대한기계학회 2000년도 춘계학술대회논문집 A pp. 585~590 KSME 00S100

비선형 진동자의 강제 진동에 관한 해석

강상우*. 이중엽**. 전진석***. 곽호영****

Analysis on the Forced Oscillation of Nonlinear Oscillators

S. Karng*, J. Lee**, J. Jeon***, H. Kwak****

Key Words : artificial resonance(인조공명), bubble(기포), Duffing oscillator(Duffing 진동자)

Abstract

Problems involved in the numerical analysis on the forced oscillation of nonlinear oscillators such a microbubble oscillation under ultrasound and Duffing oscillator were discussed. One of the problems is proper choice of the time scale of the driving force, which is related to the numerical artifacts due to the mismatch between the natural frequency of an oscillator(or bubble) and the characteristic frequency of the applied force. Such problem may occur in a nonlinear oscillator whose behavior is crucially dependent on the frequency of the applied force. The artificial resonance problem during the numerical evaluation of such nonlinear systems was also discussed.

1. 서 론

일반적으로 비선형 시스템을 해석하는 것은 용이하지 않다. 왜냐하면 비선형 시스템은 그 응답 특성이 그 시스템을 지배하는 물리적 변수가 조금만 변하여도 판이하게 다를 수 있기 때문이다. 예를 들면 전형적인 비선형 방정식인 기포의 거동을 다루는 Rayleigh-Plesset 방정식[1]이나 Duffing 진동자[2]는 기포나 조화진동자의 고유진동수에 비하여 훨씬 작은 주파수의 외부 힘으로 강제 진동을 일으킬 경우 주파수가 조금만 달라져도 기포나 조화진동자의 거동은 상당히 달라지게 된다[3].

위에 기술한 바와 같이 외부 힘의 진동수에 민감하게 변화하는 기포나 비선형 진동자인 Duffing 진동자를 해석할 경우, 대부분 적절한 무차원 변수를 도입하여 지배방정식을 무차원화한 후 수치적분을 수행하는 것이 일반적이다. 이 경우 기포나 비선형 진동자의 특성시간 t_0에 의하여 지배방정식을 무차원하게 되며, 또한 이 진동자들을 가진시키는 외부 힘에 관계되는 시간 변수도 t_0에 의하여 무차원화될 때 가진주파수가 달라져 기포나 조화진동자의 인조공명이 일어나게 되는 현상을 발견할 수 있다.

본 연구에서는 전형적인 비선형을 나타내는 Rayleigh-Plesset 방정식이나 Duffing 방정식을 수치적으로 해석할 경우 일어날 수 있는 인조공명 현상과 이의 보완점에 대하여 다루고자 한다.

* 한국과학기술연구원
** 중앙대학교 대학원
*** 가스공사
**** 중앙대학교 공대

2. Rayleigh-Plesset 방정식 및 Duffing 진동자

기포의 거동을 나타내는 다음과 같은 Rayleigh-Plesset 방정식(1)은 전형적인 기포반경 R_b에 대한 비선형 방정식이다.

$$\rho_x\left(R_b\ddot{R}_b+\frac{3}{2}\dot{R}_b^2\right)=\left(1+\frac{R}{C_x}\frac{d}{dt}\right)\left[P_b-P_x-P_s(t)\right]-4\mu_l\frac{\dot{R}}{R}-\frac{2\sigma}{R} \quad (1)$$

윗 식에서 C_x는 매질의 음속, ρ_x는 매질의 밀도, σ와 μ는 각각 매질의 표면장력 및 동점성 계수

이다. 기포를 가진시키는 외부력은 다음과 같이 sine 함수로 나타낼 수 있다.

$$P_A(t) = -P_A \sin \omega t \tag{2}$$

단, $\omega = 2\pi f$ 이고 f 는 가진력의 주파수이다. 기포내 가스의 압력 P_b 는 다음과 같이 등온과정을 가정하여 구할 수 있다[4].

$$P_b = \left(P_\infty + \frac{2\sigma}{R_b}\right)\left(\frac{R_0^3 - h^3}{R_b^3 - h^3}\right) \tag{3}$$

단, $h = R_0/8.5$ 로서 공기에 대한 van der Waals 분자체적을 나타내는 함수이며 R_0 는 기포의 평형반경이다. 물론 식(3)과 이상기체식으로는 기포가 수축할 경우의 기포내 가스의 온도를 적절히 나타낼 수는 없으므로, 이 때 기포내 가스의 온도 T_b 는 단열과정을 나타내는 다음 식에 의하여 구할 수 있다[4].

$$\frac{T_b}{T_\infty} = \left(\frac{R_0^3 - h^3}{R_b^3 - h^3}\right)^{\gamma - 1} \tag{4}$$

단, T_∞ 는 매질의 온도이며 γ 는 가스의 비열비이다.

