

Eigensystem Realization Algorithm을 이용한 유연한 빔의 운동방정식 규명

이인성*, 이재원**, 이수철***

System Identification of Flexible beam Using Eigensystem Realization Algorithm

In-Sung Lee*, Jae-Won Lee**, Soo-Cheol Lee**

Abstract

The System identification is the process of developing or improving a mathematical model of a physical system using experimental data of the input, output and noise relationship. The field of system identification has been an important discipline within the automatic control area. The reason is the requirement that mathematical models having a specified accuracy must be used to apply modern control methods. In this paper, it is confirmed that we can obtain transfer function of flexible beam that is expressed in the forms of identified state-space system matrix A , B , C , D and identified observer gain G using Eigensystem Realization Algorithm including singular value decomposition. And these matrices can be applied to the automatic control. In addition to, it is also confirmed that transfer function can express a system using identified observer gain G , in spite of a noisy data or a periodic disturbance.

Key Words : System Identification, Eigensystem Realization Algorithm, Observer Kalman filter Identification.

1. 서론

시스템 규명법은 실험적 데이터를 이용하여 물리적 시스템을 수학적 표현으로 전개하는 과정을 의미하는데, 현대 제어방법의 적용을 위해서 정확한 수학적 모델이 요구되면서 자동제어 분야 내의 중요한 부분이 되어 왔다

Gilbert[1]와 Kalman[2]이 가제어성과 가관측성의 개념을 사용하여 Realization 이론의 중요한 원

리를 처음으로 소개하였다. 두 기법은 Realization 문제의 해결을 위하여 전달함수 행렬을 사용하였다. 이후 Ho와 Kalman[3]은 Minimum Realization 문제가 Markov Parameters(펄스응답 샘플)라고 알려진 연속적인 실수 행렬로 표현되는 문제와 같다는 것을 보였다. 위 방법의 단점은 데이터 분석에서 노이즈의 영향을 평가 할 수 없다는 것이다. Ziger와 McEwen[4]는 노이즈 데이터를 다루기 위하여 Ho-Kalman 알고리즘[3]과 특이치 분해(Singular Value Decomposition)기법의 조합을 제안하였다. 유연한 구조물을 위한 모달 매개변수 규명법은 J. N Juang[6]에 의해 처음으로 제안되었다. 구조물과 제어분야의 상호작용에 의하여 Eigensystem Realization Algorithm (ERA)[7]은

* : 영남대학교 기계공학과 대학원

** : 영남대학교 기계공학과

*** : 대구대학교 산업자동차공학부

모달 매개변수 규명법에서 발전하였다. 이와 비슷한 접근에 기초를 두고 주파수영역 ERA와 재귀적 ERA도 제안되었다.[7] 이러한 알고리즘은 유연한 구조물의 규명법에 많이 적용되어지고 있다.

본 논문에서는 특이치 분해 기법을 포함한 Eigensystem Realization Algorithm을 이용하여 유연한 빔의 전달함수를 구하고 외란과 노이즈의 영향을 평가함으로써 유연한 구조물의 정밀한 진동제어를 위한 전달함수를 구하고자 한다.

2. 상태공간 모델의 기본이론

동적 시스템을 식 (1)과 식(2)와 같이 이산시간 상태공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2)$$

이산 시간 상태공간 방정식 식(1), 식(2)에 초기 상태 $x(0)=0$ 와 임펄스 입력을 적용하면 식(3)과 같이 System Markov Parameters를 구할 수 있다.

$$y(k) = \sum_{i=1}^k CA^{i-1}Bu(k-i) + Du(k) \quad (3)$$

이 System Markov Parameters는 행렬 A, B, C, D 로 표현 할 수 있고, 일반적으로 동역학적 선형 시스템에 대한 수학적 모델의 규명법에 기본으로 사용되어진다.

일반적으로 모든 상태변수를 직접적으로 측정한다는 것은 어렵다. 관측기 모델은 입력과 출력을 측정하여 시스템의 모든 상태변수를 재구성할 수 있는 방법을 보여준다. 이산시간 상태공간 방정식을 나타내는 식(1), (2)와 관측기 계인 G 를 이용하여 식(4)와 식(5)와 같이 상태공간 관측기 모델을 표현할 수 있다.

