

# 전개하는 막대의 종진동 해석

조은형\* · 정진태\*\*

## Longitudinal Vibration Analysis of Deploying Rods

Eun-Hyoung Cho and Jintai Chung

**Key Words :** Deploying Rods(전개하는 막대), Longitudinal Vibration(종진동), Instantaneous natural modes(순간고유형상), Galerkin Approximate Method(Galerkin 근사방법)

### Abstract

In this paper, the governing equation and the boundary conditions of deploying rods are derived by using Hamilton's principle. The Galerkin method using the comparison function of the instantaneous natural modes is adopted by which the governing equation is discretized. Based on the discretized equations, the time integration analysis is performed and the longitudinal vibrations for the deploying and the retrieving velocity are analyzed.

### 1. 서 론

오늘날 사용하는 대부분의 산업용 로봇은 요구된 반복작업과 오류가 없는 정확성을 만족시키기 위해서 무겁고 단단한 링크(link)들로 구성되어 있다. 그러나 그 링크들은 전형적으로 큰 강성을 가지며 작업완료를 위한 작업시간이 길어서 구동기에 많은 전력소모가 요구된다. 따라서 빠른 작동에 의해서 생산성을 향상시키고 적은 전력소모로 작업을 끝내기 위해서 가볍고 탄성을 갖는 링크구조물로 구성된 로봇팔이 필요하다. 따라서 이에 대한 연구가 많이 수행되어 왔는데, Barakat<sup>(1)</sup>, Tabarrok 와 Leech<sup>(2)</sup>, Buffinton 과 Kane<sup>(3)</sup>, Batra 와 Lin<sup>(4)</sup>, Park<sup>(5)</sup>, Matsuzaki 와 그의 동료들<sup>(6)</sup>은 일정한 속도로 움직이는 보에 대한 횡방향 진동만을 연구하였는데 이는 실용적인 이유로 종진동보다 횡진동이 주요 관심 대상이었기 때문이다. 그러나 빠른 속도로 보가 전개할 때는 횡진동뿐만 아니라 종진동도 보 끝단에 상당한 진동을 야기시킨다.

본 논문에서는 축방향으로 전개하는 막대에 대한 동특성 연구를 수행하였다. Hamilton 의 원리를 이용하여 전개하는 막대의 지배방정식과 경계조건을 유도하였고 '순간고유형상(instantaneous natural modes)' 개념의 비교함수를 이용한 Galerkin 방법에 의해 지배방정식을 이산화하였다. 여기에 시간적분법을 적용하여 막대의 전개속도에 따른 동적거동을 연구하였다.

### 2. 지배방정식의 유도

#### 2.1 기본관계식

Fig. 1 에 축방향으로  $V$ 의 속도로 전개하는 막대를 도시하였다. 막대의 단면은  $A$ 로 일정하며  $l(t)$ 는 시간  $t$ 에서의 돌출부의 길이이다. 또한 막대는 영계수(Young's modulus)가  $E$ 이고 밀도가  $\rho$ 인 균일 탄성체이다. 임의의 시간  $t$ 에서 막대 내부의 점  $P$ 의 위치좌표를  $x$ 라 하고 탄성변형에 의한 변위를  $u$ 라 하면 변형 후의 점  $P'$ 의 위치 벡터는

\* 회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\* 회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

$$\mathbf{r} = (x+u)\mathbf{i} \quad (1)$$

이다. 여기서, 변위  $u$ 는 위치좌표  $x$ 와 시간  $t$ 의 함수로  $u = u(x,t)$ 이다. 점  $P'$ 의 속도  $\mathbf{v}$ 를 구하기 위해 식 (1)을 물질미분(material derivative)하면

$$\mathbf{v} = \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} \quad (2)$$

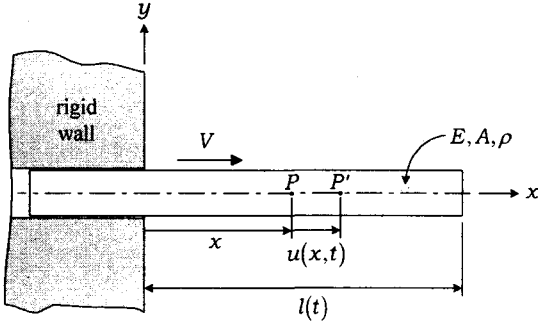


Fig. 1 The axially deploying beam

를 얻는다. 따라서, 시간  $t$ 에서의 막대의 운동에너지  $T$ 는

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} A \int_0^{l(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx \\ &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^{l(t)} \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (3)$$

이다.

