

원통형 액체저장탱크의 고유진동에 대한 이론적 연구

이진규*, 이상영*, 김기환*, 조진래**, 박태학***, 이우용***

Analytical Study on Free Vibration of Cylindrical Liquid-Storage Tanks

Jin-Kyu Lee, Sang-Young Lee, Ki-Whan Kim, Jin-Rae Cho, Tae-Hak Park and Woo-Yong Lee

Key Words : Free Vibration(자유진동), Axisymmetric Cylindrical Tank(축대칭 원통형 탱크), Liquid-Structure Interaction(액체-구조물 연계), Pressure Distribution(압력분포), Eigen-Frequency(고유주파수), Eigen-Mode(고유모드), Analytical Solution(이론적 해석), Relative Liquid Fill-Height(상대 액체저장 높이).

Abstract

Fuel-storage tank is a representative example of liquid-structure interaction systems. In order to prevent the undesired structural failure by a variety of external loads, the reliable analysis of the dynamic response of such structural systems is of a great importance. In this paper, we address the analytical study on free vibration of axisymmetric cylindrical fuel-storage tanks together with the parametric investigation of eigen-characteristics with respect to the relative fuel fill-height and the relative tank height. Numerical results illustrating theoretical results are also included.

1. 서론

내부에 유체를 포함한 원통형 탱크문제(cylindrical tank)는 대표적인 액체-구조물 연계문제(liquid-structure interaction)로서 항공기 연료탱크, LNG 유조선 저장탱크, 원전 냉각수 저장탱크 등과 같은 많은 공학적 응용분야를 가지고 있다. 이러한 액체-구조물 연계시스템은 다양한 외부 동하중에 의해서 동적 안정성 상실이나 구조적 파괴를 야기할 수 있다. 그 결과 인명적, 재정적 그리고 환경적으로 치명적인 손실을 초래하게 된다. 따라서 위와 같은 연계시스템에 대한 동적 특성 연구는 매우 중요하다.

이 논문에서는 바닥은 고정되어 있고 내부에 유체를 포함한 원통형 탱크의 자유진동(free vibration)에 대한 이론적 해석이 관심 대상이다. 여기서 고려되는 내부유체는 비점성, 비압축성으로 가정한다. 탱크의 운동방정식은 축-방향변위와 원주-방향 변위에 대한 2개의 편미분방정식으로 구성된다. 운동방정식을 원통형 탱크문제에 적용하기 위해 탱크의 영역을 유체가 차있는 부분과 유체가 없는 부분으로 나누고 유체가 차있는 영역에서는

유체가 탱크 측벽에 미치는 영향을 압력으로 적용하고 유체가 없는 영역은 외부 하중이 없는 식을 각각 적용하여 각 영역에 대한 해를 구한다. 각 영역에 대해 구한 해를 유체높이 영역에서의 연속성을 만족시켜주기 위해 접합조건(compatibility condition)을 적용하여 전 영역에 대한 해를 구한다. 여기서, 유체에 의해 발생하는 동압(hydrodynamic pressure)은 유체의 포텐셜 함수의 Laplace 방정식과 경계조건(boundary condition)으로 구해지고 동압은 Bernoulli 방정식에 의해 구해진다.

원통형 탱크의 동적 특성에 영향을 미치는 파라미터(parameter)로써 유체높이 대 탱크높이(H/L), 탱크지름 대 탱크 높이(L/D)등을 설정하였고 압력분포(pressure distribution), 고유주파수(eigen-frequency), 고유모드(eigen-mode) 등을 각 모델에 대해 비교, 분석하였다.

2. 원통형 탱크의 구조

이 논문에서 고려하고자 하는 탱크의 형태는 Fig. 1과 같다. 탱크의 아래부분은 고정되어 있고, 원통형이고, 두께 h 가 매우 얇은 박판 구조물이며, 반경이 R , 높이가 L 인 형태이다. 그리고 내부에

* 부산대 대학원

** 부산대

*** 국방과학연구소

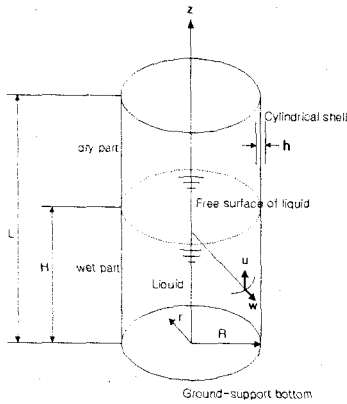


Fig. 1 Structure of liquid-storage tanks

유체가 H만큼의 높이로 차여져 있다. 탱크는 바닥의 중심을 원점으로 하는 원통형 좌표를 사용한다.