이제 Rayleigh-Plesset 식을 무차원시켜 보자. 무차원화하기 위한 물리 변수는 기포의 반경은 R_0, 기포내 압력과 온도는 각각 P_∞ 와 T_∞ 로 할 수 있고 속도, 시간, 동점성계수나 표면장력 등의 물리적 변수들은 Rayleigh-Plesset 식을 무차원화한 후에도 원식과 똑같은 형태를 유지하는 조건으로 다음과 같이 취할 수 있다.

속도 : $u_0 = \sqrt{P_\infty / \rho_\infty}$ (5-a)

시간 : $t_0 = R_0 / u_0$ (5-b)

동점성계수 : $\mu_0 = P_\infty R_0 / u_0$ (5-c)

표면 장력 : $\sigma_0 = P_\infty R_0$ (5-d)

위에 기술한 무차원 변수를 이용하여 Rayleigh-Plesset 식을 무차원화하면 다음과 같이 된다.

$$\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = \left(1 + \frac{R}{C_x}\frac{d}{dt}\right) \times \left\{P_b - 1 + P_A \cos\left[2\pi(ff_0t_0)t\right]\right\} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} \tag{6}$$

식 (6)에서 f_0 는 가진력의 진동 특성을 나타내는 특성 주파수이다. 식 (6)에서 볼 수 있는 바와 같이 지배방정식을 식 (5)에 주어져 있는 변수를 이용 무차원화할 경우, 가진주파수는 ff_0t_0 로 되어 $f_0t_0 \neq 1$ 일 경우 가진주파수는 변하게 되어 기포의 거동이 원래의 가진주파수 f 의 경우와는 전혀 다른 결과가 나타날 것이 예상된다. 또한 $f_0t_0 = 1$ 로 취할 경우에는 기포의 고유 진동수인 $1/t_0$ 와 가진주파수가 같게 되어 공진현상이 일어나게 된다.

이렇듯 비선형 시스템이 외부 힘에 의하여 가진될 경우 이 시스템을 수치적으로 다루는데 있어서 가진주파수의 변조가 일어나 인조공진이 일어날 수 있는 바, 이를 피하기 위하여 비선형 방정식은 그 시스템의 특성 시간인 t_0 로, 가진주파수는 그 주파수의 특성 시간인 $1/f_0$ 로 무차원화하여 수치적분을 하면 된다. 이렇게 할 경우 기포(또는 진동자)는 외부 힘이 작용한 후 $\tau = 1/f_0 - t_0$ 만큼 시간이 지연된 후에 그 힘을 받게 됨을 의미하며 기포의 거동을 지배하는 Rayleigh-Plesset 방정식은 t_0 대신 $(t_0+\tau)$ 의 시간으로 무차원한 결과와 같게 된다. 하지만 문제는 어느 경우가 실제 시스템을 표현하느냐는 것이다. 이것은 실험결과와 비교에 의해서만 결정할 수 있는 문제이다.

이제 비선형 진동자에 대하여 고려해 보자. 비선형 방정식인 Duffing 진동자에 관한 식은 다음과 같은 형태로 기술 할 수 있다.

$$m\ddot{x} + kx - Ax^3 = F_0 \cos \omega t \tag{7}$$

이 경우 조화진동자의 고유진동수의 역수 $1/\omega_0$ (단, $\omega_0^2 = k/m$)를 비선형 진동자의 특성시간 t_0 로 취하게 되면 식 (7)은 다음과 같이 무차원식으로 쓸 수 있다.

$$\ddot{x} + x - \frac{1}{6}x^3 = \cos\left[(\omega\Omega_0 t_0)t\right] \tag{8}$$