종진동하는 막대의 변형이 탄성영역 내에 있을 때 변위와 변형률 및 응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_x = E\epsilon_x \quad (4)$$

따라서, 종진동하는 막대의 변형에너지  $U$ 는

$$U = \frac{1}{2} A \int_0^{l(t)} \sigma_x \epsilon_x dx = \frac{1}{2} EA \int_0^{l(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

로 쓸 수 있다.

## 2.2 Hamilton의 원리 및 지배방정식과 경계조건 의 도출

비보전력이 없는 경우의 Hamilton의 원리는 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (6)$$

식 (6)에서 알 수 있는 바와 같이 전개하는 막대의 지배방정식과 경계조건을 구하기 위해 적용되는 Hamilton의 원리는 운동에너지 및 변형에너지의 변분을 필요로 한다. 먼저 운동에너지의 변분은 식 (3)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta T &= -\rho A \int_0^{l(t)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right. \\ &\quad \left. + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u dx \\ &\quad + \rho A \int_0^{l(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \right] dx \\ &\quad + \left[ \rho A \left( V^2 + V \frac{\partial u}{\partial t} + V^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \right] \Big|_0^{l(t)} \end{aligned} \quad (7)$$

변형에너지에 대한 변분은 식 (5)로부터 다음식으로 표시된다.

$$\delta U = -EA \int_0^{l(t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dx + \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \Big|_0^{l(t)} \quad (8)$$

이제 지배방정식과 경계조건을 도출하기 위해서 식 (7)과 (8)을 식 (6)에 대입하면

$$\begin{aligned} &\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l(t)} \left\{ \rho A \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \delta u dx dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho A \left( V^2 + V \frac{\partial u}{\partial t} + V^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] \delta u \Big|_0^{l(t)} dt = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

을 얻는다. 식 (9)에서  $\delta u$  는 임의의 값이 좌변이 항상 0 이기 위해서는 이것으로 묶여지는 괄호 안의 식들이 항상 0 이어야 한다. 따라서, 식 (9)로부터 전개하는 막대의 지배방정식과 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

$$u = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (11)$$

$$\rho A \left( V^2 + V \frac{\partial u}{\partial t} + V^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = l(t) \quad (12)$$

전개속도  $V$  가 0 인 경우 식 (10)에서 (12)는 이미 잘 알려진 막대의 종진동에 관한 운동방정식과 경계조건이 된다.

### 3. 지배방정식의 이산화

앞 절에서 구한 전개하는 막대의 지배방정식과 경계조건으로부터 막대의 동적거동을 알아보기 위해 본 연구에서는 근사해법인 Galerkin 방법을 사용한다. 막대가 전개하지 않을 때는 엄밀해를 구할 수 있으나 전개하고 있는 경우에는 구할 수 없기 때문에 근사해법을 사용하는 것이다. 근사해법을 적용하기 위해 먼저 전개하는 막대의 종방향 변위를 다음과 같은 근사함수로 가정한다.

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(t, x) \quad (13)$$

여기서, 계수  $a_i$  는  $t$  만의 함수이고,  $\phi_i$  는 비교함수(comparison function)로 시간과 공간에 관한 함수이다. 이는 전개하는 막대의 경우 막대의 길이는 시간의 함수이기 때문이다.  $n$  은  $u$  를 근사하기 위해 사용된 비교함수의 수이다.

식 (10)으로 주어지는 전개하는 막대의 지배방정식에 근사해인 식 (13)을 대입하면 오차가 발생하게 되고 근사함수와 동일한 가중함수(weighting function)를 곱하여 막대의 길이에 관하여 적분하여 계산되어진 유수(residue)를 0 으로 만드는 것이 Galerkin 근사해법의 기본개념이다. 이 때, 가중함

수의 계수는 임의의 값이기 때문에 이 항에 관계 없는 항등식이 되도록 식을 정리하면 다음과 같은 이산화된 상미분방정식을 얻게 된다.