3. 운동 방정식

탱크 구조물에 대한 운동 방정식은 축-방향(axial displacement)에 대한 2차 편미분 방정식(partial equation)과 원주-방향(radial displacement)에 대한 4차 편미분 방정식으로 구성된다. 여기서 원주-방향에 대한 식은 유체의 높이에 따라 2영역으로 나누어져 압력항이 있는 식과 없는 식을 적용한다. Novozhilov[5]에 의해 유도된 식에 따라 운동 방정식을 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\rho_s h}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$K \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} w + \frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)R} \frac{\partial u}{\partial z} + \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \begin{cases} p(z, t) & (0 < z < H) \\ 0 & (H < z < L) \end{cases} \quad (2)$$

여기서,

E = 탱크 구조물의 탄성계수

ρ_s = 탱크 구조물의 밀도

ν = Poisson's ratio

$p(z, t)$ = 유체에 의해 탱크측벽에 작용하는 동압력

D = 탱크 셸의 인장강성(= $Eh/(1-\nu^2)$)

K = 탱크 셸의 굽힘강성(= $Eh^3/12(1-\nu^2)$)

내부 유체에 의해 탱크 측벽에 작용하는 동압을 구하는 과정은 먼저 속도 포텐셜(potential function)을 유체의 비회전성 조건(irrotational condition)을 적용한 Laplace 방정식과 경계조건을 적용하여 구한다. 내부 유체가 만족해야 할 경계조건을 나타내면 아래와 같다.

1. 탱크의 바닥($z=0$)에서 z -축 방향으로의 유체 속도는 0이다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, 0, t) = 0 \quad (3)$$

2. 유체와 탱크의 측벽이 만나는 영역($r=R$)에서는 원주-방향에 대한 유체의 속도와 탱크구조물의 속도가 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(R, z, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(z, t) \quad (4)$$

3. 유체의 자유표면에서 압력은 0이다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(r, H, t) = 0 \quad (5)$$

위의 조건을 그림으로 나타내면 아래의 Fig. 2와 같다. 속도 포텐셜 함수와 압력분포와의 관계는 다음과 같이 Bernoulli 방정식에 의해 표현된다.

$$p(r, z, t) = -\rho_\ell \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_\ell g \cdot (H - z) \quad (6)$$

여기서 ρ_ℓ 은 유체의 밀도를 나타낸다. 따라서, 유체의 의해 발생하는 동압은 아래와 같이 표현된다.

$$p_d(R, z, t) = -\frac{2\rho_\ell}{H} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{a_i I_1(a_i R)} C_i \quad (7)$$

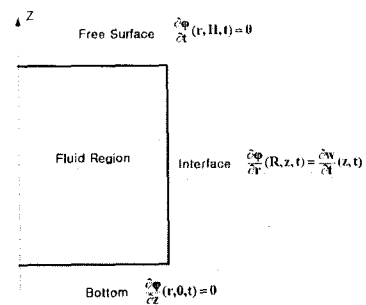


Fig 2. Boundary condition of liquid region

여기서,

$$\begin{aligned} B_i &= \int_0^H \ddot{w}(\eta, t) \cos(a_i \eta) d\eta \\ C_i &= I_0(a_i R) \cos(a_i z) \\ a_i &= \frac{(2i-1)\pi}{2H} \\ I_0 &= \text{수정된 0차 1종 Bessel 함수} \\ I_1 &= \text{수정된 1차 1종 Bessel 함수} \end{aligned}$$

4. 이론적 해석

유체가 부분적으로 찬 탱크의 이론적인 해를 구하는 과정은 3단계에 의해 이루어진다. 첫 번째, 외부 하중을 무시한, 즉, 내부에 유체가 없는 빈 탱크에 대한 제차해(homogeneous solution)를 먼저 구한다. 두 번째, 탱크의 영역을 유체가 있는 영역과 유체가 없는 영역으로 구분한 후 유체가 있는 영역에 대한 비 제차해(particular solution)를 구한다. 세 번째, 위 두 단계에서 구한 해의 미지수를 결정하기 위해 탱크의 바닥영역에서 변위경계조건, 유체높이 영역에서 변위 및 하중 접합조건, 탱크의 끝단 영역에서 하중 경계조건을 적용하여 해를 구한다.