윗식을 유도하는데 있어서 $6A = \omega_0^2/x_0^2$, $F_0/\omega_0^2 x_0$

는 1로 취하였다. 단, x_0 진동자의 특성 변위를 나타내는 척도이다. 식 (8)에서 볼 수 있는 바와 같이 가진력의 특성주파수 Ω_0를 어떻게 취하느냐에 따라 가진주파수는 변조될 수도 있고, $\Omega_0 t_0 = 1$인 경우에는 가진력의 특성주파수가 비선형 진동자의 특성 주파수와 같게 되어 인조공진이 일어날 수 있음은 Rayleigh-Plesset 방정식의 경우와 같음을 알 수 있다. 물론 식 (7)에서 x^3항이 없는 선형 조화진동자의 경우는 $\Omega_0 t_0 = 1$이 되게 취하여도 위에 기술한 문제는 일어나지 않는다.

3. Keller-Miksis 방정식

기포벽의 속도가 매질의 음속에 가깝게까지 변할 경우에는 Rayleigh-Plesset 방정식보다는 매질의 압축성을 고려한 아래의 Keller-Miksis 방정식[5]을 사용하는 것이 좋다.

$$\left(1-\frac{U_b}{C_B}\right)R_b\frac{dU_b}{dt}+\frac{3}{2}U_b^2\left(1-\frac{U_b}{3C_B}\right) = \frac{1}{\rho_\infty}\left(1+\frac{U_b}{C_B}+\frac{R_b}{C_B}\frac{d}{dt}\right)\left[P_B-P_s\left(t+\frac{R_b}{U_B}\right)-P_\infty\right] \tag{9}$$

여기서, R_b는 기포의 반경, U_b는 기포벽의 순간속도, C_B는 액체의 음속, ρ_∞는 액체의 밀도를 의미하며 기포 외측의 액체 압력은 식 (10)과 같은 관계를 갖는다.

$$P_B = P_b(t)-\frac{2\sigma}{R_b}-\frac{4\mu U_b}{R_b} \tag{10}$$

기포내 가스에 대한 밀도, 압력 및 온도 분포는 기포내 가스에 대한 Navier-Stokes 식을 풀면 해결할 수 있다. 기포내 가스에 대한 질량 및 운동량 보존식은 구대칭인 경우에 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_g u_g r^2\right)=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g u_g\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_g u_g^2 r^2\right)+\frac{\partial P_b}{\partial r}=0 \tag{12}$$

여기서, r은 기포중심으로부터의 거리, ρ_g 및 u_g는 가스의 밀도 및 속도를 나타낸 것이다. 식 (1)과 식 (2)를 만족하는 기포내 가스의 밀도 분포, 속도 분포 및 압력분포는 Kwak 과 Yang[6]에 의한 해석 해에 의하면 다음과 같다.

$$\rho_g = \rho_o + \rho_r \tag{13-a}$$

$$u_g = \frac{\dot{R}_b}{R_b}r \tag{13-b}$$

$$P_b = P_{bo}-\frac{1}{2}\left(\rho_o+\frac{1}{2}\rho_r\right)\frac{\ddot{R}_b}{R_b}r^2 \tag{13-c}$$

여기서, ρ_0와 ρ_r은 각각 기포중심의 밀도와 기포 반경방향의 밀도를 의미하며, $\rho_o R_b^3 =$ 일정, $\rho_r = ar^2/R_b^5$으로 주어진다. 단, a는 상수이다. 식 (13)에 주어진 밀도, 속도, 압력 분포는 가스에 대한 운동에너지 방정식을 만족하므로 다음에 주어진 내부에너지 방정식만 풀게 되면 온도 분포를 구할 수 있다.

$$\rho_g C_{v,b}\frac{DT_b}{Dt} = -\frac{P_b}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u_g\right)-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r\right) \tag{14}$$

식 (14)의 해는 다음과 같이 기포거동에 의한 즉, 기포 반경의 변화에 따른 내부의 온도 변화 $T_b(r)$과 기포벽의 가속도에 의한 온도변화 $T_b'(r)$로 다음과 같이 나타낼 수 있다[7, 8].

$$T(r) = T_b(r)+T_b'(r) \tag{15}$$

$T_b(r)$과 $T_b'(r)$은 각각 식(16)과 (17)에 주어져 있다[7, 8].

