

새로운 부등매개변수 면내변형 곡선보 요소에 관한 연구

유재형, 유승원* · 문원주** · 민옥기***

A Study of a New Anisoparametric In-Plane Deformable Curved Beam Element

Jae-hyeong Yoo, Seungwon Yoo, Won-joo Moon and Min Oakkey

Key Words: Anisoparametric element(부등매개변수 요소), Unmatched coefficient(불일치 계수), Stiffness locking phenomenon(강성과잉현상), Undulate stress patterns(응력 기복현상), Curved beam(곡선보)

Abstract

Generally, it is known that the reduced integration, modified shape function, anisoparametric and non-conforming element can minimize the error induced by stiffness locking phenomenon in the finite element analysis. In this study, new anisoparametric curved beam elements are introduced by using different shape functions in each displacement field. When these shape functions are substitute for functional, we can expect that the undulate stress patterns are not appeared or minimized because there is no unmatched coefficient in the constrained energy equation. As a result of numerical test, the undulate stress patterns are disappeared, and displacement and stress are coincide with the exact solutions.

1. 서 론

유한요소법은 공학의 여러 분야에서 적용이 되어 지금은 컴퓨터의 급속한 발전과 더불어 다른 수치해석 방법에 비해 응용범위가 넓고 복잡한 대상에까지 적용이 되고 있다. 그럼에도 불구하고, 최근까지 지속적으로 연구되고 있는 문제 중의 하나는 보, 판, 셸과 같은 2종이상의 변위가 연계된 다변위장 문제(multi-field problem)에서 발생하는 오차에 관한 원인과 해결책에 관한 연구⁽¹⁻¹⁰⁾이다. 그 중에서 보(beam) 요소는 가장 간단하면서도 널리 사용되는 요소로써 다른 요소의 개발을 위한 기본이 되기 때문에 공학적으로 중요하게 사용되고 있으며 많은 연구가 진행되어 왔다.

보요소의 유한요소 해석시 발생하는 대표적인

오차에는 가성구속에 의한 것이 있다⁽³⁻⁵⁾. 가성구속에 의한 오차는 C^0 -연속 요소를 사용하여 유한 요소를 해석할 경우 단면의 두께 대 길이의 비가 작아짐에 따라 실제로는 존재하지 않는 가성구속이 수식화 과정에 도입되어서 요소의 강성이 실제보다 크게 계산되기 때문에 발생하게 된다. 이러한 강성과잉현상은 형상함수를 부적절하게 가정하고 수치적분시 강성행렬에 완전적분을 적용할 경우에 발생하게 된다⁽³⁻⁵⁾. 강성과잉현상의 해결을 위해서 감차적분⁽³⁻⁸⁾, 감차최소화 이론(Reduced minimization theory)⁽³⁻⁸⁾, 수정형상함수⁽¹⁻³⁾, 부등매개변수⁽⁸⁻¹⁰⁾ 및 비적합 변위모드⁽¹¹⁾를 추가하는 방법 등이 연구되어 왔다.

본 논문에서는 면내변형 곡선보 요소에서 구속 에너지식에 불일치계수(unmatched coefficient)가 나타나지 않도록⁽⁵⁻⁶⁾ 각각의 변위마다 형상함수의 차수를 달리하는 부등매개변수 요소를 도입하여 변위와 응력의 분포가 이론해와 잘 일치하는지를 알아보고, 감차적분을 사용하는 등매개변수 요소 등과 비교함으로써 새로운 요소를 평가하고자 한다.

* 연세대 대학원

** 한국타이어

*** 연세대 기계설계학과

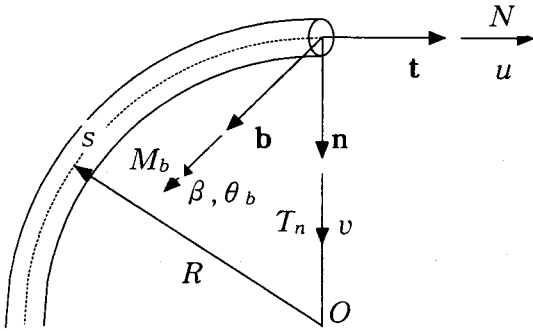


Fig. 1 Generalized displacements and unit vectors of an in-plane deformable curved beam

2. 곡선보 요소의 범함수

면내변형 곡선보의 변위장은 Fig. 1 과 같다. 이 때, 전통적으로 사용되어 온 면내변형 곡선보의 변형률은 다음과 같이 정의된다⁽¹⁾.