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}v(k) \quad (4)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + GC, \\ \bar{B} &= [B + GD \quad -G] \\ v(k) &= \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 식(6)의 \bar{A} 와 \bar{B} 는 각각 관측기 계인을 포함하는 시스템행렬과 입력행렬이고, $v(k)$ 는 입·출력 데이터로 이루어진 입력력 행렬이다.

상태공간 관측기 모델에서도 System Markov Parameters와 같은 방법으로 Markov Parameters를 구할 수 있다. 이렇게 구한 것이 상태공간 관측기 모델의 Observer Markov Parameters라고 한다. Observer Markov Parameters를 일반식으로 표현하면 식(7)과 같이 나타낼 수 있다. Observer Markov Parameters는 두개의 인자 $\bar{Y}_k^{(1)}$ 와 $-\bar{Y}_k^{(2)}$ 로 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k &= C[A + GC]^{k-1}[B + GD - G] \\ &= [C(A + GC)^{k-1}(B + GD) \quad -C(A + GC)^{k-1}G] \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{Y}_k^{(1)} & -\bar{Y}_k^{(2)} \end{bmatrix}; \quad k=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

3. Observer/Kalman filter Identification Process

OKID는 실험적인 입출력 데이터를 이용하여 시스템의 선형운동방정식을 규명하는 알고리즘이며, 시스템의 상태공간 모델을 구할 수 있을 뿐만 아니라, 피드백제어기 설계에 직접 이용할 수 있는 관측기 계인이나 Kalman filter 계인을 동시에 규명할 수 있다.

3.1 Observer Markov Parameters

OKID의 첫 번째 단계는 실험적인 입·출력 데이터를 이용하여 Observer Markov Parameters를 표현하는 것이다. 위의 상태공간 관측기 모델에서 식(5)의 출력항 $y(k)$ 는 Observer Markov Parameters(\bar{Y})와 입·출력 데이터만으로 구성된 행렬 V 를 이용하여 식(8)과 같이 표현 할 수 있다.

$$y = \begin{matrix} \bar{Y} & V \\ m \times l & m \times [(m+r)(l-1)+r] & [(m+r)(l-1)+r] \times l \end{matrix} \quad (8)$$

여기서, y 와 \bar{Y} , V 는 각각 식(9)과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = [y(0) \ y(1) \ y(2) \ \dots \ y(p) \ y(l-1)]$$

$$\bar{Y} = [D \ \bar{C} \ \bar{B} \ \bar{C} \ \bar{A} \ \bar{B} \ \dots \ \bar{C} \ \bar{A}^{p-1} \ \bar{B} \ \dots \ \bar{C} \ \bar{A}^{l-2} \ \bar{B}]$$

$$V = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(p) & \dots & u(l-1) \\ 0 & v(0) & v(1) & \dots & v(p-1) & \dots & v(l-2) \\ 0 & 0 & v(0) & \dots & v(p-2) & \dots & v(l-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v(0) & \dots & v(l-p-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & u(0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, m 은 출력의 수, r 은 입력의 수 그리고, l 은 데이터의 샘플 수이다. 따라서, $y(k)$ 의 차원은 $(m \times 1)$ 이 되고, $u(k)$ 는 $(r \times 1)$ 이 된다. 그리고 $v(k)$ 는 $y(k)$ 와 $u(k)$ 로 이루어져 있으므로 그 차원은 $(r+m) \times 1$ 이 된다. 행렬 V 의 행은 입력행렬 $u(k)$ 와 $l-1$ 개의 임출력 행렬 $v(k)$ 로 이루어져 있으므로 차원은 $(m+r)(l-1)+r$ 이 된다.

$$\bar{Y} = yV^+ \quad (10)$$

여기서, V^+ 는 V 의 의사 역행렬(pseudo-inverse)이다.