$$T_b(r) = \frac{B}{A}\left[-1+\sqrt{\left(1+\frac{A}{B}T_{bo}\right)^2-2\eta\left(\frac{A}{B}\right)\left(T_{bo}-T_\infty\right)\left(\frac{r}{R_b}\right)^2}\right] \tag{16}$$

$$T_b'(r) = -\frac{1}{40(r-1)k_g'}\left(\rho_o+\frac{5}{21}\rho_r\right)\left[(3r-2)\frac{\dot{R}_b\ddot{R}_b}{R_b^2}+\frac{\dddot{R}_b}{R_b}\right] + \frac{1}{20(r-1)}\left[(3r-2)\dot{R}_b\ddot{R}_b R_b+\dddot{R}_b R_b^2\right] \times\left[\frac{\delta'}{k_l}\left(\rho_0+\frac{5}{14}\rho_{r=R_b}\right)+\frac{R_b}{2k_g'}\left(\rho_0+\frac{5}{14}\rho_{r=R_b}\right)\right] \tag{17}$$

물론 Keller-Miksis 식을 무차원화시켜 수치적으로

적분할 경우에도 Rayleigh-Plesset 방정식이나 Duffing 진동자에 대한 지배방정식을 다룰 때와 마찬가지로 기포의 고유진동수와 가진력의 특성주파수를 어떻게 취하느냐에 따라 주파수 변조와 이에 따른 인조공진의 문제가 나타나게 된다.

4. 계산결과 및 고찰

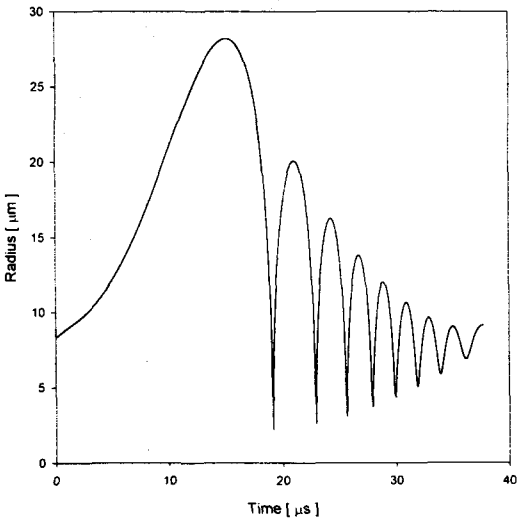

Fig. 1 Theoretical radius-time curve for air bubble of R_0=8.5 ㎛ at P_A=1.075 atm and f=26.5 kHz by KMNS with two time scales (From reference 6)

Fig. 1 에는 평형반경 R_0=8.5 ㎛인 미소 기포가 온도 10 ℃, 압력 1 기압 상태인 물속에서 가진 압력 1.078 기압, 가진 주파수가 26.5 kHz 인 초음파장에서 진동할 경우, 한 주기에 대한 기포의 거동이 시간에 따라 나타나 있다. 이 결과는 식 (9), (13), (16)에 의하여 계산된 결과이며, 이 경우 기포의 고유진동 주파수는 식(5-b)에 의하여 대략 1.176 MHz 이며, 가진력의 특성 주파수는 1 MHz 로 선택하여 계산하였는 바, 가진력과 기포거동과의 지연 시간, $\tau = 1/f_o - t_0$ 는 대략 0.15 ㎲ 이다. Table 1 에서 확인할 수 있는 바와 같이 실험결과와 Fig. 1 에 나타난 계산결과는 기포의 주 거동시간(기포가 평형반경에서 출발하여 1 차 수축시까지의 시간)은 물론, 1 차 수축 후 되튐(bounce) 횟수라든가, 각 되튐시 기포의 최대 반경과 되튐의 주기는 계산 결과와 광산란 실험으로 측정 결과가 상당히 잘 맞음을 알 수 있다[6]. 하지만 기포의 고유진동수와 가진력의 특성 주파수를 같게 한 경우 Fig. 1 과 똑같은 조건에서 Rayleigh-Plesset 방정식을 이용하여 계산한 결과는 Fig. 2 에서 볼 수 있는 바와 같이 주 거동시간은 실험결과와 2 ㎲ 정도 짧음은 물론, 되튐 횟수가 실험결과에서의 7 회와 다른 10 회로 나타남을 알 수 있다. 또한, 1 차 되튐시 기포반경의 최대값도 실험결과와 비교할 때 훨씬 작음을 알 수 있다.