먼저, Eqs. (1)과 (2)의 제차해를 구하기 위해 Eq. (2)에서 압력하중조건을 0으로 한다. 그리고 축-방향 변위와 원주-방향 변위를 아래와 같은 단순조화함수로 가정한다.

$$\begin{aligned} u(z, t) &= U e^{mz} \sin(\omega t) \\ w(z, t) &= W e^{mz} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

Eq. (8)을 Eqs. (1)과 (2)에 대입하면 U와 W에 대한 2개의 대수 방정식을 유도할 수 있다. 2개의 대수 방정식은 아래와 같은 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서, $A = (m + \rho_s h \omega^2)/D$, $B = (\nu m)/R$, $C = (D \nu m)/R$ 그리고 $D = Km^4 + D/R^2 - \rho_s h \omega^2$ 로 정의된다. Eq. (9)의 행렬이 비자명해(non-trivial solution)를 가지기 위해서는 행렬식(determinant)이 0이 되어야 한다. 행렬식은 아래와 같은 3차-방정식 형태로 나타난다.

$$C_1 M^3 + C_2 M^2 + C_3 M + C_4 = 0 \quad (10)$$

여기서, $M = m^2$ 이고 $C_1 \sim C_4$ 는 고유주파수에 의존하는 상수이다.

Eq. (7)의 근은 세 개의 실수가 되는 경우와 두 개의 복소수와 한 개의 실수로 구성된다. 먼저, 해의 근이 복소수인 경우에 대해 설명하면 아래와 같다.

$$M_{1,2} = \hat{\alpha} \pm i\hat{\beta} \quad (11)$$

Eq. (8)의 제곱근은 다음과 같이 나타나게 된다.

$$m_{1,2} = \bar{\alpha} \pm i\bar{\beta}, \quad m_{3,4} = -\bar{\alpha} \pm i\bar{\beta} \quad (12)$$

Eq. (9)의 근들에 의해 표현되는 반경-방향 변위는 아래와 같은 실수값을 가지는 함수들로 표현된다.

$$\begin{aligned} w(z, t) &= [A_1 e^{-\bar{\alpha} z} \sin(\bar{\beta} z) + A_2 e^{-\bar{\alpha} z} \cos(\bar{\beta} z) \\ &\quad + A_3 e^{-\bar{\alpha} z} \sin(\bar{\beta} z) + A_4 e^{-\bar{\alpha} z} \cos(\bar{\beta} z)] \\ &\quad \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (13)$$

그리고 거기에 상응하는 축-방향 변위는 아래와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} u(z, t) &= [A_1 e^{-\bar{\alpha} z} \{\gamma \cos(\bar{\beta} z) - \delta \sin(\bar{\beta} z)\} \\ &\quad + A_2 e^{-\bar{\alpha} z} \{\delta \cos(\bar{\beta} z) + \gamma \sin(\bar{\beta} z)\} \\ &\quad + A_3 e^{-\bar{\alpha} z} \{-\gamma \cos(\bar{\beta} z) - \delta \sin(\bar{\beta} z)\} \\ &\quad + A_4 e^{-\bar{\alpha} z} \{\delta \cos(\bar{\beta} z) - \gamma \sin(\bar{\beta} z)\}] \\ &\quad \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, γ 와 δ 는 복소수인 U와 W의 관계를 나타낸 변수의 실수부와 허수부를 나타낸다.

$$U = \eta W, \quad \eta = \gamma + i\delta \quad (15)$$

다음은 해가 실수로 나타나는 경우는 방정식의 근 M이 양수이나 음수이나에 따라 다른 변위장을 가진다. 먼저 근 M이 양수인 경우에 대한 식을 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} w(z, t) &= [A_1 e^{\sqrt{M}z} + A_2 e^{-\sqrt{M}z}] \sin(\omega t) \\ u(z, t) &= \gamma [A_1 e^{\sqrt{M}z} + A_2 e^{-\sqrt{M}z}] \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

다음으로 M이 음수인 경우에는 아래와 같다.