3.2 System Markov Parameters and Observer Gain Markov Parameters

OKID의 두 번째 단계에서는 Observer Markov Parameters의 연산을 이용하여 System Markov Parameters와 Observer Gain Markov Parameters를 표현하는 과정을 나타낸다.

$$D = Y_0 = \bar{Y}_0 \quad (11)$$

$$Y_k = \begin{cases} \bar{Y}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)} Y_{k-i}, & \text{for } k=1, \dots, p \\ - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)} Y_{k-i} & \text{for } k=p+1, \dots, \infty \end{cases} \quad (12)$$

Observer Markov Parameters의 첫 번째 인자를 전개하여 각 인자의 연산을 이용하는 방법으로 모 든 System Markov Parameters는 식(12)과 같이 표현되어질 수 있고, Observer Gain Markov Parameters는 식(13)과 같이 Observer Markov Parameters의 두 번째 인자를 전개하여 다시 쓸 수 있다.

$$Y_k^o = \begin{cases} \bar{Y}_k^{(2)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{Y}_i^{(2)} Y_{k-i}^o & \text{for } k=2, \dots, p \\ - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)} Y_{k-i}^o & \text{for } k=p+1, \dots, \infty \end{cases} \quad (13)$$

3.3 Eigensystem Realization Algorithm(ERA)

OKID의 마지막 단계인 ERA는 Markov Parameters의 조합으로 이루어진 Hankel Matrix의 특이치 분해를 이용하여 시스템 행렬 A , B , C , D 등을 구하는 알고리즘을 말한다.

$$H(k-1) = \begin{bmatrix} Y_k & Y_{k+1} & \dots & Y_{k+\beta-1} \\ Y_{k+1} & Y_{k+2} & \dots & Y_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k+a-1} & Y_{k+a} & \dots & Y_{k+a+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\Rightarrow H(k-1) = \mathcal{P}_a A^{k-1} \mathcal{Q}_\beta \quad (15)$$

Hankel Matrix는 식(14)과 같이 각 행과 열이 모두 System Markov Parameters의 각 항으로 구성된 행렬이다. 이는 또 식(15)와 같이 가관측성 행렬 \mathcal{P}_a 과 시스템 행렬 A , 그리고 가제어성 행렬 \mathcal{Q}_β 의 곱으로 분해할 수 있다.

여기서 특히, k 의 값이 1일 때의 Hankel Matrix는 아래의 식(16)과 같이 표현되는데 이때의 Hankel Matrix는 가제어성 행렬과 가관측성 행렬

만으로 표현이 가능함을 알 수 있다.

$$H(0) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_\beta \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_\alpha & Y_{1+\alpha} & \cdots & Y_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} = P_\alpha Q_\beta \quad (16)$$

식 (16)을 특이치 분해(Singular Value Decomposition)하여 식(17)과 같이 표현할 수 있는데, 여기서 R과 S는 Orthonormal 행렬이고, Σ 는 정방 행렬을 의미한다. Σ 는 σ_n 의 주대각행렬로 구성되어 있고 σ_n 는 Σ 의 특이치(Singular Values)를 의미한다.

$$H(0) = R_n \Sigma_n S_n^T = P_\alpha Q_\beta \quad (17)$$

식(17)로부터 식(18)과 같은 관계를 유도할 수 있다.

$$P_\alpha = R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}}, \quad Q_\beta = \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T \quad (18)$$

여기서 Hankel Matrix의 $k=2$ 일 때의 값, 식 (19)을 이용하여 시스템 행렬 A를 식(20)과 같이 구할 수 있다.

$$H(1) = P_\alpha A Q_\beta = R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} A \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T \quad (19)$$

$$A = \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

다음은 Hankel Matrix에서 System Markov Parameters Y_k 를 구하여 여기에서 나머지 시스템 행렬 B, C 그리고 G를 구하는 과정을 보여준다.

$O_i = i$ 차수의 영행렬, $I_i = i$ 차수의 단위행렬

$$\begin{aligned} E_m^T &= [I_m \quad O_m \quad \cdots \quad O_m], \\ E_r^T &= [I_r \quad O_r \quad \cdots \quad O_r] \end{aligned} \quad (21)$$