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{du}{ds} - \kappa v \\ \gamma_b &= \frac{dv}{ds} - \beta \\ \chi_b &= \frac{d\beta}{ds} + \kappa \frac{du}{ds} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, ϵ_t 는 인장변형률, γ_b 는 전단변형률, χ_b 는 굽힘변형률, u 는 인장변위, v 는 전단 변위, β 는 회전변위, κ 는 굽힘곡률, s 는 곡선보의 중립축을 따라 정의되는 곡선 좌표계이다. 곡률이 상수일 경우 ' $\beta = \theta_b - \kappa u$ '의 관계가 성립한다. 또한, 세 단위 벡터는 각각 단위 접선 벡터(unit tangent vector, t), 단위 주법선 벡터(unit principal vector, n) 및 단위 배법선 벡터(unit binormal vector, b)이다.

3. 부등매개변수 곡선보 요소

3.1 불일치계수의 고찰

식(1)의 변형률 정의에 기초한 곡선보의 변위들을 곡선 좌표계에서 2차 내삽함수를 사용하여 근사화 시키면

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \\ v &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 \\ \beta &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 \end{aligned} \quad (2)$$

이다. 식(2)의 변위함수들을 식(1)의 변형률 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{du}{ds} - \kappa v \\ &= (a_1 - \kappa b_0) + (2a_2 - \kappa b_1)s - \kappa b_2 s^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_b &= \frac{dv}{ds} - \beta \\ &= (b_1 - c_0) + (2b_2 - c_1)s + c_2 s^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \chi_b &= \frac{d\beta}{ds} + \kappa \frac{du}{ds} \\ &= (c_1 + \kappa a_1) + 2(c_2 + \kappa a_2)s \end{aligned} \quad (5)$$

과 같이 표현된다. 위의 식(5)에서와 같이 변형률을 구성하는 모든 변위의 계수들을 포함하고 있는 계수를 일치계수(matched coefficient)라 하며, 식(3)과 식(4)의 최고차 항과 같이 변형률을 구성하는 변위중의 일부분의 계수만을 포함하고 있는 계수를 불일치계수(unmatched coefficient)라 한다. 또한, 불일치계수가 존재하고 페널티 파라미터(penalty parameter)와 연계되어 있는 변형률을 구속변형률(constrained strain)이라 하며, 그 변형에너지를 구속에너지(constrained energy)라 부른다. 반면에 그렇지 않은 변형률은 비구속변형률(unconstrained strain)이라 하며, 비구속변형률의 변형에너지를 비구속에너지(unconstrained energy)라 한다. 유한요소 해석시에 구속에너지에 완전적분을 적용할 경우에 가상구속을 유발하므로 강성과잉현상에 의한 오차가 발생하여 요소의 수치거동은 이론적으로 예측된 거동에서 벗어나게 된다.

3.2 새로운 형상함수의 도입

구속에너지에 완전적분을 적용할 경우에 가상구속을 유발하여 강성과잉현상에 의한 오차가 발생하므로, 이러한 오차를 없애기 위해 각각의 변위장마다 형상함수의 차수를 달리하는 부등매개변수 5절점 곡선보 요소를 도입한다. 여기서, x - y 평면 내에 놓인 면내변형곡선보의 변위함수를 다음과 같이 근사한다.

먼저, 곡선보의 인장변위(u)는 다음과 같은 형상함수 N_{ui} 를 사용하여 근사시킨다.

$$u = \sum_{i=1}^5 N_{ui} u_i$$

여기서, $N_{u1} = \xi(\xi - 1)(4\xi^2 - 1)/6$

$$N_{u2} = -4\xi(2\xi - 1)(\xi^2 - 1)/3$$

$$N_{u3} = (\xi^2 - 1)(4\xi^2 - 1)$$

$$N_{u4} = -4\xi(2\xi + 1)(\xi^2 - 1)/3$$

$$N_{u5} = \xi(\xi + 1)(4\xi^2 - 1)/6$$

이며, i 는 절점번호이다.

