

축방향으로 주행하는 현의 횡진동 제어

류두현* · 박영필**

Transverse Vibration Control of an Axially Moving String

Doo-Hyun Ryu · Young-Pil Park

Key Words : Axially Moving String(축방향 주행 현), Boundary Control(경계제어), Sliding Mode Control(슬라이딩 모드제어), Energy Flux(에너지 플럭스)

Abstract

In this study, the time varying boundary control using the right boundary transverse motion on the basis of the energy flux between the moving string and the boundaries is suggested to stabilize the transverse vibration of an axially moving string. The effectiveness of the active boundary control is showed through experimental results. Sliding mode control is adopted in order to achieve velocity tracking control of the time varying right boundary to dissipate vibration energy of the string effectively. For the unmoving and moving string at various velocity under various tension, the performance of the transverse vibration control using the time varying right boundary control with the suggested control scheme is experimentally demonstrated.

1. 서론

많은 기계기구들에서 가늘고 이동·주행하는 연속체 요소를 동력, 재료, 또는 정보의 전달 수단으로 사용하기도 하고, 일종의 교통수단에 이용하기도 하거나, 생산가공에 이용하기도 하고 있다. 이 중에서도 축방향으로 주행하는 현의 모델은 역학계에서 많이 사용되는 것 중의 하나이다.

축방향 주행 현의 메카니즘을 이용한 기계요소들은 많은 장점과 다양한 응용성에도 불구하고, 운동중에 발생하는 진동과 소음이 그 많은 실제적 적용에 제한 요소가 되고 있으며, 특히 경량화 및 고정밀도를 요구하면서 동시에 연속체가 고속 주행하여야 하는 경우는 더욱 그러하다.

이러한 메카니즘을 사용하는 기계계의 성능향

상을 위해서는 주행 요소의 진동을 저감시키기 위한 방법의 도입이 필수적인 것으로, 축방향으로 주행하는 현의 동특성 해석과, 안정성 연구, 능동 및 수동적인 현의 횡진동 제어방법의 개발에 관한 연구가 오랜 기간에 걸쳐 최근까지도 활발히 진행되어 오고 있다.

본 연구에서는, 축방향으로 주행하는 현과 그 경계사이에 발생하는 에너지 플럭스를 이용하여, 축방향 주행현의 진동에너지를 감소시킴으로써 계를 안정화할 수 있는 횡진동 경계제어기를 설계한다. 이를 바탕으로, 주행현의 횡진동을 억제하기 위한 실제적인 제어기로서, 슬라이딩 모드 제어를 이용하여 속도추종 제어한 시변 우측경계의 속도를 이용하는 제어전략을 제시한다. 고정 및 주행중인 현에 대한 횡진동 제어 실험을 통하여 제시한 경계제어기의 유효성을 확인한다.

2. 축방향 주행현 횡진동의 경계제어

일정한 거리의 경계사이를 Fig.1(a)에서와 같이

* 회원, 연세대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 연세대학교 기계공학과

축방향으로 주행하는 현의 횡진동을 효과적으로 억제할 수 있는 제어계 구성에 있어서, 시변 우측경계(time varying right boundary)를 이용하여 현의 횡변위 방향으로 우측경계를 운동시켜 현의 횡진동을 흡수·소산시킬 수 있는 경계제어계를 고려하며, 이러한 제어계를 Fig.1(b)에 개략적으로 나타내었다.

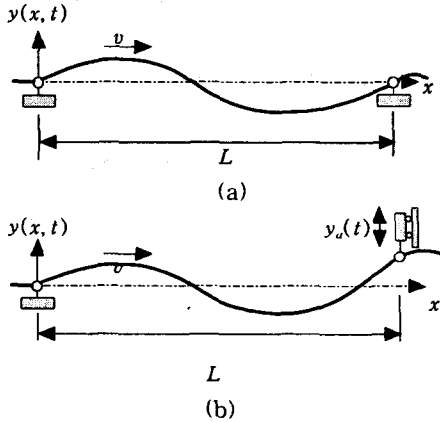


Fig. 1 Schematic illustrating of an axially moving string systems (a)with fixed boundaries and (b)with fixed left boundary and time varying right boundary

축방향으로 주행하는 현의 운동방정식을 해밀턴 원리(Hamilton principle)를 이용하여 구하면 다음의 식(1)과 같다.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

($0 < x < L$)

이때, 계의 초기조건은

$$\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x) \\ \dot{y}(x,0) &= \dot{y}_0(x) \end{aligned} \quad (2)$$

이고, v 는 현의 주행속도, $c = \sqrt{T/\rho A}$ 는 파속도(wave velocity), T 는 장력, ρA 는 현 재질의 단위길이 당 질량이다.