식(22)에서 Markov Parameter의 전개 결과 식 (23)과 같이 규명된 상태공간 시스템 행렬

\hat{A} , \hat{B} , \hat{C} 을 각각 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_k &= E_m^T H(k-1) E_r \\ &= E_m^T P_\alpha A^{k-1} Q_\beta E_r \\ &= E_m^T P_\alpha [Q_\beta H^T P_\alpha] A^{k-1} [Q_\beta H^T P_\alpha] Q_\beta E_r \\ &= E_m^T H(0) [S_n \Sigma_n^{-1} R_n^T] P_\alpha A^{k-1} Q_\beta [S_n \Sigma_n^{-1} R_n^T] H(0) E_r \\ &= E_m^T H(0) S_n \Sigma_n^{-1/2} [\Sigma_n^{-1/2} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-1/2}]^{k-1} \Sigma_n^{-1/2} R_n^T H(0) E_r \\ &= E_m^T R_n \Sigma_n^{1/2} [\Sigma_n^{-1/2} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-1/2}]^{k-1} \Sigma_n^{1/2} S_n^T E_r \end{aligned} \quad (22)$$

$$\hat{A} = \Sigma_n^{-1/2} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-1/2},$$

$$\hat{B} = \Sigma_n^{1/2} S_n^T E_r, \quad (23)$$

$$\hat{C} = E_m^T R_n \Sigma_n^{1/2}$$

또 관측기 게인 G는 식(7)의 Observer Markov Parameters에서 이미 구해진 \bar{Y}_k 와 식(23)의 \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} 를 각각 A, B, C에 대입함으로써 구할 수 있다.

4. 유연 빔의 운동방정식 규명

본 연구에서 사용된 실험장치의 개략도는 Fig. 4.1에 잘 나타나 있다. 빔에 Strain Gage를 부착하여 진동을 측정하였다. 먼저, 빔의 고유진동수를 이론적으로 구하면 각각의 고유진동수는 2.2996 (Hz), 14.6341 (Hz), 40.31 (Hz)이다.

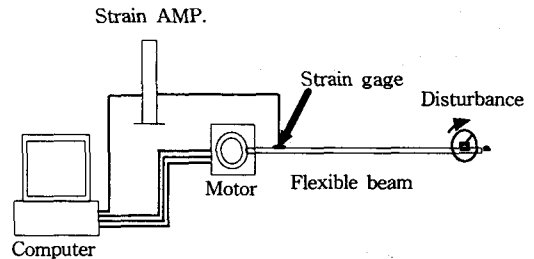


Fig. 4.1 Sketch of experimental apparatus

불규칙 입력 데이터와 그 출력 데이터는 OKID

를 이용한 시스템 규명을 위한 기본적인 데이터가 된다. 여기서 샘플링 시간은 0.01초로 하였다.

그리고 Fig. 4.2의 Hankel Matrix Singular Values의 분포를 이용하여 전체 시스템의 차수를 결정할 수 있다.

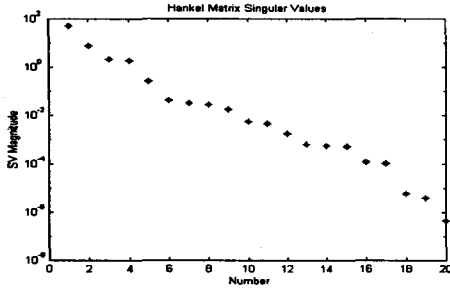


Fig. 4.2 Hankel Matrix Singular Values

모터를 포함한 시스템의 차수는 5차로 결정하였다.

예측된 출력(상태공간 모델 A, B, C, D)과 실제출력의 비교와 관측된 출력(상태공간모델 A, B, C, D 와 관측기 게인 G)과 실제출력을 비교하면 예측된 출력에 비해서 관측된 출력이 실제 출력과의 오차가 거의 없는데, 이것은 관측기 게인의 영향이라 할 수 있고, 예측된 출력과 실제 출력과의 오차는 모터에서의 비선형 요소와 노이즈의 영향이라 할 수 있다.

식(24)의 $T_p(z)$ 는 예측된 출력으로 구한 전달함수이고, 식(25)의 $T_e(z)$ 는 관측된 출력으로 구한 전달함수이다. 두 함수의 영점은 같으나, 극점은 다르다는 것을 쉽게 알 수 있다.

Fig. 4.3에서 단위원 가까이 있는 점들이 $T_p(z)$ 의 극점들이고, 규명된 관측기 게인 G 에 의해서 조금씩 단위원 안쪽으로 이동한 점들이 $T_e(z)$ 의 극점이다.