보의 전단변위(v)는 곡선보의 가운데 절점을

정의하지 않는 다음과 같은 형상함수 N_{vi} 를 사용하여 근사시킨다.

$$v = \sum_{i=1, i \neq 3}^5 N_{vi} v_i$$

여기서, $N_{v1} = -(4\xi^2 - 1)(\xi - 1)/6$

$$N_{v2} = 2(\xi^2 - 1)(2\xi - 1)/3$$

$$N_{v4} = -2(\xi^2 - 1)(2\xi + 1)/3$$

$$N_{v5} = (4\xi^2 - 1)(\xi + 1)/6 \text{ 이다.}$$

보의 회전변위(β)는 다음과 같은 새로운 형상함수 $N_{\beta i}$ 를 사용하여 근사시킨다.

$$\beta = \sum_{i=1, i \neq 2, 4}^5 N_{\beta i} \beta_i$$

여기서, $N_{\beta 1} = \xi(\xi - 1)/2$

$$N_{\beta 3} = -(\xi^2 - 1)$$

$$N_{\beta 5} = \xi(\xi + 1)/2 \text{ 이다.}$$

즉, 보의 가운데 절점($i=3$)의 좌우 절점($i=2, i=4$)을 제외시킨 3개의 절점만을 고려하여 형상함수를 만듦으로써 인장변위를 근사한 형상함수보다 2개의 차수가 낮아지게 하였다. 이러한 부등매개변수 요소를 Table 1 과 같은 방법으로 정리할 수 있으며, 빈칸은 정의하지 않음을 의미한다.

위의 형상함수들을 식(1)에 대입하여 불일치계수의 발생여부를 알아본다. 먼저, 각각의 변위함수들을 다음과 같은 내삽함수를 사용한다.

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 \\ v &= b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 \\ \beta &= c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)을 식(1)의 변형률 식에 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{du}{ds} - \kappa v = J \frac{du}{d\xi} - \kappa v \\ &= (Ja_1 - \kappa b_0) + (2Ja_2 - \kappa b_1)\xi \\ &\quad + (3Ja_3 - \kappa b_2)\xi^2 + (4Ja_4 - \kappa b_3)\xi^3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \gamma_b &= \frac{dv}{ds} - \beta = J \frac{dv}{d\xi} - \beta \\ &= (Jb_1 - c_0) + (2Jb_2 - c_1)\xi \\ &\quad + (3Jb_3 - c_2)\xi^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \chi_b &= \frac{d\beta}{ds} + \kappa \frac{du}{ds} = J \left(\frac{d\beta}{d\xi} + \kappa \frac{du}{d\xi} \right) \\ &= J(c_1 + \kappa a_1) + (2c_2 + 2\kappa a_2)\xi \\ &\quad + 3\kappa a_3 \xi^2 + 4\kappa a_4 \xi^3 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, J 는 자코비안을 의미한다. 위의 결과를 살펴보면 구속변형률인 식(7)의 인장변형률과 식(8)의 전단변형률에는 불일치계수가 존재하지 않음을 알 수 있다. 따라서, 수치실험의 결과는 강성과잉이 발생하지 않을 것으로 예상된다.

만일, 7절점 단일 요소를 사용할 경우에는 Table 2 와 같은 방법으로 각각의 변위함수를 가정한다. 이러한 7절점 요소의 경우에도 식(6)과 같은 방법으로 변위함수를 가정하여 변형률 식에 대입하면 5절점요소와 마찬가지로 구속변형률에는 불일치계수가 나타나지 않는다.