경계사이의 주행현의 기계적 에너지 $E(t)$ 는 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^L \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \\ &+ \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left[v^2 + \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (3)$$

축방향 주행현의 횡진동 제어는 주행현의 횡진동과 관련된 기계에너지를 안정화하도록 함으로써 구현 할 수 있다. 이러한 개념을 바탕으로 현과 경계에서의 에너지 플럭스를 이용하여, 주행

현의 에너지를 감소시켜 결과적으로 주행현의 횡진동을 억제하도록 하기 위한 효과적인 제어법칙으로서의 시변 우측경계의 운동조건을 구한다

연속체인 주행현의 경우, 경계사이의 현을 구성하는 요소들의 집합체는 시간에 따라 변화한다. 그러므로 주행현의 에너지 $E(t)$ 의 시간변화를 $dE(t)/dt$ 를 구하는데 있어서, 개개의 질량에 대해서가 아니라 특정 영역 내부에서의 연속체의 에너지의 시간변화율로 표현해야 할 필요가 있다. Fig.1(b)의 경계 제어계에서 고정된 좌측경계와 시변 우측경계의 위치에 검사면을 갖는 검사체적을 정하여 고려하고, Reynolds의 1차원 수송정리(one-dimensional transport theorem)를 이용하면, 주행현계의 에너지의 시간변화율을 식(4)와 같이 구할 수 있는데, 이는 경계에서의 에너지 플럭스의 항만으로 기술되어지는 식이다.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= -Tv \left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \right)^2 \\ &+ T \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} \left(\frac{\partial y(L,t)}{\partial t} + v \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

양 의 한정인 계의 에너지 $E(t)$ 를 Lyapunov 함수의 후보로 선정하고, Lyapunov 직접법(Lyapunov direct method)을 사용하면 페루프 케환제어기를 안정하게 할 제어법칙의 조건은 식(5)와 같다.

$$\dot{E}(t) \leq 0 \quad (5)$$

축방향으로 주행하는 현의 횡진동을 제어하고자 계의 에너지를 안정화하도록 하는 제어법칙을 식(5)의 조건에서 구할 때, 시변 우측경계에 대한 제어변수를 힘 또는 속도의 물리량으로 정할 수 있다. 본 연구에서는 제어계 구현의 용이성을 고려하여 시변 우측경계의 속도를 제어변수로 정하였으며, 식(4)와 (5)를 이용하여 식(6)과 같은 제어법칙을 구하였다.

$$\dot{y}_{RB}(t) = -k_A^* \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (6)$$

여기서, 안정한 경계제어의 제어 파라미터로서의 k_A^* 는 다음과 같은 범위의 값을 갖는다.

$$k_A^* \geq v \quad (7)$$

한편, 축방향으로 주행하는 현의 횡진동에 관한 운동방정식 (1)의 조화운동의 해는 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 두 개의 독립적인 진행과

(traveling waves)의 선형조합 식으로서 식(8)과 같이 구할 수 있다.

$$y(x, t) = A_f e^{ik_f((c+v)t-x)} + A_b e^{ik_b((c-v)t+x)} \quad (8)$$

여기서, ω 는 파(wave)의 각주파수(angular frequency), k_f 와 k_b 는 각각 현의 좌표방향 및 주행방향(forward)으로 진행되는 파와 그 반대방향(backward)으로 진행되는 파의 독립된 파수(wave number)로서 식(9)와 같고, 그 각각의 파 속도 c_f 와 c_b 는 식(10)에 나타낸 바와 같다.