Table 1. Calculated and measured maximum bubble size and the corresponding period of bouncing motion after the first bubble collapse for air bubble of R_0 = 8.5 ㎛ at P_A = 1.075 atm and f = 26.5 kHz (from reference 6)

Bouncing number	Maximum bubble size (㎛)		Corresponding period (㎲)	
	Measured value	Calculated value	Measured Value	Calculated value
1	19.9	20	3.56	3.62
2	15.6	16.2	2.43	2.76
3	13	13.6	2.24	2.24
4	11.1	12.1	2.06	2.07
5	10.4	10.5	1.87	1.90
6	9.7	9.5	1.87	1.82

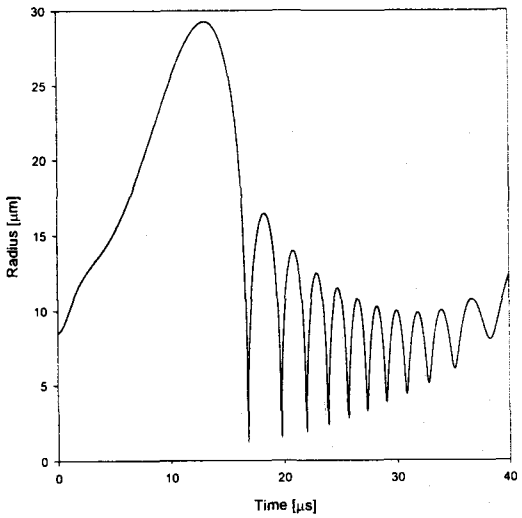

Fig. 2 Theoretical radius-time curve for case shown in Fig. 1 by RP with reduced frequency.

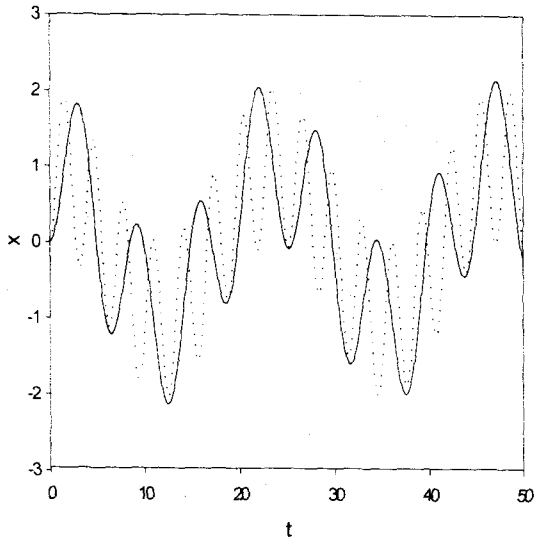

Fig. 3 Time dependent amplitude of a harmonic oscillator of natural frequency of 2, driven by frequency of ω =0.265with two time scales (—) and with reduced frequency (---).

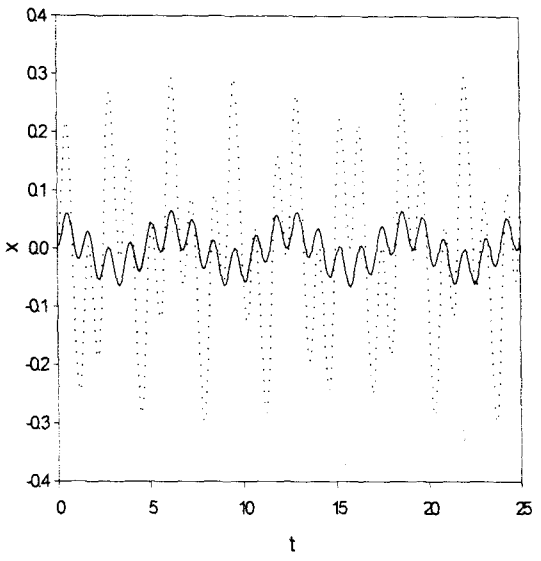

Fig. 4 Time dependent amplitude of Duffing oscillator of natural frequency of 2, driven by frequency of ω =5.5707 with two time scales (—) and with reduced frequency (---).