$$w(z, t) = [A_1 \sin(\sqrt{Mz}) + A_2 \cos(\sqrt{Mz})] \sin(\omega t)$$

$$u(z, t) = \delta [A_1 \sin(\sqrt{Mz}) - A_2 \cos(\sqrt{Mz})] \sin(\omega t) \quad (17)$$

다음은 유체에 의해 발생하는 동압의 영향을 고려한 특성해를 구해야 한다. 먼저, 반경-방향과 축-방향에 대한 전체해를 표현하면 아래와 같이 나타낸다.

$$u(z, t) = \left[\sum_{i=0}^6 A_i G_i(z) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin(\alpha_n z) \right] \sin(\omega t)$$

$$w(z, t) = \left[\sum_{i=0}^6 A_i F_i(z) + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin(\alpha_n z) \right] \sin(\omega t) \quad (18)$$

여기서, $G_i(z)$ 와 $F_i(z)$ 는 앞에서 구한 균질해에서 구한 함수이다. Eq. (18)을 Eq. (1)에 대입하면 P_n 과 Q_n 에 대한 관계를 구할 수 있다.

$$P_n = \frac{\nu D \alpha_n}{R(\rho_s h \omega^2 - D \alpha_n^2)} Q_n = \xi_n Q_n \quad (19)$$

다시 Eq. (18)을 Eq. (2)에 대입하면 Q_n 가 결정되지 않은 미지변수인 A_i 를 포함한 형태로 표현되어진다.

$$Q_n = \lambda_n \sum_{i=0}^6 A_i T_{in} \quad (20)$$

여기서, $T_{in} = \int_0^H F_i \cos(\alpha_n x) dx$ 으로 정의된다.

또한, λ_n 은 유체-고체 상호작용 시스템의 물성치 특성과 진동 주파수에 의존하는 인자가 되고 나타낸다.

다음으로는 앞에서 유도한 유체를 부분적으로 포함한 탱크는 유체가 찬 영역과 유체가 없는 영역으로 나누어진다. 따라서, 위에서 구한 해는 두 가지 경우에 대해 독립적으로 적용되고 두 영역이 만나는 유체 높이($z=H$)인 부분에서 해의 적합조건(compatibility condition)을 만족시켜 전체적인 해를 구하게 된다. 따라서 유체가 없는 경우 6개의 경계조건, 유체가 부분적으로 있는 경우 12개의 경계조건, 유체가 가득찬 경우 6개의 경계조건이 적용되고 결정되어야 될 미지수의 개수는 경계조건의 수와 같기 때문에 유체가 어떻게 차 있는냐에 따라서 위 문제는 유체가 없는 경우와 유체가 가득차 있는 경우는 6×6 형태 그리고 유체가 부분적으로 차있는 경우 12×12 형태의 행렬으로써 표현되는 대수 연립방정식을 구하는 형태가 된다.

$$[K] \cdot \{A\} = \{0\} \quad (21)$$

Eq. (21)이 비자명해를 가지기 위해서는 $[K]$ 의 행렬식이 0이 되어야 한다. 따라서, 이 조건을 만족하는 주파수 ω 가 이 시스템의 고유주파수가 되고, 그 때의 주파수를 위 식에 대입하여 계산된 계수 A_i 의 값을 변위장에 대입하면 그 고유주파수에 대한 고유모드를 구할 수 있다. 또한 계산된 반경-방향에 대한 가속도 $\ddot{w}(z, t)$ 를 계산한 후 Eq. (7)에 대입하면 그 고유주파수에 유체에 의해 측벽에 작용하는 동압을 구할 수 있다.

5. 해석 결과

이 논문에서 해석대상으로 한 액체저장탱크는 내부에 유체를 담고 있고 균일한 두께를 가진 원통형 탱크이다. 물성데이터(material data) 및 탱크의 형상(geometry data)에 대한 정보는 아래의 Table 1과 Table 2에 제시하였다. 탱크의 동적 고유특성에 대한 변수로써 탱크의 높이 대 탱크의 지름($L/D=2, 1, 0.5$)과 유체의 높이에 대한 탱크의 높이($H/L=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$)를 매개변수로 하여 각각의 모델에 대해 저차의 3개 모드에 대한 고유주파수, 고유모드, 그리고 압력분포를 비교하였다.

3가지 탱크모델은 Table 2에서와 같이 지름은 10m로 고정되어 있고 높이가 40m, 20m, 10m인 형태이다.

