

# 기능경사재를 위한 균질화와 이산화-미시역학 모델에 대한 비교 수치해석

하대율\*, 이홍우\*, 조진래\*\*

## Comparative Numerical Analysis of Homogenized and Discrete-Micromechanics Models for Functionally Graded Materials

Dae-Yul Ha, Hong-Woo Lee and Jin-Rae Cho

**Key Words** : Functionally Graded Materials(기능경사복합재), Volume Fraction(체적분율), Relative Thickness Ratio(상대두께비), Linear Rule of Mixtures(선형혼합법칙), Modified Rule of Mixtures(수정된 혼합법칙), Wakashima-Tsukamoto Estimate(Wakashima-Tsukamoto 평가법), Discrete Model(이산화 모델), Finite Element Analysis(유한요소해석).

### Abstract

Functionally graded materials(FGMs) involve dual-phase graded layers in which two different constituents are mixed continuously and functionally according to a given volume fraction. For the analysis of their thermo-mechanical response, conventional homogenized methods have been widely employed in order to estimate equivalent material properties of the graded layer. However, such overall estimations are insufficient to accurately predict the local behavior. In this paper, we compare the thermo-elastic behaviors predicted by several overall material-property estimation techniques with those obtained by discrete analysis models utilizing the finite element method, for various volume fractions and loading conditions.

### 1. 서론

적층식 복합재는 층간 계면의 물성치 불연속으로 인하여 심각한 결함을 갖는 열-기계적 거동을 보인다. 이러한 결함을 완화시키기 위해 1980년도 후반에 일본에서는 기능경사재료(FGM)를 소개하였다[1]. 이 재료를 이용한 복합재의 기본 개념은 한 계면에서 반대 방향의 계면에 이르기까지 이상(dual-phase)물질의 체적 분율이 연속적으로 변화하는 경사층을 삽입하여 각 계면에서의 물성치 연속성을 유지시키는 것이다[2].

FGM은 계면에서의 치명적인 결함을 개선하는 것 외에도, 삽입된 경사층의 체적 분율이나 상대두께비를 최적으로 설계하여 주어진 성능과 목적에 가장 잘 부합하는 성능을 제공할 수 있다[3]. 그러나, 삽입되어진 경사층은 이상 물질의 복합재이기 때문에 신뢰성 있는 설계를 위해서는 그에 맞는 적절한 물성치 평가 기법이 아주 중요한 과제가 된다[4].

FGM이 소개되어진 후부터 이러한 물성치 평가는 보통의 복합재에 적용하였던 선형 혼합 법칙[5], 평균장 이론[6,7], 단위 셀 모델[8] 등을 적용하여 왔다. 이러한 방식은 열-기계적 거동의 전체적 거동을 적절히 예측해 주긴 하지만, 균질화 기법 자체가 안고 있는 가정 때문에 신뢰성 있는 국부적 거동은 예측하기가 어렵다.

일반적으로 복합재의 등가 물성치는 구성 성분의 형상과 치수, 방향, 배열 형태 그리고 구조물의 하중, 경계조건 등에 의한 함수이므로, 신뢰성 있는 FGM의 국부적 거동을 예측하기 위해, 몇가지 형태의 이산화 모델에 대한 국부적 물성치 평가 기법이 필요하게 된다. 최근 유한요소법을 이용한 이산화된 모델의 국부영역 해석이 연구되고 있다. Frujicic과 Zhang[9]은 Ghosh등[10]에 의해 제안된 Voronoi Cell 유한요소법(VCFEM)을 사용하여 FGM의 국부적 탄성 거동을 예측하기 위한 수치기법을 제안하였고, Dvorak 등[11]은 이산화된 미시구조 모델링을

\* 부산대 대학원

\*\* 부산대 공대

위해 삽입 물질을 평면 6각형 셀로 대체하여, 몇 가지 배열 형태에 대해 Mori-Tanaka법, Self-consistence법과의 비교평가를 위한 수치 해석을 수행하였다.