위에서 제시한 부등매개변수 곡선보 요소의 적분점 수에 대해서 고찰해 보면 다음과 같다. 일반적으로 n -절점 요소를 사용하는 등매개변수 요소의 경우, 적분점의 수가 n 개이면 완전적분, n 보다 적으면 감차적분이 된다. 하지만, 부등매개변수 요소의 경우, 각각의 변형률을 구성하는 형상함수의 차수가 다르게 된다. 즉, 한 개의 변형률에 대해서 차수가 다른 두 개의 변위를 사용하기 때문에 완전적분, 감차적분 등의 정의를 내리기가 어렵게 된다. 따라서, 각각의 근사변형률을 구성하는 최고의 차수가 m 일 경우 ($m+1$)개의 적분점을 사용한다. 예를 들면, 앞에서 식(7)의 인장 변형률(ϵ_t)의 경우, 인장변위의 5-절점 근사화 전단변위의 4-절점 근사가 변형률을 구성하게 되며, 이러한 차수가 다른 두 변위의 연계로 인장 변형률을 구성할 때 근사변형률의 최고차 항의 차수(m)는 3이 된다. 따라서, 적분점의 수는 4가 되는 것이다. 같은 방법으로 전단변형률(γ_b)의 적분점 수는 3, 굽힘변형률(χ_b)의 적분점 수는

Table 1 Anisoparametric element (5-node)

Number of node (i)	1	2	3	4	5
Geometric shape	○	○	○	○	○
Extension (u)	○	○	○	○	○
Shear (v)	○	○		○	○
Rotation (β)	○		○		○

Table 2 Anisoparametric element (7-node)

Number of node (i)	1	2	3	4	5	6	7
Geometric shape	○	○	○	○	○	○	○
Extension (u)	○	○	○	○	○	○	○
Shear (v)	○	○			○	○	○
Rotation (β)	○	○		○		○	○

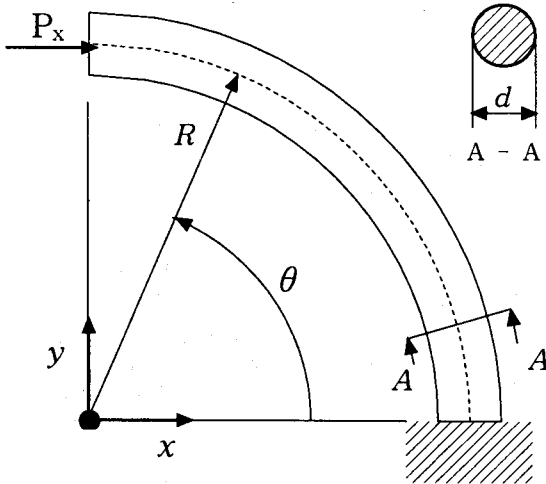


Fig.2 Geometry of an in-plane-deformable curved beam with a circular geometry

4가 된다. 그리고, 7절점 요소의 경우에는 인장, 전단 및 굽힘변형률에 대해서 각각 6개, 5개, 6개의 적분점 수를 갖는다.

4. 수치실험 및 결과

4.1 모델의 개요

면내변형 곡선보 모델의 경우, Fig.2와 같이 열림각은 $\pi/2$ 이고 반경(R)은 $5m$, 원형 단면의 지름(d)은 $0.1m$ 이다. 경계조건은 $\theta = 0$ 인 점에서는 모든 자유도가 고정되며, $\theta = \pi/2$ 인 점에서 $P_x = 100(N)$ 의 하중이 가해진다. 모델 계산에서 사용한 재료상수는 Table 3 과 같다. 위의 곡선보 모델에 대한 이론해는 변위와 응력에 대해서 Castigliano의 원리를 이용하여 구할 수 있다.

4.2 5절점 단일요소의 수치실험 결과

앞에서 제시한 부등매개변수 5절점 단일요소를 사용하여 면내변형 곡선보 요소에 대한 변위 및

Table 3 Material properties of in-plane deformable curved beam model

Young's modulus (E)	210 GPa
Poisson's ratio (ν)	0.3
Shear modulus (G)	80.7 GPa
Shear collection factor (k)	0.886364

응력분포 결과를 Fig.3 및 Fig.4에 나타냈다. 또한, 감차적분을 사용하는 등매개변수(isoparametric) 5절점 요소와도 비교하였다. 이때, UFI는 완전적분 (Uniformly Full Integration), URI는 일괄적 감차적분 (Uniformly Reduced Integration), SRI는 선별적 감차적분 (Selective Reduced Integration)을 나타낸다. "Present"는 앞에서 제시한 부등매개변수 요소를 의미하며, 실선은 이론해의