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{a}_j + 2(g_{ij}^t + V g_{ij}^x) \dot{a}_j + (\gamma_{ij}^{\pi} + 2V \gamma_{ij}^{\pi t} + V^2 \gamma_{ij}^{\pi x} + V g_{ij}^x - \delta_{ij}) a_j] = -\dot{V} \eta_i \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

여기서,

$$m_{ij} = \rho A \int_0^{l(t)} \phi_i \phi_j dx \quad (15)$$

$$g_{ij}^{\alpha} = \rho A \int_0^{l(t)} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \alpha} dx \quad (16)$$

$$\gamma_{ij}^{\alpha\beta} = \rho A \int_0^{l(t)} \phi_i \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \alpha \partial \beta} dx \quad (17)$$

$$\delta_{ij} = EA \int_0^{l(t)} \phi_i \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx \quad (18)$$

$$\eta_i = \rho A \int_0^{l(t)} \phi_i dx \quad (19)$$

식 (14)를 행렬-벡터 방정식으로 다시 쓰면

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (20)$$

이다. 여기서,

$$\mathbf{C} = 2(\mathbf{G}^t + V \mathbf{G}^x) \quad (21)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma}^{\pi} + 2V \mathbf{\Gamma}^{\pi t} + V^2 \mathbf{\Gamma}^{\pi x} + V \mathbf{G}^x - \mathbf{\Delta} \quad (22)$$

$$\mathbf{F} = -\dot{V} \mathbf{H} \quad (23)$$

이다.

근사해법인 Galerkin 방법을 사용하기 위해서는 모든 경계조건을 만족하는 비교함수의 선정이 필요하다. 본 연구에서는 근사해를 구하기 위한 비교함수로서 임의의 시간  $t$  에서의 순간고유형상(instantaneous natural modes)을 사용한다. 임의의 시간  $t$  에서의 기하학적 경계조건 및 하중에 대한 경계조건을 모두 만족하는 비교함수는

$$\phi_i(t, x) = \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2 l(t)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (20)$$

이고, 그 시간에서의 고유진동수는

$$\omega_i(t) = (2i-1)\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2(t)}}, \quad i=1,2,\dots \quad (21)$$

이다.

#### 4. 시간응답의 계산 및 고찰

전개하는 막대의 동적거동을 알아보기 위해 상태벡터(state vector)를 이용하여 식 (20)의 행렬-벡터 방정식을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{Y} \quad (24)$$

여기서,  $\mathbf{A}$  와  $\mathbf{B}$  는  $2n \times 2n$  행렬이고,  $\mathbf{Y}$  와  $\mathbf{r}$  은  $2n \times 1$  벡터이며 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (25)$$

식 (24)를 이용한 수치해석은 허용오차가 주어지면 자동으로 적분간격을 조절하는 4 차 계수의 Runge-Kutta 시간적분법을 이용하였고, 2 개의 종방향 모드를 이용하여 수치해석을 수행하였다. 이는 수렴값을 얻는데 충분한 모드수이다. 수치해석을 위해 사용된 막대의 물성치들은  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 0.01 \text{ m}^2$  이고 전개시 초기 변위  $l_0 = 0.3 \text{ m}$  이다.