$$k_f = \frac{\omega}{c+v}, \quad k_b = \frac{\omega}{c-v} \quad (9)$$

$$c_f = c+v, \quad c_b = c-v \quad (10)$$

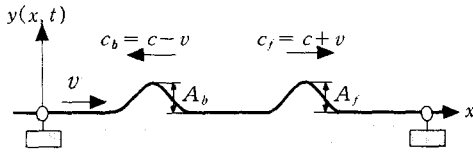


Fig. 2 Traveling waves in axially moving string

현의 주행방향으로 진행되는 입사의 파를 우측 경계로 입사하는 파(incident wave)로 고려하면, A_f 는 우측 경계로 입사하는 파의 진폭, A_b 는 우측 경계로부터 반사된 파(reflected wave)의 진폭으로 고려할 수 있다. 축방향 주행현의 횡방향 조화운동의 해인 식(8)과 우측경계의 속도제어법칙 식(6)을 이용하면, 우측경계에서의 입사파에 대한 반사파의 진폭의 크기의 비를 다음의 식(11)과 같이 구할 수 있다.

$$\left| \frac{A_b}{A_f} \right| = \frac{k_A^* - (c+v)}{k_A^* + (c-v)} \cdot \left(\frac{k_f}{k_b} \right) \quad (11)$$

식(11)로부터, $x=L$ 위치의 우측 경계에서의 입사된 파에 대한 반사파의 진폭비는 우측경계의 속도제어 파라미터 k_A^* 를 이용하여 결정할 수 있다. 진폭비를 영이 되도록 하면, 입사되는 파의 에너지를 완전히 소산시켜버림으로써 주행현의 전체 에너지 감쇠를 최대화할 수 있는데, 이러한 최적의 k_A 는 식(12)와 같이 구할 수 있다.

$$k_A = c+v \quad (12)$$

3. 슬라이딩 모드 경계제어기 설계

본 연구에서는, 축방향으로 주행하는 현의 횡진동 제어기로서, Fig.3에 개략적으로 나타낸 바와 같은 1자유도 시변 우측경계를 이용한 능동 경계제어기를 구성하였으며, 시변우측경계를 속도입력신호에 추종시킬 능동제어기로서 계의 구조적 모델링 오차와 추종 제어성능 등을 고려하여 슬라이딩 모드제어기를 사용하였다.

현의 주행계는, 현을 압착시켜 회전함으로써 주행시키는 2개의 압착 휠(wheel)부로 구성되어 있으며, 좌측 휠부가 고정된 좌측경계, 우측 휠 전단에 위치한 능동 작동기가 주행현의 우측 시변경계이다.

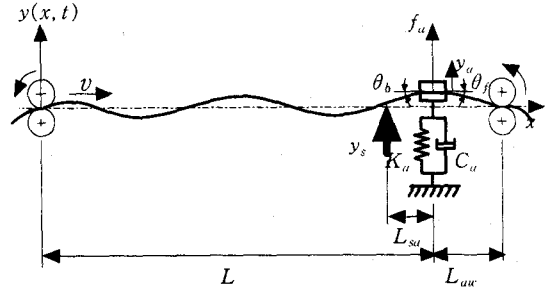


Fig. 3 Schematic of an axially moving string system with an active boundary controller at right end

이때, 주행현과의 상호작용을 고려하여, 1자유도계로 모델링한 시변우측경계의 운동 방정식을 구하면 식(13)과 같다.

$$\ddot{y}_a(t) = f_{dyn} + b \cdot u(t) \quad (13)$$

여기서,

$$f_{dyn} = \frac{C_a}{M_a} \dot{y}_a(t) - \frac{K_a}{M_a} y_a(t) - \frac{1}{M_a} [f_{th}(t) + f_{yf}(t)] \quad (14)$$

$$f_{th}(t) = T \sin(\theta_b) \approx T \frac{y_a(t) - y_s(t)}{L_{sc}} \quad (15)$$

$$f_{yf}(t) = T \sin(\theta_f) \approx T \frac{y_a(t)}{L_{av}} \quad (16)$$

$$f_a(t) = B_a u(t) \quad (17)$$

$$b = \frac{B_a}{M_a} \quad (18)$$

이다.