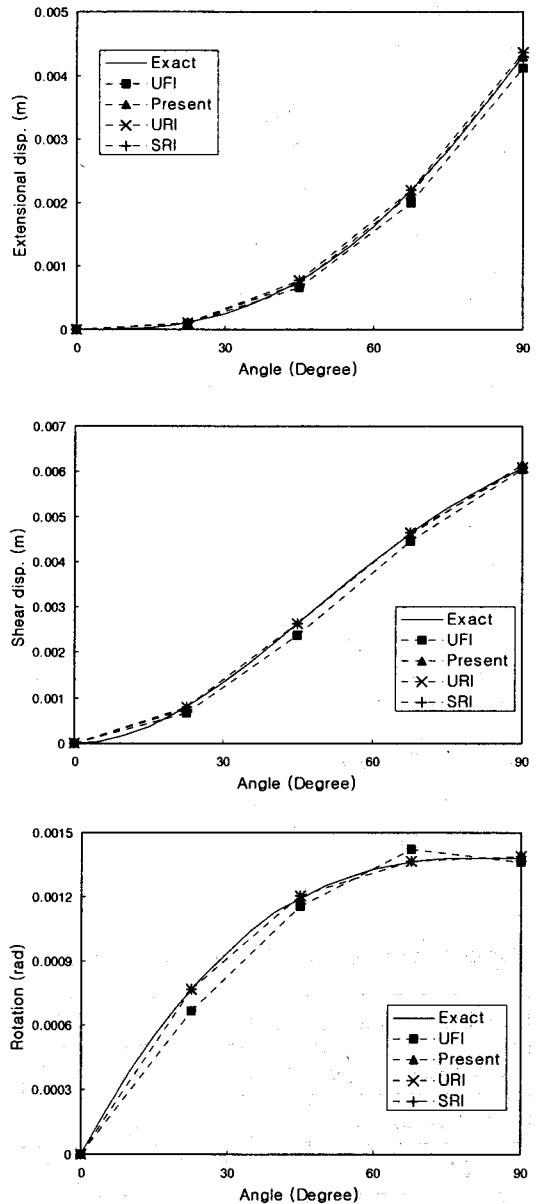


Fig. 3 Displacements for in-plane deformable curved beam (5-node)

결과이다. 한편, 요소의 자유도는 부등매개변수 요소의 경우 12자유도이며, 등매개변수 요소는 15 자유도가 된다.

4.3 7절점 단일요소의 수치실험 결과

7절점 단일요소에 대한 수치실험 결과를 Fig.5 및 Fig.6에 나타냈다. 요소의 자유도는 부등매개변

수요소의 경우 18자유도이고, 등매개변수 요소는 21자유도가 된다. 부등매개변수와 등매개변수의 UFI 및 이론해의 결과와 비교하였다.