본 논문에서는 먼저 FGM 구조의 특성인자에 대해 간략하게 소개하고, 열-기계적 거동을 해석하기 위한 대표적인 균질화 물성치 산출기법과 이산화 모델링에 대해 설명한다. 다음으로 여러 가지 체적 분율에 대해 균질화 모델과 이산화 모델을 비교하기 위한 수치해석 결과를 제시한다.

## 2. 기능 경사 복합재

Fig. 1은 금속과 세라믹으로 구성된 2차원 기능 경사 적층 복합재를 나타낸다. 여기서,  $2d$ 는 적층 복합재의 전체 두께를,  $2d_G$ 는 경사층의 두께를 각각 나타낸다. 상부층은 100% 세라믹이고, 하부층은 100% 금속이며, 중간에 삽입된 경사층은 각 성분의 연속적인 체적 분율을 가지면서 변화한다. 주어진 하중 조건에서 FGM적층복합재의 열-기계적 거동은 이 절에서 정의되는 두 개의 매개변수에 큰 영향을 받는다.

금속과 세라믹의 체적분율  $V_m(z)$ 와  $V_c(z)$ 는 다음의 관계를 가진다.

$$V_c(z) + V_m(z) = 1 \quad (1)$$

그리고 금속의 체적분율을 다음과 같이 설정한다.

$$V_m(z) = \begin{cases} 1 & , -d \leq z \leq -d_G \\ \left[ \frac{d_G - z}{2d_G} \right]^N & , |z| \leq d_G \\ 0 & , d_G \leq z \leq d \end{cases} \quad (2)$$

여기서,  $N$ 은 금속의 체적분율을 결정짓는 양의 실수이다. Fig. 2를 보면  $N$ 이 0에 가까워

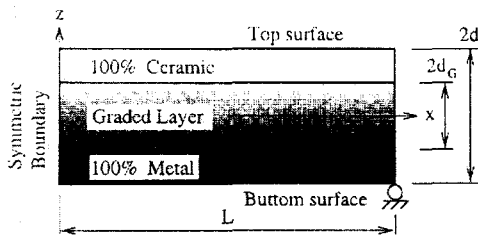


Fig. 1 Functionally graded composite

질수록 경사층은 금속의 성분을,  $N$ 이 양의 무한대에 접근할수록 세라믹의 성분을 많이 함유하게 된다.

적층 복합재 전체 두께에 대한 경사층의 상대 두께비  $\eta$ 는 다음과 같이 정의되며, 이것 또한 FGM적층 복합재의 거동에 주요한 영향을 미친다 [12].

$$\eta = \frac{d_G}{d} , 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3)$$

$\eta$ 가 0에 접근하면 FGM적층 복합재는 종래의 전통적인 적층식 복합재가 되며,  $\eta$ 가 1로 증가하면 경사층이 전체 복합재를 구성하게 된다.

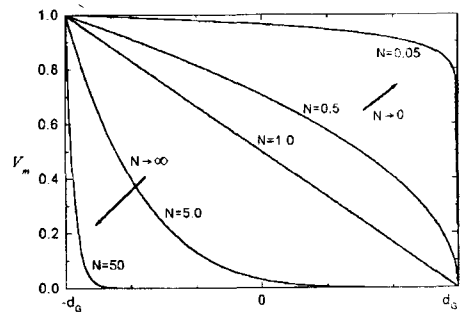


Fig. 2 Metal volume fractions  $V_m$

## 3. 경사층의 물성치 평가 기법

### 3.1 균질적 예측법

복합재의 열-기계적 거동과 등가 물성치 예측에 관한 수 많은 연구가 진행되어 왔다. 이들 연구는 크게 이론과 실험적인 측면으로 구분되어 있는데, 이론적 접근법은 다시 미시구조적 연구와 연속체 가정(균질화)에 대한 연구로 나누어지게 된다. 참고문헌(7)에 서술된 바와 같이 균질화 물성치 예측법은 크게 직접법, 변분법, 그리고 근사적 접근법의 세가지로 분류된다.