계의 동력학식 f_{dyn} 의 크기를 정확히 알 수는 없으나, \hat{f}_{dyn} 의 값으로 추정할 수 있으며 f_{dyn} 값의 추정오차의 범위를 식(19)와 같이 가정하면

$$|\hat{f}_{dyn} - f_{dyn}| \leq F_{dyn} \quad (19)$$

파라미터의 측정치의 오차 또는 계의 동작중의 변화 등을 고려하여 그 오차범위함수는 식(20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{dyn} = | \hat{f}_{dyn} - f_{dyn} |_{\max} \\ = | \Delta(\frac{C_a}{M_a})_{\max} \cdot \dot{y}_a(t) | + | \Delta(\frac{K_a}{M_a})_{\max} \cdot y_a(t) | \\ + | \Delta(\frac{1}{M_a})_{\max} [f_{ib}(t) + f_{if}(t)] | \quad (20)$$

시변우측계계의 속도를 외부입력신호에 추종시키기 위해 슬라이딩 모드제어를 적용하고자 다음과 같이 스칼라양 s 를 정의한다.

$$s = \dot{y}_a(t) + 2\lambda \hat{y}_a(t) + \lambda^2 \int_0^t \hat{y}_a(t) dt \quad (21)$$

여기서, $\hat{y}_a(t) = y_a(t) - y_{ad}(t)$ 이고, s 는 추적오차 $\int_0^t \hat{y}_a(t) dt$ 에 대한 안정한 저주파 통과필터의 출력으로서, 슬라이딩 모드 제어는 $\dot{s} = 0$ 이 되도록 하는 것으로서, 대상계가 이러한 슬라이딩 모드가 되도록 근사평형 제어입력 $\hat{u}(t)$ 를 식(22)와 같이 구한다.

$$\hat{u}(t) = -\hat{f}_{dyn} + \dot{y}_{ad}(t) - 2\lambda \hat{y}_a(t) - \lambda^2 \int_0^t \hat{y}_a(t) dt \quad (22)$$

대상계의 동역학 f_{dyn} 의 불확실성에도 불구하고 식(23)의 슬라이딩 조건을 만족시키고,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s| \quad (23)$$

$s = 0$ 인 슬라이딩 면으로 구분되는 양단의 불연속성을 완화하기 위한 스위칭면 부근의 경계층을 고려한 항을 근사평형 제어입력 $\hat{u}(t)$ 에 추가하여 식(24)와 같은 제어입력 $u(t)$ 를 구한다.

$$u(t) = \delta^{-1} \left\{ \hat{u} - k \cdot \text{sat}\left(\frac{s}{\phi}\right) \right\} \quad (24)$$

이때, sat 함수는 식(25)와 같이 정의한다.

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x & : \text{if } |x| \leq 1 \\ \text{sgn}(x) & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

여기서, ϕ 는 제어입력의 불연속성을 완화하기 위한 스위칭면 부근의 경계층의 두께를 나타내며, 슬라이딩 조건을 만족시키는 k 는 식(26)과 같이 결정할 수 있다.

$$k \geq \beta (F_{dyn} + \eta) + |\beta - 1| \cdot |\hat{u}| \quad (26)$$

이때, β 는 제어이득 b 의 측정상의 불확실성에

대한 이득여유(gain margin)이고, η 는 슬라이딩 모드에 이르는 시간관련 상수로서 λ 와 함께 제어기 설계 파라미터이다.

본 연구대상계의 제원은 Table 1에 나타낸 바와 같다. 작동기와 관련한 파라미터에서 M_a 와 K_a 는 $\pm 5\%$, C_a 와 B_a 는 $\pm 10\%$ 의 범위에서 측정오차 또는 동작 중 그 값의 변동이 발생함을 실험을 통하여 확인하였다.

Table 1 Specifications of axially moving string system with right boundary controller

L	1.28	[m]
string diameter	0.5	[mm]
ρA	1.792×10^{-3}	[kg/m]
T	10	[N]
c	74.71	[m/sec]
L_{sa}	1.25	[m]
M_a	29.5×10^{-3}	[kg]
C_a	2.323	[N/m/sec]
K_a	849.78	[N/m]
ζ	0.23	
B_a	1.793	[N/V]

4. 실험결과

축방향으로 주행하는 현의 횡진동 제어 실험을 행하기 위하여 Fig.4에 나타낸 바와 같은 실험장치를 구성하였다.