5. 결론

본 논문에서는 근사변형률을 구성하는 각각의 변위의 형상함수 차수를 달리하는 부등매개변수 면

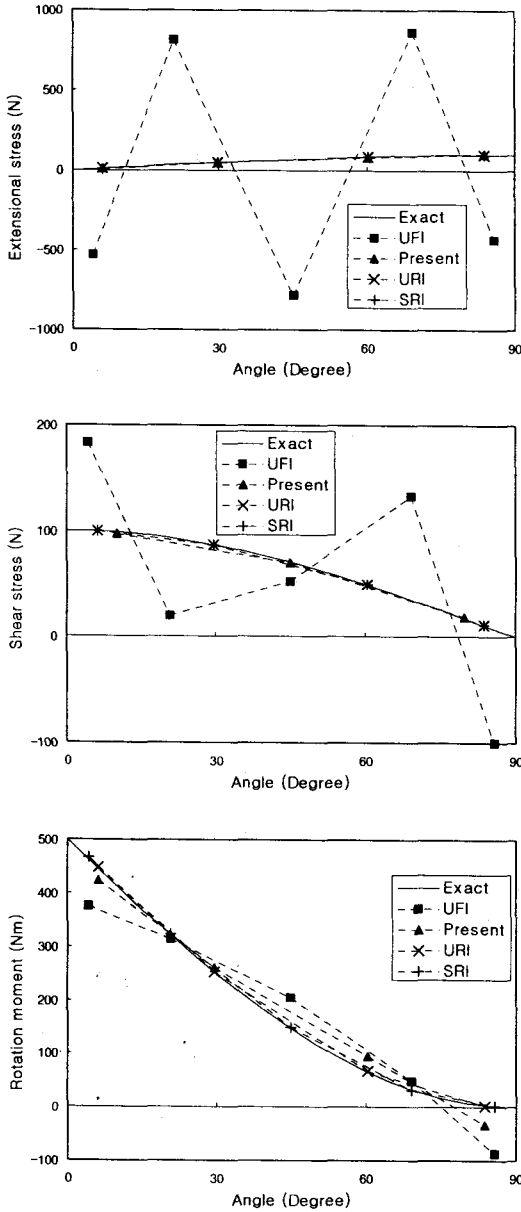


Fig. 4 Stresses for in-plane deformable curved beam (5-node)

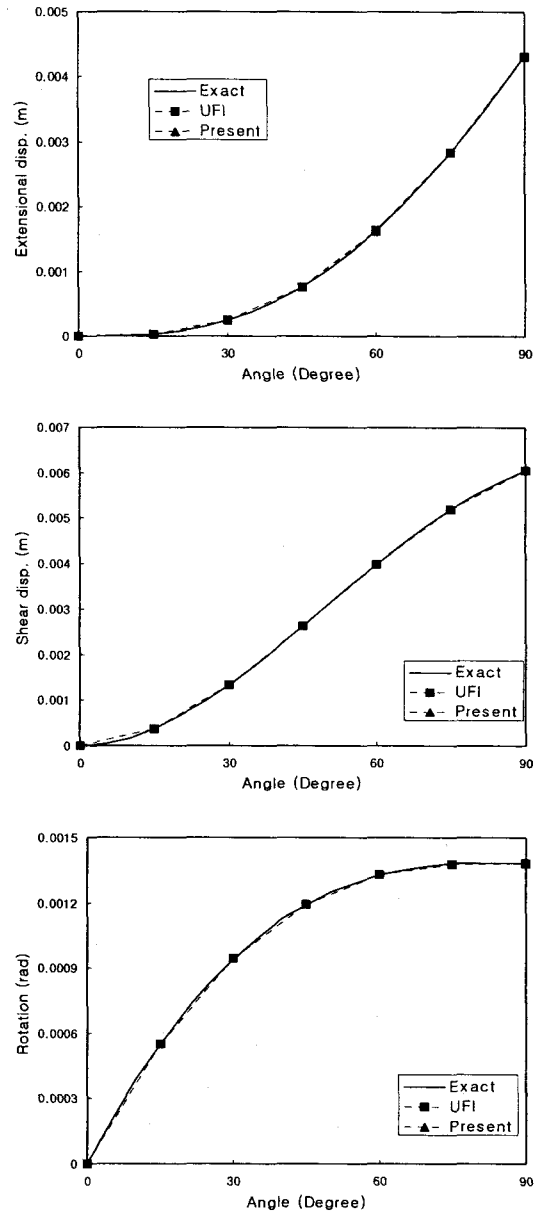


Fig. 5 Displacements for in-plane deformable curved beam (7-node)

내변형 곡선보 요소를 제시하였다. 이 요소의 범함수로는 Prathap의 변형률 정의를 이용하였으며, 인장변위(u)는 5절점, 전단변위(v)는 4절점, 회전변위(β)는 3절점요소를 각각 사용하였다. 이러한 변위의 형상함수들을 변형률 식에 대입했을 때 구속에너지항에는 불일치계수가 나타나지 않았으며, 이를 통해서 강성과잉현상에 의한 오차가 발생하지 않을 것으로 예측할 수 있었다.

수치해석 결과, 변위와 응력 모두 이론해와 잘 일치하였고, 또한, 7절점 단일 요소를 5절점 단일 요소와 같은 방법으로 부등대개변수 요소를 만들었으며, 그 결과 모두 이론해와 잘 일치하였다. 따라서, 본 논문에서 제시한 부등대개변수 면내 변형 곡선보 요소가 변위 및 응력의 해석에서 좋은 결과를 나타냄을 확인할 수 있었다.