각 탱크형태에 대한 고유주파수는 탱크높이가 큰 경우 낮은 고유주파수 특성을 보이면서 높이가 낮아질수록 높은 고유주파수 특성을 가지는 것을 Table 3, Table 4, Table 5의 결과로부터 알 수 있다. 그리고 유체의 높이가 높아짐에 따라 유체에 의해서 발생하는 압력을 영향을 많이 받아 고유주

Table 1 Material data

Material Data		
Structure	Density, ρ_s (kg/m^3)	7850
	Young's Modulus, E (KPa)	21.5e7
	Possion's ratio, ν	0.3
Fluid	Density, ρ_f (kg/m^3)	1000

Table 2 Geometry data

Geometry Data (m)			
Tank Type	L/D=2	L/D=1	L/D=0.5
Diameter of Tank, D	20.0	20.0	20.0
Height of Tank, L	40.0	20.0	10.0
Height of Fluid, H	variable	variable	variable
Wall thickness	0.0283	0.0283	0.0283

파수가 낮아지는 것을 볼 수 있다.

Fig. 3은 각 탱크모델에 대해 유체 높이에 따른 기본 주파수(fundamental frequency)를 나타낸 그래프인데 살펴보면 유체의 높이가 높아짐에 따라 기본 주파수가 유체의 높이가 커질수록 주파수가 줄어드는 것을 볼 수 있다.

3가지 탱크모델에 대한 1차 모드의 원주-방향 변위, 축-방향 변위, 그리고 유체압력분포를 살펴보면 유체의 높이에 따라 변위 및 압력분포가 영향을 많이 받는 것을 볼 수 있다.

Table 3 Natural frequencies when L/D is 2

Tank Type	Mode	Natural Frequency (Hz)				
		Relative Fill-Height (H/L)				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
L/D = 2	1	14.84	8.25	5.63	4.26	3.42
	2	28.10	18.95	14.39	11.52	9.57
	3	32.65	25.21	20.05	16.73	14.34

Table 4 Natural frequencies when L/D is 1

Tank Type	Mode	Natural Frequency (Hz)				
		Relative Fill-Height (H/L)				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
L/D = 1	1	23.96	14.84	10.67	8.25	6.70
	2	40.83	28.25	22.58	18.99	16.40
	3	62.53	35.89	29.33	25.25	22.33

Table 4 Natural frequencies when L/D is 0.5

Tank Type	Mode	Natural Frequency (Hz)				
		Relative Fill-Height (H/L)				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
L/D = 1	1	37.54	23.96	18.31	14.84	12.44
	2	67.40	40.86	32.84	28.26	25.01
	3	83.43	53.04	41.44	35.90	32.11

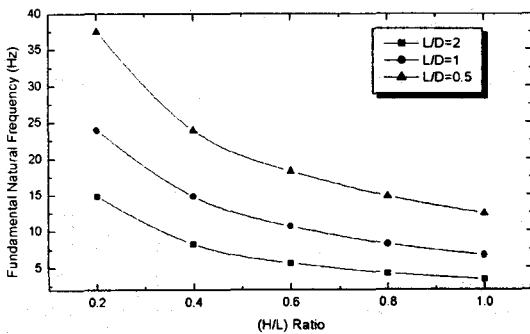


Fig. 3. 1st natural frequency variations to H/L

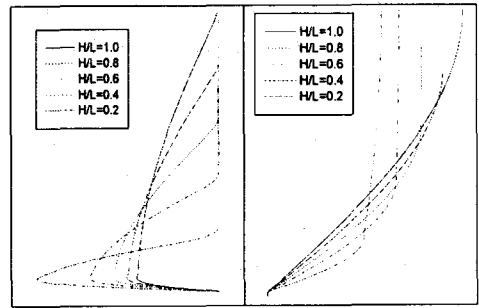


Fig. 4. 1st circumferential and axial eigen-mode (L/D = 2)

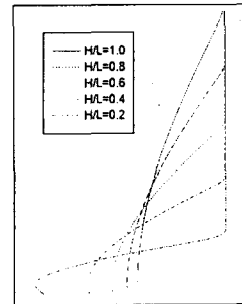


Fig. 5. Liquid-dynamic-pressure distribution of 1st mode (L/D = 2)