직접법은 해석적인 해를 구하지만, 엄격한 수학적 기법 때문에 까다롭게 된다[12]. 반면에 Hashin-Shtrikman의 예측범위(14)와 같은 변분법은 세밀한 기하 형상을 규정하지 않는 대신, 균질화된 물성치의 상계와 하계를 제공한다. 따라서 정확한 평가를 얻기 위해서는 추가적인 근사화가 필요하게 된다.

근사적 접근법에서는 Hill 등[12]에 의한 self-consistent 모델, Mori와 Tanaka(6)에 의한 평균장 미시역학 모델, Wakashima와

Tsukamoto[7]의 표현, 선형 혼합법칙과 Tamura 등[5]이 제안한 수정된 혼합법칙, 그리고 Ravichandran[8]에 의한 단위 셀 모델 등이 균질화 예측법으로 널리 사용되고 있다. 이러한 모델은 전체적인 열-기계적 거동과 물성치를 예측하는데 비교적 간단한 형태를 갖추고 있다. 여기서는 Wakashima-Tsukamoto의 평가와 선형 혼합법칙, 그리고 수정된 혼합법칙에 대해서 각각의 평가와 함께 설명한다.

선형 혼합법칙은 복합재를 구성하는 두 물질 A와 B의 체적분율과 물성치의 선형 결합으로 임의 지점의 물성치  $p(x)$ 를 평가하는 가장 간단한 방법이다.

$$p(x) = V_A(x)p_A(x) + V_B(x)p_B(x) \quad (4)$$

이 평가방법은 구성 성분의 형상과 혼합 구조에 대한 관계를 포함하지 않으므로 정확도나 신뢰성은 상당히 낮게 된다.

Wakashima-Tsukamoto의 예측법은 수정된 Eshelby's equivalent inclusion법과 Mori-Tanaka의 이론을 결합하여 유도된 것으로써, 거시적 체적계수  $\bar{K}$ 와 전단계수  $\bar{\mu}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{K} = K_m + \frac{aV_cK_m(K_c - K_m)}{V_mK_c + aV_cK_m} \quad (5)$$

$$\bar{\mu} = \mu_m + \frac{bV_c\mu_m(\mu_c - \mu_m)}{V_m\mu_c + bV_c\mu_m} \quad (6)$$

$$a = [K_c(3K_m + 4\mu_m)]/[K_m(3K_c + 4\mu_m)] \quad (7)$$

$$b = [(1 + e)\mu_c]/[\mu_c + e\mu_m] \quad (8)$$

$$e = [9K_m + 8\mu_m]/[6K_m + 12\mu_m] \quad (9)$$

위 식의  $\bar{K}$ 와  $\bar{\mu}$ 는 거시적 탄성계수  $\bar{E}$ , 프아송비  $\bar{\nu}$ 와 다음의 관계를 가진다.

$$\bar{E} = \frac{9\bar{K}\bar{\mu}}{(3\bar{K} + \bar{\mu})}, \quad \bar{\nu} = \frac{(3\bar{K} - 2\bar{\mu})}{2(3\bar{K} + \bar{\mu})} \quad (10)$$

그리고, 등가 열팽창계수 ( $\bar{\alpha}$ )와 열전도계수 ( $\bar{\chi}$ )는 각각 다음 식과 같다.

$$\bar{\alpha} = \frac{1/\bar{K} - 1/K_m}{1/K_c - 1/K_m} (\alpha_c - \alpha_m) + \alpha_m \quad (11)$$

$$\bar{\chi} = \frac{(1 - V_m)\chi_m(\chi_c - \chi_m)}{\chi_m + V_m(\chi_c - \chi_m)/3} + \chi_m \quad (12)$$