후기

본 논문은 두뇌한국 21 사업의 지원으로 이루어진 것이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) G. Prathap, 1985, "The curved beam/deep arch/finite ring element revisited," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.21, pp.389-407
- (2) G. Prathap and C. R. Babu, 1986, "An isoparametric quadratic thick curved beam element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.23, pp.1973-1984
- (3) 김용우, 1991, "유한요소의 가성구속과 가성모드에 의한 오차유발에 관한 통합 이론," 연세대학교 대학원, 박사학위 논문
- (4) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1994, "Reduced minimization theory in beam elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.37, pp.2125-2145
- (5) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성과잉 현상과 고유치에 관한 연구," *대한기계학회 논문집*, 제 14권, 제2호, pp. 445-454
- (6) 문원주, 1997, "면내변형 곡선보 요소의 강체변위 장에 관한 연구," 연세대학교 대학원, 박사학위 논문
- (7) 문원주, 김용우, 민옥기, 이강원, 1996, "공간곡선보요소에서의 감차최소화 이론," *대한기계학회논문집*, 제 20권, 제12호, pp. 3792-3803
- (8) Kim Moon-joon, Min Oak-key, Kim Yong-woo and Moon Won-joo, "New Anisoparametric 3-Node Elements for Out-of-plane Deformable Curved Beam", *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 3, pp. 131-141, 2000
- (9) S. Dasgupta and D. Sengupta, 1997, "Static and dynamic application of a five noded horizontally curved beam element with shear deformation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 40, pp. 1801-1819
- (10) A. Tessler and L. Spiridigliozzi, 1986, "Curved beam elements with penalty relaxation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.23, pp.2245-2262
- (11) 최창근, 1989, "유한요소해석," 집문당
- (12) R. A. Day and D. M. Potts, 1990, "Curved Mindlin beam and axi-symmetric shell elements-A new approach," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.30, pp.1263-1274

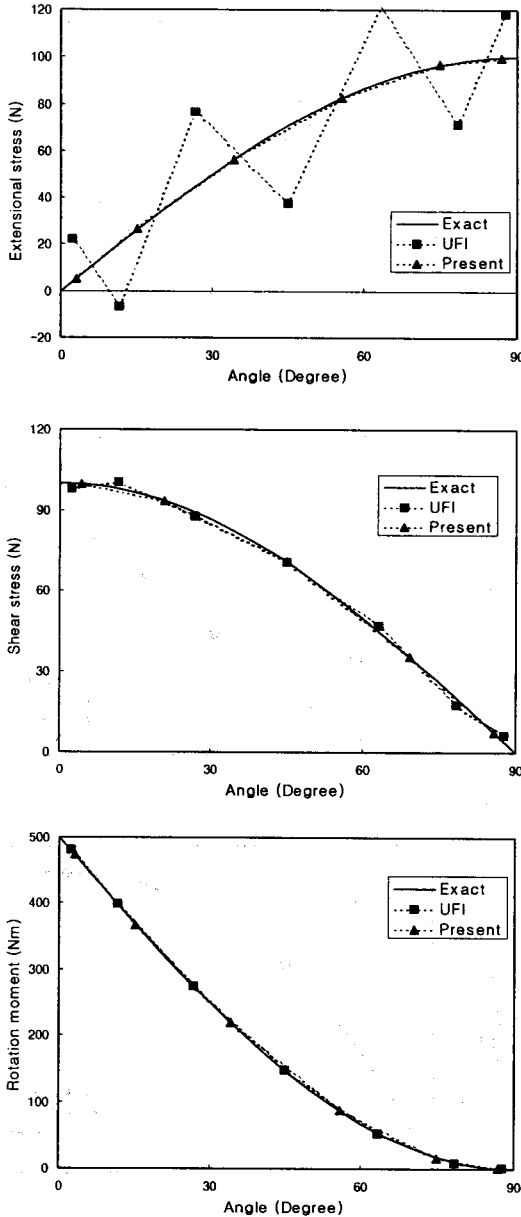


Fig. 6 Stresses for in-plane deformable curved beam (7-node)