구간이 적은 시스템	서보 시스템, 상태천이 구간이 중요한 시스템

참고문헌

(1) P.R. Dahl, "Measurement of Solid Friction Parameters of Ball Bearing", Aerospace Corporation 11, pp. 49-60, 1978

(2) Vahid Johari Majd. Marwan A.Simaan, "A Continuous Friction Model For Servo Systems with Stiction", 1995, IEEE

(3) Jonas Eborn and henrik Olsson, "Modelling and Simulation of an Industial Control Loop with Friction", 1995, IEEE

(4) 서울대학교 정밀 연구소, "변속기 기반 기술개발", 1997, 통상산업부