Tamura 등[5]은 복합재의 탄성계수 예측을 위한 수정된 혼합법칙을 제안하였다. 이 방법의 개념도를 Fig. 3에 도시하였다. 여기서 경사층의 응력과 변형률은 다음과 같이 평균응력과 평균변형률의 항으로 나타낸다.

$$\sigma = \sigma_A V_A + \sigma_B V_B, \quad \varepsilon = \varepsilon_A V_A + \varepsilon_B V_B \quad (13)$$

또한 다음 관계식

$$q = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\varepsilon_A - \varepsilon_B} \quad (14)$$

은 응력-변형률 전달율을 나타내며 여러 실험을 통한 결과, 이상(dual-phase)물질의 경우 4.5GPa의 값이 적절하다고 알려져 있다. 위의 두 식과 개념도로부터 경사층의 균질화된 탄성계수  $\bar{E}$ 는 다음과 같이 예측된다.

$$\bar{E} = \frac{V_m E_m \frac{q + E_c}{q + E_m} + (1 - V_m) E_c}{V_m \frac{q + E_c}{q + E_m} + (1 - V_m)} \quad (15)$$

반면에 등가 프아송비 ( $\bar{\nu}$ ), 열팽창계수 ( $\bar{\alpha}$ ), 열전도계수 ( $\bar{\chi}$ ) 등의 물성치는 선형 혼합법칙을 따른다.

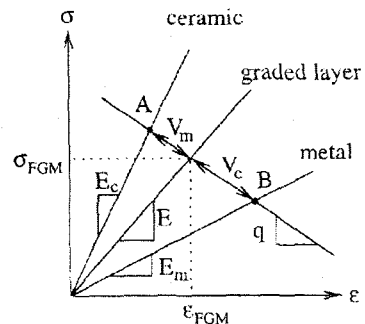
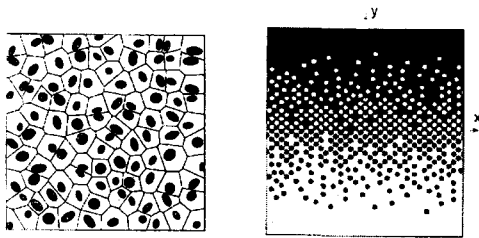


Fig. 3 Schematic representation of the modified rule of mixtures

### 3.2 이산화 모델

FGM의 비균질성 영향을 설명하기 위해서는 일반적인 균질화 방법에 대한 평가나 국부적 거동의 정확한 예측이 필요하다. 이를 위해서 최근 유한요소법을 이용한 새로운 수치기법의 연구가 많이 진행되어 왔다. 두가지 대표적인 것으로서 Grujicic과 Zhang(9)에 의한 Voronoi Cell FEM과 Dvorak 등[11]에 의한 이산화 미시역학 모델을 들 수 있다.

VCFEM은 Fig. 4(a)와 같이 복합재 영역을 Voronoi 다각형으로 연계 생성하여 해석하는 방법이다. 각각의 다각형은 하나의 삽입물질을 포함하면서 하나의 유한요소를 이루고 있다. 이 방법은 임의 분포된 이상 복합재의 신뢰성있는 국부적



(a) VCFEM (b) Discrete micro-mechanical model  
Fig. 4 Discrete FGM models

거동이나 물성치를 예측해 주지만, 상대적으로 성긴(coarse) 체눈에 의해 응력이 과대평가된다.

또한, 거시적-미시적 스케일 영향을 고려하지 않으므로 낮은 체적분율을 가진 복합재에 그 응용이 한정된다.

Dvorak의 방법은 Fig. 4(b)와 같이 경사층의 형상을 주어진 체적분율에 따라서 같은 크기의 정육면체 셀을 분포시킴으로써 생성한다. VCFEM과는 달리 각 셀은 균질이며, 몇 개의 유한요소로 구성된다. 그림과 같은 모델에 대해 일반적인 유한요소법을 사용하여 몇 가지 균질화 기법의 평가를 위한 자료를 제공하지만, 그 정확도는 배치된 셀의 조밀성에 의존하며, 모델링을 위한 노력이 많이 소모된다.