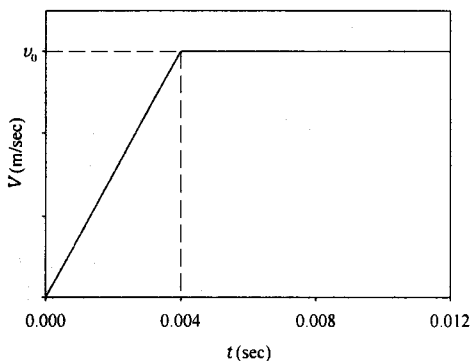


Fig. 2 Velocity profile of the deploying rods

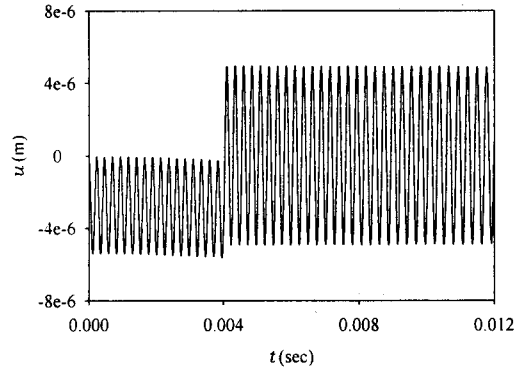


Fig. 3 Time response when  $v_0 = 6 \text{ m/sec}$

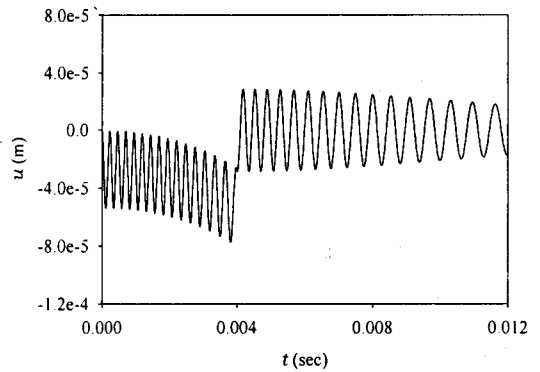


Fig. 4 Time response when  $v_0 = 60 \text{ m/sec}$

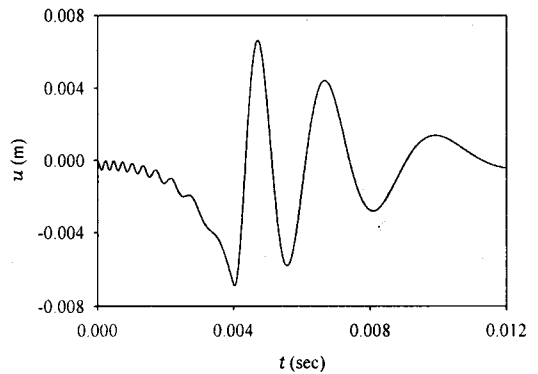


Fig. 5 Time response when  $v_0 = 600 \text{ m/sec}$

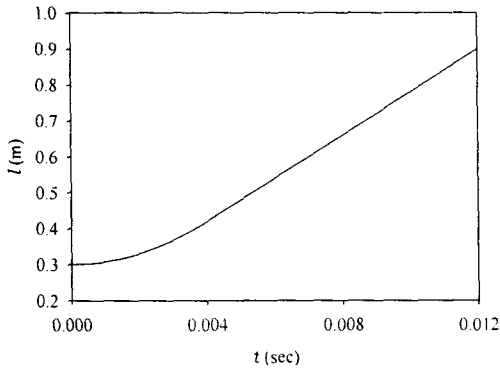


Fig. 6 The length variation of the deploying rods

Fig. 2 는 막대의 전개속도로 0.004sec 까지 증가시킨 후 0.012sec 까지 일정하게 유지시킨다. Fig. 3, Fig. 4 와 Fig. 5 는 일정속도  $v_0$  를 6m/sec, 60m/sec 그리고 600m/sec 로 했을 때의 막대의 끝단에서의 각각의 시간응답을 나타낸다. 세 그림 모두 0.004sec 까지 가속방향의 반대로 관성력이 작용하게 되어 음의 영역에서 변위가 진동하게 되고 0.004sec 이후에는 힘이 사라지게 되어 0 을 기점으로 자유진동하게 된다. 또한 시간이 지남에 따라 막대의 길이가 길어지게 되므로 식 (21)에서 알 수 있는 바와 같이 고유진동수가 작아지고 반대로 막대의 진동주기도 커지게 된다. 따라서,  $v_0$  가 클수록 막대의 길이가 빠르게 증가하므로 Fig. 5 의 시간에 따른 주기변화가 가장 현저함을 알 수 있다. Fig. 6 는  $v_0 = 60\text{m/sec}$  일 때 시간에 따른 막대의 길이의 변화를 나타낸다. 초기 막대의 길이 0.3m 에서 시작하여 0.9m 까지 변화하고 Fig. 2 의 막대의 전개속도를 나타내는 그래프의 면적이 막대의 길이를 나타내므로 0.004sec까지는 2 차 곡선을 나타내고 이후에는 1차 곡선을 나타낸다.

이제 전개된 막대 다시 후퇴시킬 때의 시간응답을 알아보려고 한다. Fig. 7 은 막대의 후퇴속도이다. 0.004sec까지는 그림과 같이 감속을 시키고 이후에는  $v_0 = -60\text{m/sec}$  로 막대를 후퇴시킨다. Fig. 8 은 0.9m 까지 전개된 막대를 후퇴시켜 0.3m 까지 막대의 길이가 변화된 것을 나타낸다. Fig. 9 는 그 시간응답으로 Fig. 3, Fig. 4 와 Fig. 5 에서 관찰한 바와 같이 가속방향의 반대로 관성력이 작용하게 되어 양의 영역에서 진동하고 있다. 그리고 시간에 따라 막대의 길이가 작아지므로 막대의 진동주기도 작아지게 된다.