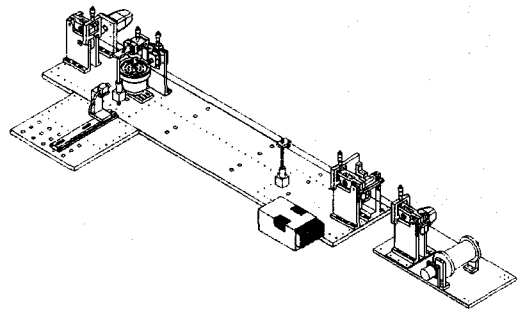


Fig. 4 Configuration of transverse vibration control system of axially moving string

우측경계의 위치와 속도는 레이저 변위측정기 (KEYENCE LC-2100)와 레이저 진동측정기 (Polytec laser doppler vibrometer, OFV-3001, OFV-512)를 이용하여 각각 측정하였다. 고인하여 개발한 광학식 진동현 횡변위 측정센서를 우측경계로부터 L_m 의 거리만큼 전단에 위치시킴으로써, 현의 횡진동과 함께 우측경계로 입사하는 파의 입사각도 θ_b 를 측정할 수 있도록 하였다. 시변 우측경계에 사용한 능동작동기는 VCM 형태의 작동기를 제작하여 사용하였다.

본 연구에서의 제어대상 현의 1차 고유진동수는 주행하지 않을 때를 기준으로, 장력이 5~10N 사이일 때 약 20~30 Hz이다. 처음 2개의 모드만을 제어하고자 할 때, 60 Hz까지의 외부입력신호에 대한 속도추종 제어성능이 확보되어야 한다. 이를 고려하여 제어변수로서 $\lambda=100$, $\eta=20$, $\phi=0.02$ 로 정하였으며, 이들 설계변수를 이용한 우측경계의 속도추종 제어실험의 주파수응답결과와 시뮬레이션 결과를 Fig.5에 나타내었다.

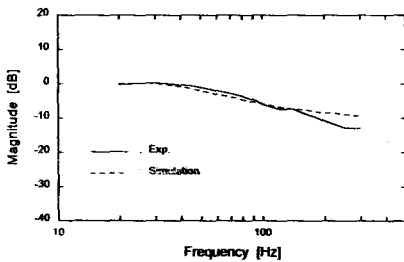
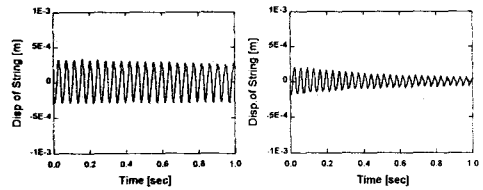


Fig. 5 Closed-loop frequency response of the right boundary with velocity tracking sliding mode control

속도추종되는 우측경계를 이용한 현의 횡진동 경계제어기를 사용하여, 주행하지 않는 현과 주행현에 대한 제어실험을 행하였으며, 각각의 비제어시와 제어시의 실험결과를 Fig.6과 Fig.9, 그리고 Fig.7과 Fig.10에 나타내었다. 본 연구에서 축방향 주행현계에 대해 설계한 경계제어기를 주행하지 않는 현에 적용하는 제어실험은 그 일반성을 유지하는 실험이다. 주행하지 않는 현의 비제어시와 여러 조건에서의 횡진동 제어 결과의 진동 감쇠비를 Fig.8에 비교하여 나타내었다. 주행하지 않는 현에 있어서 장력이 5 N인 경우와 10 N인 경우, OCG/10의 제어이득을 사용하여 제어한 경우 감쇠비는 비제어시에 비해 각각 약 19배, 38배 씩 증가하였다.

감쇠비 측면에서의 횡진동 제어효과는 제어이득이 클수록, 장력이 클수록 현저함을 확인할 수 있다. 현의 장력이 약 5.5 N으로 부가된 상태에서(이때, 주행현의 파동속도 c 는 약 55.4 m/sec이다.), 현의 주행속도를 0.524 m/sec하였을 때의 횡진동 제어 결과, 본 연구에서 제안한 시변 우측경계의 속도제어법이 주행현의 횡진동 제어에 매우 효과적임을 확인할 수 있다.