### 4. 수치실험

수치실험을 위해 Fig. 1과 같이 단순지지된 FGM보의 대칭성을 이용한 절반을 고려한다. 기하정보로써  $L=50mm$ ,  $d=5mm$ ,  $d_G=4mm$  (즉,  $\eta=0.8$ )이다. 금속과 세라믹의 재료로써 Ni와  $Al_2O_3$ 를 각각 선택하였다. 각 재료의 물성치

는 Table.1과 같다.

Table. 1 Material data of  $Al_2O_3$  and Ni

	$Al_2O_3$	Ni
E (GPa)	393.0	199.5
$\nu$	0.25	0.3
$\alpha$ ( $10^{-6}/K$ )	7.4	15.4
$\kappa$ (W/m·K)	30.1	90.7

이산화 수치모델을 형성하기 위해, 본 논문에서는 보를  $x$ 방향으로 100개,  $y$ 방향으로 60개의 균일한 직사각형 셀로 분할하였다. 각 셀에는 Dvorak의 미시역학 모델과 유사한 4절점 직사각형 유한요소를 각각 할당하였다. 여기서는 체적분율의 지수  $N$ 을 0.5, 1.0, 5.0의 세가지로 선택하였으며, 생성된 각 수치모델은 Fig. 5와 같다. 각 모델은 특정  $z$ 지점에서  $Al_2O_3$ 와 Ni셀을 주어진 체적분율에 비례하도록 배치시켜서 얻어진다. 그림에서 회색은  $Al_2O_3$ , 그리고 검은색은 Ni성분을 갖는 cell을 각각 나타낸다.

수치실험의 하중조건으로써 세가지의 하중상태, 즉 ①  $u_x=0.02mm$ 의 균일한 축방향 인장, ② 전체 보에 대해  $\Delta T=200K$ 의 균일한 온도하중, ③보의 밑면은  $300K$ , 윗면은  $500K$ 의 비균일 온도하중에 대해 각각 유한요소해석을 수행하였다.

오른쪽 끝 부분의 끝단효과(edge effect)를 배제하면, 세 가지의 각 하중조건에 대해 열-기계적 거동은  $x$ 방향에 무관하게 된다. 하지만, 미시역학 모델의 국부적 응력상태는 셀 계면사이에 매우 심한 변화를 보이므로,  $0 \leq x \leq 40mm$ 사이의 응력값에 대해 평균을 취하였다.

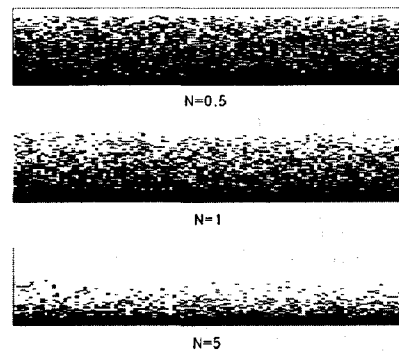


Fig. 5 Micromechanical models for 3 volume fractions

하중조건 ①에 대한 축응력의 z방향 분포를 Fig. 6에 나타내었다. 그림을 보면 각 해석모델간의 응력거동이 FGM층 내부에서 각기 다른 분포를 보임을 알 수 있다. 또한 세가지의 체적분율에 대해 선형혼합법칙이 가장 높은 수치를, 수정된 혼합법칙이 가장 낮은 수치를 보인다. 이 하중상태의 경우 이산화된 미시역학 모델의 응력상태는 선형혼합법칙과 Wakashima-Tsukamoto평가법의 사이에서 변화하고 있음을 알 수 있다.