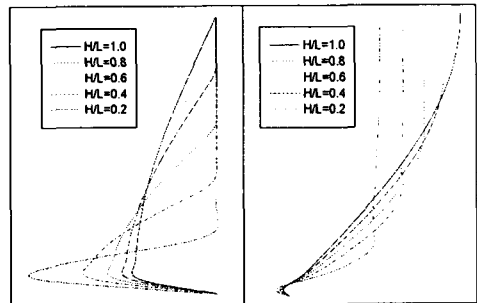


Fig. 6. 1st circumferential and axial eigen-mode (L/D = 1)

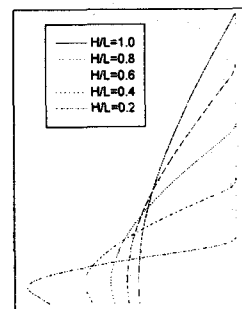


Fig. 7. Liquid-dynamic-pressure distribution of 1st mode (L/D = 1)

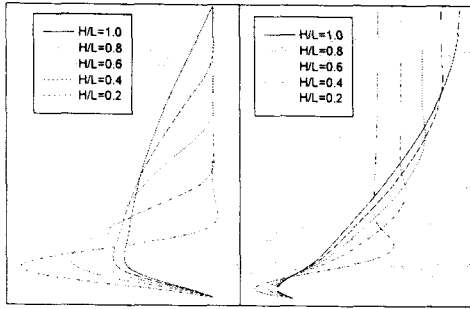


Fig 8. 1st circumferential and axial eigen-mode ($L/D = 0.5$)

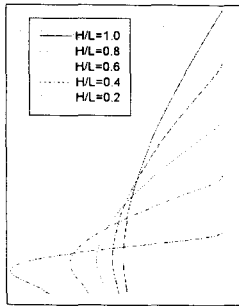


Fig 9. Liquid-dynamic-pressure distribution of 1st mode ($L/D = 0.5$)

또한 탱크모델에 따라서는 원주-방향 변위와 압력분포는 거의 비슷한 특성을 보여 서로 영향을 많이 받는 것을 확인할 수 있다. 반면에 축-방향 변위인 경우 유체의 높이 따른 변위 특성도 가지면 탱크의 높이가 낮아 질수록 탱크의 아래부분에서의 변위와 유체의 높이 부분에서 변위가 한번 반전되는 형상을 볼 수가 있다.

5. 결론

본 연구에서는 원통형 액체저장탱크의 고유진동 특성을 이론적으로 해석하기 위한 기초 이론을 제시하였다. 해석모델로 높이가 다른 3가지 탱크에 대해 저차 3개의 모드에 대해 고유주파수, 고유모드, 그리고 압력분포를 탱크 상대 높이와 액체 채움 상대높이에 따라 parametric하게 분석하였다.

본 연구에서 제시한 이론적 해석기법은 다양한 외부 동하중 입력에 따른 액체저장탱크의 동특성 분석 및 안전설계를 위한 기초연구에 적용될 수 있다.

후기

본 연구는 국방과학연구소 2000년도 착수 기초 연구(과제번호: ADD-00-5-6)와 한국과학재단 핵심 전문연구(981-1002-016-2)의 지원으로 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) J. R. Cho, J. K. Lee, J. M. Song, S. H. Park and J. N. Lee, "Free Vibration Analysis of Above-Ground LNG-Storage Tanks by the Finite Element Method", KSME International (in review).
- (2) J. R. Cho, J. M. Song and J. K. Lee, 1999, "Numerical Analysis of Horizontal Seismic Response of Liquid-Storage Tanks." Proceedings of 1st. International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics, pp. 1653-1658.
- (3) M. A. Haroun and M. A. Tayel, 1983, "Vibration studies and Tests of Liquid Storage Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, pp. 329-345.
- (4) M. A. Hroun and M. A. Tayel, 1985, "Axisymmetrical Vibrations of Tanks-Numerical", ASCE J. Engineering Mechanics, 111(3), pp. 329-345.
- (5) V. V. Novozhilov, 1964, Thin Shell Theory, Noordhoof Ltd., Groningen, The Netherlands.
- (6) F. B. Hilderbrand, 1976, Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall, New Jersey.
- (7) H. J.-P. Morand and R. Ohayon, 1995, Fluid Structure Interaction. Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons.
- (8) A. S. Veletsos, Y. Tang and H. T. Tang, 1992, "Dynamic Response of Flexibly Supported Liquid-Storage Tanks, ASCE J. Structural Engineering, 118(1), pp 264-283.