이제 이런 문제를 선형 및 비선형 진동자에 적용해 보자. Fig. 3 에는 식 (7)에 x^3 항이 없는 선형 진동자의 경우 진동자의 고유진동수와 가진력의 특성 진동수를 달리 취할 경우(실선)와 같게 취했을 경우(점선), 시간에 따른 진동자의 진폭 변화가 나타나 있다. 두 경우를 비교해 볼 때 주기는 달라도 진폭의 변화는 두 경우 거의 비슷하게 변함을 알 수 있다. 즉, 진동자의 거동 자체는 거시적으로 같음을 알 수 있다. 그러나 Fig. 4 에 나타나 있는 바와 같이 비선형 진동자의 경우는 진동자의 고유진동수와 가진력의 특성 진동수를 달리 취할 경우(실선)와 같게 취했을 경우(점선)의 결과는 선형 진동자와는 달리 주기는 같지만 진동자의 진폭은 크게는 4 배까지 차이가 남을 알 수 있어 명확히 인조공진이 일어남을 알 수 있다. 이러한 것은 이론적으로 확인할 수 있는 성질이 아니고 실험적으로 확인할 수 밖에 없다.

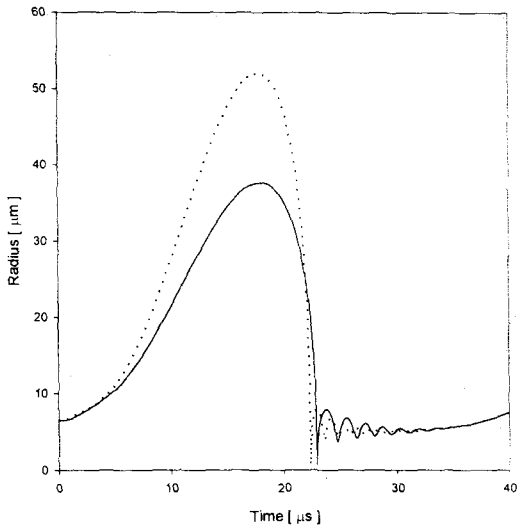

Fig. 5 Theoretical radius-time curve for air bubble of R_0 =6.5 ㎛ at P_A =1.35 atm and f =26.5 kHz by KMNS with reduced frequency (---) two time scales (—)

비선형 진동자의 거동을 수치적으로 적분할 경우에 일어나는 인조공진 현상은 물론, 기포거동을 다루는 방정식을 다룰 때에도 일어난다. Fig. 5 에는 초기반경 R_0 =6.5 ㎛의 기포를 가진 압력 1.35 기압, 가진 주파수 26.5 kHz 의 초음파로 가진하였을 경우, 시간에 따른 기포의 반경에 대한 계산결과가 나타나 있다. 이 계산의 수행에는 식 (9), (13), (15), (16) 및 (17)을 이용하였다. Fig. 5 에서도 알 수 있는 바와 같이 기포거동의 특성시간을 식 (5-b)에 주어져 있는 t_0 로 하고 가진주파수의 특성시간을 $1/f_0 = 10^{-6}$ s 로 취했을 경우에(실선) 기포의 평형 반경과 최대 반경의 비는 5.8 정도에 불과

하지만, 기포거동의 특성시간과 가진주파수의 특성시간을 같게 하였을 경우 즉, $f_0 \equiv 1/t_0$ 로 취하였을 경우에는(점선) 가진주파수의 감소를 가져와 기포의 평형 반경과 최대 반경의 비가 8.0 에 다다르는 인조공진 현상이 일어남을 알 수 있다. 그러면 이러한 인조공진 현상은 수치해석에 의해 일어나는 것인가 아니면 실제로 일어나는 것인가? 이 질문에 대한 해답의 결과는 앞에 언급한 바와 같이 실험에 의존하는 수 밖에 없다. 실험결과에 의하면 기포 수축시 기포 벽의 속도는 400 m/s 이하인 것으로 판명되었다. 하지만 가진주파수의 특성시간을 기포거동 시간과 같이 취했을 경우에는 1,440 m/s 로 매질의 음속에 접근하는 것을 볼 때 이렇게 기포의 최대반경이 크게 나오는 것은 인조공명 현상에 의한 것이라 해석할 수 있다. 이와 같은 인조공진 현상은 가진주파수의 특성시간을 기포의 거동시간보다 더 짧게 취했을 경우에는 거의 믿지 못할 결과가 나옴을 Fig. 6 에 주어진 결과로 미루어 확인할 수 있다. 즉, 평형 반경 4.5 ㎛ 정도의 기포를 가진 압력 1.35 기압, 가진주파수 26.5 kHz 의 초음파로 가진했을 경우 기포 거동의 특성시간은 4.5 ㎲정도이다. 이 경우 가진주파수의 특성시간을 0.1 ㎲로 취하여 계산을 수행했을 경우 평형 반경과 최대반경의 비는 42 나 되며 기포 수축시 기포 벽의 속도는 59,000 m/s 이 넘는다. 하지만 가진 주파수의 특성 시간을 기포거동의 특성시간보다 너무 크게 잡을 경우(예를 들면 10^{-5} s) 기포는 초음파의 가진에 잘 응답하지 않는 결과가 나온다