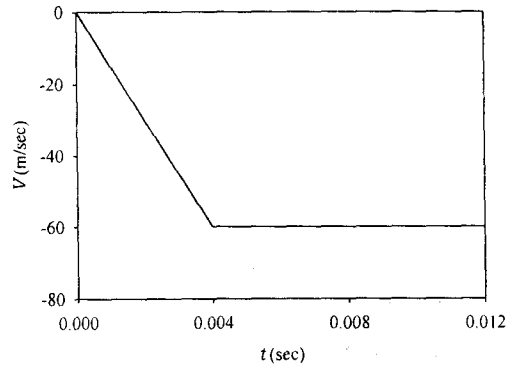


Fig. 7 Velocity profile of the retrieving rods

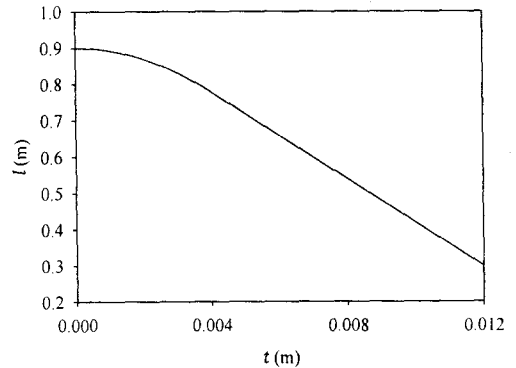


Fig. 8 The length variation of the retrieving rods

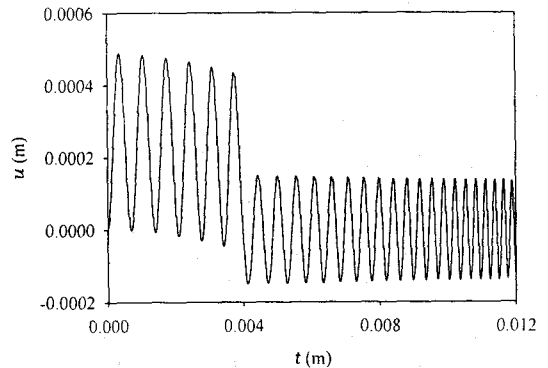


Fig. 9 Time response when  $v_0 = -60\text{m/sec}$

## 5. 결론

본 논문에서 축방향으로 전개하는 막대의 종진동 연구를 수행하였다. Hamilton의 원리에 의해 지배방정식과 경계조건을 유도하였고 비교함수를 이용한 Galerkin 방법으로 지배방정식을 이산화하였

으며 Runge-Kutta 시간적분법을 이용하여 전개하는 막대의 시간응답을 구하였다. 이를 통해 얻은 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 가속구간에서는 관성력이 작용하게 되어 가속방향과 반대방향에서 변위가 진동하고 반면 등속구간에서는 관성력이 없으므로 0을 기점으로 자유진동한다.
- (2) 막대가 전개할 때는 시간에 따라 막대의 길이가 커지므로 고유진동수가 작아지게 되어 주기가 증가하게 되고 증가율은 전개속도에 비례한다.
- (3) 막대가 후퇴할 때는 시간에 따라 막대의 길이가 작아지므로 고유진동수가 커지게 되어 주기가 감소하게 된다.

## 후 기

본 연구는 1998 년도 공학기술연구소 연구비에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- (1) Barakat, R., 1967, "Transverse Vibrations of a Moving Thin Rod," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 43, NO. 3, pp. 533~539.
- (2) Tabarrok, B., Leech, C. M. and Kim, Y. I., 1974, "On the Dynamics of an Axially Moving Beam," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 297, No. 3, pp. 201~220.
- (3) Buffinton, K. W. and Kane, T. R., 1985, "Dynamics of a Beam Moving over Supports", *International Journal Solids Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 617~643.
- (4) Batra and Lin, P. R., 1989, "Steady State Axisymmetric Deformations of a Theroviscoplastic Rod Striking a Hemispherical Rigid Cavity", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 99~113.
- (5) Park, K. J. and Park, Y. S., 1993, "Fourier-Based Optimal Design of a Flexible Manipulator Path to Reduce Residual Vibration of the Endpoint," *Robotica*, Vol. 11, pp. 23~272.
- (6) Matsuzaki, Y., Taki, Y. and Toyama, M., 1995, "Vibration of a Cantilevered Beam during Deployment and Retrieval : Analysis and Experiment," *Smart Material Structure*, Vol. 4, pp. 334~339.