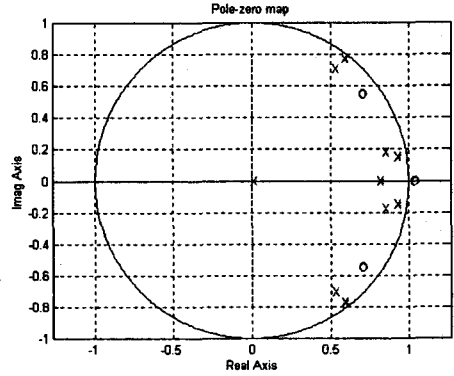


Fig 4.3 Pole-Zero Map of $T_p(z)$ & $T_e(z)$

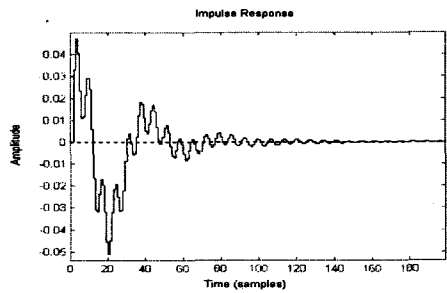


Fig. 4.4 Impulse Response of $T_p(z)$

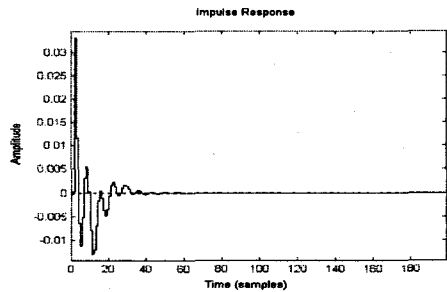


Fig. 4.5 Impulse Response of $T_e(z)$

$$T_p(z) = \frac{-0.0004 \times (z-9.585)(z+8.531)(z-1.044)(z^2-1.415z+0.8019)}{(z-0.8214)(z^2-1.87z+0.8958)(z^2-1.193z+0.9487)} \quad (24)$$

$$T_e(z) = \frac{-0.0004 \times (z-9.585)(z+8.531)(z-1.044)(z^2-1.415z+0.8019)}{(z-0.01901)(z^2-1.714z+0.766)(z^2-1.078z+0.791)} \quad (25)$$

Fig. 4.4 Fig. 4.5는 각각의 임펄스 응답을 비교한 것이다. Fig. 4.5에서도 관측기 게인 G 의 영향으로 $T_e(z)$ 의 응답은 빨리 수렴하였음을 볼 수 있다. $T_b(z)$ 의 응답은 수렴하는데 많은 시간이 소요되고, 잔류진동의 폭이 크다. 관측기 게인의 영향을 전체 시스템에서 дем퍼의 역할을 한다고 할 수 있음을 Fig. 4.5에서 확인할 수 있다.

다음은 Eigensystems Realization Algorithm의 주기적인 외란에 대한 영향을 평가하기 위하여 빔 끝단에 주기적인 외란을 가하였다. 외란의 진동수는 8Hz이다.

주기적인 외란이 포함된 불규칙 입력 데이터와 그에 대한 응답의 데이터를 이용하여 OKID를 수행한 결과 관측기 게인을 포함하지 않은 전달함수 $T_{pd}(z)$ 와 관측기 게인을 포함한 전달함수 $T_{ed}(z)$ 를 각각 구할 수 있다.

Fig. 4.6과 Fig. 4.7은 외란의 영향을 알아보기 위한 임펄스 입력에 대한 빔의 응답을 나타낸 것인데, Fig. 4.6에서는 관측기 게인 G 가 포함되지 않은 함수 $T_{pd}(z)$ 의 임펄스 응답에서 정상상태 에러와 잔류진동 등은 외란에 의해 나타나는 응답 특성이라 할 수 있다. Fig. 4.7에서는 이러한 외란에 의한 진동과 정상상태 에러가 나타나지 않음을 보여주고 있다. 또 외란이 포함되지 않은 데이터에 의해 구해진 함수 $T_{ed}(z)$ 의 임펄스 응답을 나타내는 Fig. 4.5와 비교해 보면 그 응답특성이 거의