하중조건 ②, ③에 대한 축방향의 열응력 분포를 Fig. 7(a), (b)에서 보여준다. 하중조건 ①의 경우에 비해 FGM층에서의 거동은 균질화 모델과 이산화 모델 사이에 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

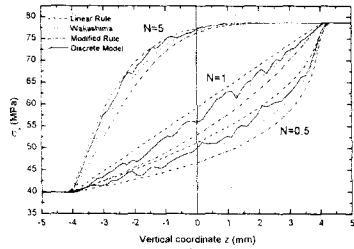
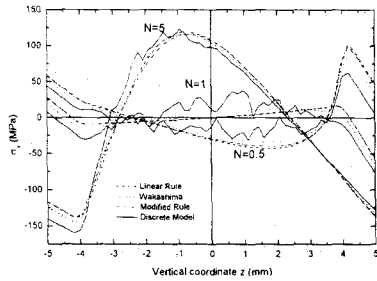
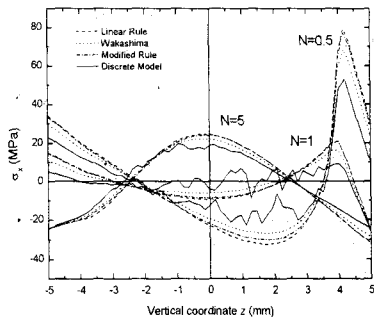


Fig. 6 Axial stress distribution for loading case ①



(a) Loading case ②

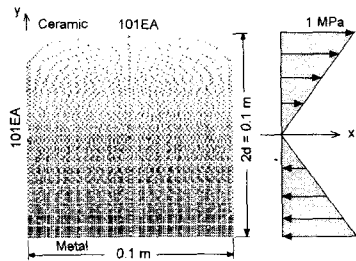


(b) Loading case ③

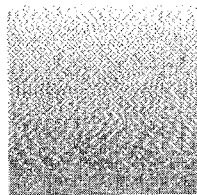
Fig. 7 Thermal stress distributions

또한 Ni과 Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>층에서도 비교적 큰 차이가 발생한다. 이 결과는 하중상태가 복잡해 질수록 균질화 예측법은 그 정확도가 감소한다는 것을 말해준다. 이러한 열하중조건인 경우 제시된 세가지 균질화법을 상대적으로 평가한다면, Wakashima-Tsukamoto평가법이 이산화 모델의 거동에 가까운 결과를 보여준다고 할 수 있다.

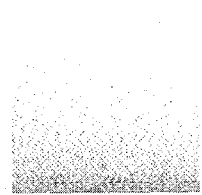
다른 수치예제로써 Fig. 8과 같은 미시구조 형상에 x방향으로 선형적인 압력을 가한 후의 거동을 살펴보았다. η=1인 정사각형 모델의 오른 쪽 단부에 그림과 같이 1MPa부터 -1MPa까지 선형적으로 변하는 압력을 가하고 왼쪽 단부에 대칭경계조건을 설정하였다. 3가지의 체적분율에 해당하는 축방향의 응력분포를 Fig. 9에 나타내었다. 각 결과에서 이산화 모델의 응력은 요소당 결과값을 출력하여 계단형의 분포를 보이고 있다. 각 응력분포의 곡선은 N값이 작을 때, FGM의 윗 부분에서 경사도의 변화가 보이지만, N값이 점차 커질수록 경사도의 변화는 아래 부분으로 변하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 하중조건인 경우에는 3가지의 균질화 평가방법이 큰차이를 보이지 않지만, 이산화 모델의 계단형 응력결과의 변화 추이는 물성치가 급격히 변하는 부분에서 큰 차이를 보임을 알 수 있다. 따라서, 전체 FGM영역에서 물성치 변화가 심한 부분은 상대적으로 국부적 응력거동의 변화가 상당히 심각할 것으로 예상된다.