(a) with fixed boundary (b) with time varying boundary

Fig. 6 Transverse vibration of the unmoving string uncontrolled (tension = 6 N)

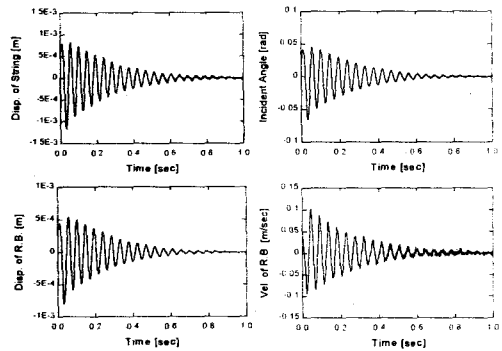


Fig. 7 Result of the right boundary control Experiment for unmoving string (tension = 6 N, $k_A^* = k_A/10$)

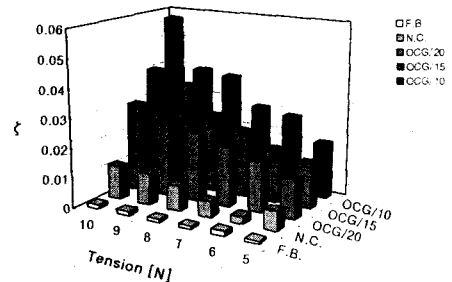
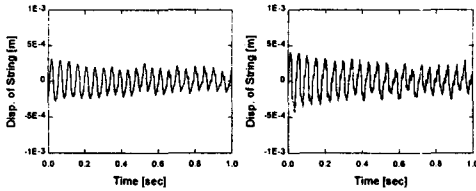


Fig. 8 Comparison of damping ratio of the unmoving string vibration uncontrolled and controlled

(F.B. : fixed boundary, uncontrolled
N.C. : time varying boundary, uncontrolled
OCG : optimal control gain)



(a) 0.262 m/sec (b) 0.524 m/sec

Fig. 9 Transverse vibration of the moving string uncontrolled (tension = 5.5 N)

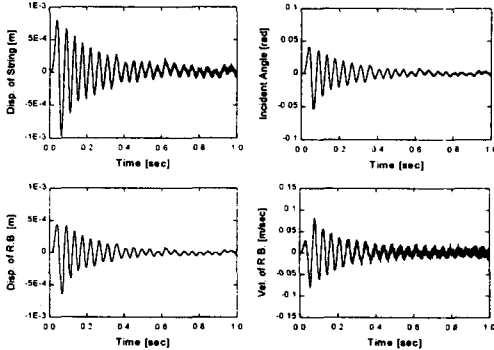


Fig. 10 Result of the right boundary control experiment for moving string (tension=5.5 N, $v=0.524$ m/sec, $k_A^* = k_A/10$)

5. 결론

본 연구에서는, 슬라이딩 모드 제어를 적용한 속도추종 시변 우측경계제어기를 사용하여 축방향 주행현의 횡진동을 억제하는 제어전략을 제시하였다.

연속체인 주행하는 현과 그 경계사이에서 발생하는 에너지 플럭스의 개념을 바탕으로 축방향 주행현의 전체 기계에너지를 감소시킴으로써 횡진동을 제어할 수 있는 시변 경계제어법 중에서, 우측경계의 속도를 이용한 횡진동 제어기를 설계하였다.

시변 우측경계의 속도를 이용한 주행현의 횡진동 제어를 구현하기 위해, 시변 경계를 속도추종 제어할 제어기로서 슬라이딩 모드 제어를 설계하였다. 연구에 사용할 주행현계의 처음 2개의 진동 모드를 제어할 수 있도록 고려하여 제어기를 설계하였으며, 제어실험을 통하여 제어기 성능을 확인하였다.

주행하지 않는 현과 주행현에 대해 본 연구에서 제시한 경계제어방법을 적용하여 제어 실험한 결과, 고정 및 주행하는 현의 횡진동을 효과적으로 억제하는 것이 가능함을 입증하였다.

참고문헌

- (1) Archibald, F. R. and Emslie, A. G., "The Vibration of a String Having a Uniform Motion Along its Length," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 347-348, 1958.
- (2) Wickert, J. A. and Mote, C. D., Jr., "On the Energetics of Axially Moving Continua," Journal of Acoustic Society of America, Vol. 85, No. 3, pp. 1365-1368, 1988,
- (3) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., Jr., "Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control," ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 118, pp. 66-74, 1996.
- (4) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., Jr., "A Generalized Treatment of the Energetics of Translating Continua, Part 1 : Strings and Second Order Tensioned Pipes," Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, No. 5, pp. 717-734, 1997.
- (5) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., Jr., "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints : Energy Transfer and Mode Localization," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 1, pp. 1-22, 1998
- (6) Slotine, J.-J. and Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991.
- (7) White, F. M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill Book Company, 1986.