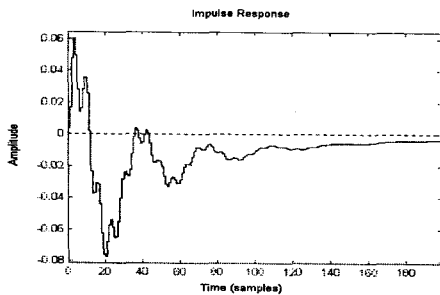


Fig. 4.6 Impulse Response of $T_{pd}(z)$

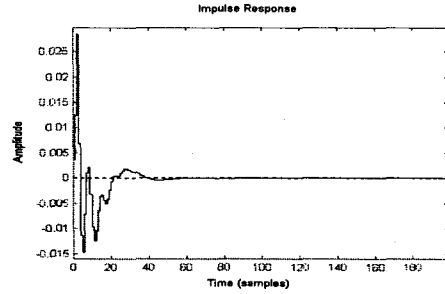


Fig. 4.7 Impulse Response of $T_{ed}(z)$

같음을 알 수 있다. 이는 관측기 게인 G 에 의해 외란이 시스템을 표현하는데 영향을 미치지 않는다는 중요한 사실을 나타내고 있다.

5. 결론 및 제언

본 논문에서는 시스템 규명법(System Identification)의 한가지 방법으로 Ho-Kalman 알고리즘 [3]에 기초를 두고 있는 Observer/ Kalman filter Identification 이론과 특이치 분해(Singular Value Decomposition)기법을 바탕으로 발전한 ERA (Eigensystem Realization Algorithm)을 이용하여 실험적인 입·출력 데이터만으로 제어에 필요한 전달함수를 상태공간 방정식의 형태로 표현할 수 있고, 노이즈의 영향에 대해서도 평가할 수 있음을 보이고, 실험적으로 구한 규명된 상태공간 모델의 시스템 행렬(Identified State-Space Model Matrix) A, B, C, D 와 규명된 관측기 게인 (Identified Observer Gain) G 를 이용하여 직접 제어에 적용해 봄으로써, 그 실용성을 검증할 수 있었다. Noise-free 데이터는 물론이고, 노이즈가 포함된 데이터에서도 규명된 관측기 게인 G 를 이용하여 시스템을 정확하게 표현할 수 있음을 실험적인 응답과 시뮬레이션의 응답을 비교함으로써 확인할 수 있었다.

□ 참고문헌

- [1] Gilbert, E. G., "Controllability and Observability in Multi-variable Control Systems," SIAM Journal on Control, Vol. 1, No. 2, 1963, pp. 128-151.
- [2] Kalman, R. E., "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems," SIAM Journal on Control, Vol. 1, No. 2, 1963, pp.152-192.
- [3] Ho, B. L. and Kalman, R. E., "Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Data," Proceedings of the 3rd Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, 1965, pp.449-459; also, Regelungstechnik, Vol. 14, 1966, pp.545-548.
- [4] Zeiger, H. P., and McEwen, A. J., "Approximate Linear Realization of Given Dimension Via Ho's Algorithm," IEEE Transactions Automatic Control, Vol. AC-19, No. 2, April 1974, p.153.
- [5] Kung, S., "A new Identification and Model Reduction Algorithm Via Singular Value Decomposition," 12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, November 1978, pp. 705-714.
- [6] Juang, J.-N. and Pappa, R. S., "An Eigensystems Realization Algorithm for Modal parameter Identification and Model Reduction," Journal of Guidance, Control, and Vol. 8, No. 5, September-October 1985, pp. 620-627.
- [7] Montgomery, R. C. and Sundararajan, N., "Identification of the Dynamics of a Two-Dimensional Grid Structure Using Least Squares Lattice Filters," Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 33, No. 1, January-March 1985, pp.35-47.
- [8] Jer-Nan Juang, "Applied System Identification", Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1994
- [9] Minh Q. Phan, "OKID Step-by-Step Guide and References", Department of Mechanical Aerospace Engineering Princeton University, 1997
- [10] Gene F. Franklin, J. David Powell, Michael Workman, "Digital Control of Dynamic Systems", Addison Wesley, 1997
- [11] 정성중, 김종식, 이재원, 한도영 역, "동적 시스템 제어", 반도출판사, 1995