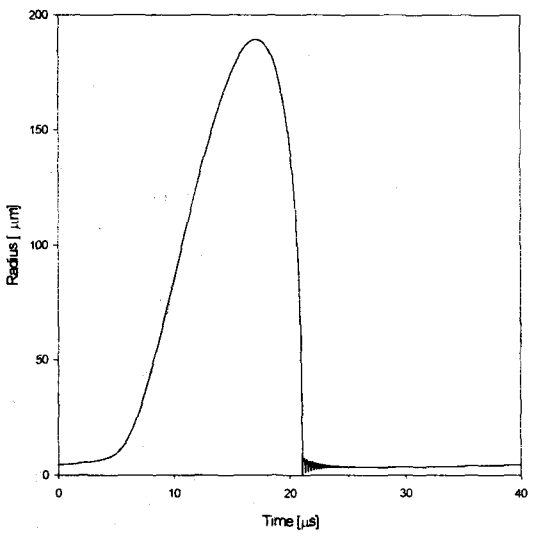

Fig. 6 Theoretical radius-time curve for air bubble of R_0=4.5 ㎛ at P_A=1.35 atm and f=26.5 kHz by RP with the characteristic time scale of driving force, 10^{-7}s.

5. 결 론

전형적으로 비선형성을 지닌 기포거동을 기술할 수 있는 Rayleigh-Plesset 식, Keller-Miksis 식이나 비선형 조화 진동자를 기술할 수 있는 Duffing 식을 수치적분을 수행하는 과정에서 일어날 수 있는 인조공진 현상에 대하여 논하였다. 이 연구에서 기포나 조화 진동자의 거동을 기술하는 특성시간 t_0 와 가진력의 주파수를 나타내는 특성시간 $1/f_0$ 에는 지연시간, $\tau = 1/f_0 - t_0$ 를 두면 인조공진 현상을 피할 수 있다는 것을 알았다. 또한, 가진주파수에 따라 그 거동이 크게 변화하는 비선형식을 적분하는데 가장 중요한 점은 가진력의 특성주파수 f_0 를 적절히 선택하는 것임을 알았다

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정목적 연구비 지원(과제번호 1999-1-304-002-5)으로 행해진 연구임.

참고문헌

(1) R. LÖfstedt, B. P. Barber and S. J. Putterman. "Toward a hydrodynamics theory of sonoluminescence." Phys. Fluids A., vol. 5, pp. 2911-2928, 1993.

(2) H. T. Davis , Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover, New York, 1962.

(3) S. Hilgenfeldt and D. Lohse, "Predictions for upscaling sonoluminescence," Phys. Rev. Lett., vol. 82, pp. 1036-1039, 1999.

(4) S. Hilgenfeldt, S. Grossmann and D. Lohse, "Sonoluminescence light emission," Phys. Fluids., vol. 11, pp. 1318-1330, 1999.

(5) J. B. Keller and M. Miksis, "Bubble oscillations of large amplitude," J. Acoust, Soc. Am. 68, pp. 628-633, 1980.

(6) H. Kwak and H. Yang, "Anaspect of sonoluminescence from hydrodynamic theory," J. Phys. Soc. Jap., vol. 64, pp. 1980-1992, 1995.

(7) H. Kwak and J. Na, "Hydrodynamic solutions for a sonoluminescing gas bubble," Phys. Rev. Lett., vol. 77, pp. 4454-4457, 1996.

(8) H. Kwak and J. Na, "Physical processes for single bubble sonoluminescence," J. Phys. Soc. Jap., Vol. 66, pp. 3074-3083, 1997.