(a) N=1 and loading condition

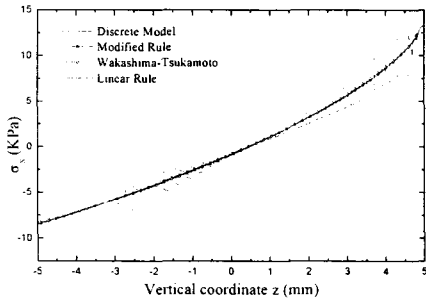


(b) N=0.5

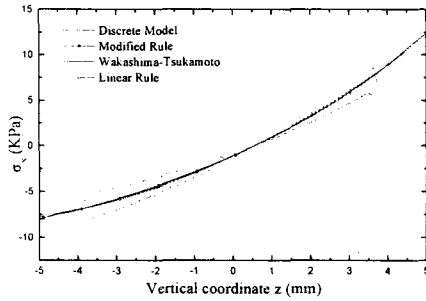


(c) N=5

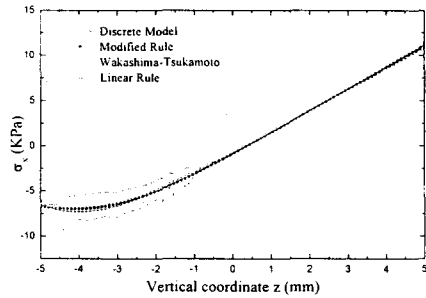
Fig. 8 Micromechanics models and pressure loading



(a)  $N=0.5$



(b)  $N=1$



(c)  $N=5$

Fig. 9 Axial stress distributions by pressure loading

## 5. 결론

본 논문에서는 FGM적층복합재의 간략한 소개와 일반적으로 사용되는 몇 가지의 균질화 예측법. 그리고 FGM의 열-기계적 거동과 물성치 예측을 위해 현재 연구되고 있는 이산화 수치 모델에 대해 설명하였다. 균질한 직사각형 셀을 적용한 이산화 미시역학 모델과 세 가지의 대표적인 균질화 예측법을 비교평가하기 위해, 세 가지의 체적 분율형태와 세 경우의 하중상태에 대해 수치 실험을 수행하였다. 수치결과로부터 균질화 모델과 이산화 모델은 FGM층 내부에서 각각 차이를 보임을 알 수 있었고, 또한 하중조건이 복잡해짐에 따라 그 차이는 더욱 커짐을 알 수 있었다. 따

라서 신뢰성 있는 FGM의 내부거동을 예측하기 위해서는 구조물 형태나 하중조건 등을 고려한 신중한 균질화 예측법의 선정이 요구된다.

## 후기

본 연구는 부산대학교 학술연구조성비(1997. 5-2001. 4) 지원에 의하여 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) M. Koizumi, 1997, *Composites Part B*, Vol. 20B, pp. 1~4.
- (2) A. E. Giannakopoulos, S. Suresh and M. Olsson, 1995, *Acta Metallurgica Materialia*, Vol. 43, No. 4, pp. 1335~1354.
- (3) J. R. Cho and J. T. Oden, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (in press).
- (4) J. R. Cho and D. Y. Ha, *Structural Engineering and Mechanics*, (in review).
- (5) Y. Tomota, K. Kuroki and T. Mori and I. Tamura, 1976, *Materials Science Engineering*, Vol. 24, pp. 85~94.
- (6) T. Mori and K. Tanaka, 1973, *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571~574.
- (7) K. Wakashima and H. Tsukamoto, 1991, *Materials Science Engineering*, Vol. A146, pp. 291~316.
- (8) K. S. Ravichandran, 1994, *J. American Ceramic Society*, Vol. 77, No. 5, pp. 1178~1184.
- (9) M. Grujicic and Y. Zhang, 1998, *Materials Science Engineering*, Vol. A251, pp. 64~76.
- (10) S. Ghosh and S. N. Mukhopadhyay, 1993, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 104, pp. 221~247.
- (11) T. Reiter, G. J. Dvorak and V. Tvergaard, 1997, *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, pp. 1281~1302.
- (12) J. R. Cho and B. G. Kim, 1999, *KSME International Journal*, Vol. 13, No. 2, pp. 108~115.
- (13) R. Hill, 1963, *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 11, pp. 357
- (14) Z. Hashin and S. Shtrikman, 1963, *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 11, pp. 127~140.