

## 증분 변형 이론을 이용한 반무한체에 접합된 두 탄성층의 좌굴 해석

정경문\* · 범현규\*\*

### Buckling Analysis of Two Elastic Layers Bonded to a Semi-Infinite Substrate Using Incremental Deformation Theory

Kyoung Moon Jeong and Hyeon Gyu Beom

**Key Words:** buckling(좌굴), incremental deformation theory(증분 변형 이론), semi-infinite substrate(반무한체), wavelength(파장)

#### Abstract

The buckling of two elastic layers bonded to a semi-infinite substrate under a transverse compressive plane strain is investigated. Incremental deformation theory is employed to describe the buckling behavior of both two isotropic layers and the semi-infinite substrate. The problem is converted to an eigenvalue-eigenvector case, from which the critical buckling strain and the wavelength of the buckled shape are obtained. The results are presented on the effects of the layer geometries and material properties on the buckling behavior.

#### 1. 서 론

탄성 모재와 접합된 층의 좌굴은 최근에 반도체 산업에서 중요하게 여겨져 왔다. 고집적화로 인해 평판의 층수가 계속 증가되어지고 있으므로, 이러한 적층 구조는 고온에서 조립된 후 상온으로 냉각 될 때의 온도차나 사용 중에 발생하는 온도 변화 그리고 열팽창 계수의 차이로 인해 층이 좌굴 변형을 일으켜 결국 층간 박리와 같은 영구적인 파손이 된다. 따라서 이러한 적층 구조의 신뢰성 향상을 위해 탄성 모재에 접합된 층의 좌굴 변형에 관한 연구는 필수적이다.

이러한 문제는 초기에 좌굴 하중이 샌드위치 패널의 압축 강도보다 항상 낮기 때문에 항공기

에서 샌드위치 패널의 좌굴을 연구하는 계기가 되었다.<sup>(1,2)</sup> 샌드위치 패널의 구조는 두 가지 형태의 좌굴로 주로 해석된다. 샌드위치 패널 전체를 균질한 평판으로 좌굴을 해석하는 방법과 단지 외피(face layer)에서만 좌굴을 일으키고, 중간층 재질(core material)은 탄성지지로만 작용하는 것이다. 본 연구의 모델로는 후자의 경우에 속한다.

최근 반도체 산업 분야의 고속 성장으로 인해 연구가 활발하게 진행되고 있는 반무한체에 접합된 탄성층의 좌굴에 관한 연구<sup>(3,4,5)</sup>를 하고자 한다. 특히, 층수가 증가된 두 등방성 층이 접합되었을 때의 좌굴에 주안점을 두고 있다. Shield 등<sup>(4)</sup>은 평면 변형률시 탄성 모재에 접합된 층의 좌굴을 해석하는데 탄성학의 수학적 이론을 적용하였다. 탄성층을 보 이론으로 적용한 근사해와 비교하였고, 보 이론 모델은 반무한체와 등방성층의 강성비가 100이하에서 발생하는 좌굴 변형률은 3%를 초과할 때까지는 적당하다는 결과를 제

\* 전남대학교 대학원 기계공학과

\*\* 회원, 전남대학교 기계공학과

시하였다. Hwang<sup>(5)</sup>은 층과 반무한체가 직교 이방성 재료일 때 Biot<sup>(6)</sup>의 증분 변형 이론을 층과 반무한체에 각각 적용하여 좌굴 변형에 미치는 직교 이방성의 영향을 해석하였다. 본 연구에서는 층 수가 증가된 반무한체에 두 개의 탄성층에 대한 좌굴을 해석하고자 한다. 두 개의 탄성층에 대한 문제의 수식화는 증분 변형 이론을 층과 반무한체에 적용하였다. 또한 두 등방성 층에 대한 두께 비와 재료 물성치를 달리하여 좌굴 변형률과 좌굴 좌장에 미치는 영향을 연구하고자 한다. 본 연구의 해석 결과에 대해 중간층의 두께 변화와 강성에 따라 접착 영역(adhesive zone)과 금속간 화합물(intermetallics)로 결합되어진 구조로 생각하여 좌굴 변형에 미치는 영향을 해석하고자 한다.

## 2. 문제의 수식화

증분 변형의 탄성 이론은 초기에 응력을 받은 물체가 증분 응력을 받을 때 초기 응력장의 영향을 증분 응력장으로 해석하는 것이다. 이러한 이론은 안정성(stability) 문제에 매우 적합하고, 이전의 연구가들에 의해 증분 변형 이론이 적용된 몇몇 연구 결과가 보고되고 있다.<sup>(5,7,8,9)</sup>

각 영역에서 증분 응력  $\sigma_{ij}$ 에 대한 일반적인 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + S_{jk}\omega_{ik,j} + S_{ik}\omega_{jk,i} = 0 \quad (1)$$

여기에서 초기 응력  $S_{jk}$ 는 균일하고 체력(body force)은 무시한다. 그리고 하첨자 쉼표(,)는 미분을 나타내고,  $\omega_{ij}$ 는 증분 회전(incremental rotation)을 나타낸다. 표면 트래クション(traction)은 식 (1)과 관련되어 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_i = (\sigma_{ij} + S_{kj}\omega_{ik} + S_{ij}\varepsilon - S_{ik}\varepsilon_{jk})n_j \quad (2)$$

여기서  $T_i$ 는 단위 수직 벡터  $n_j$ 를 갖는 표면에 대한 트래క్ష의  $i$  번째 성분이고,  $\varepsilon_{jk}$ 와  $\varepsilon$ 은 증분 변형률이며,  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ 이다.

반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 반무한체에 접합된 두 개의

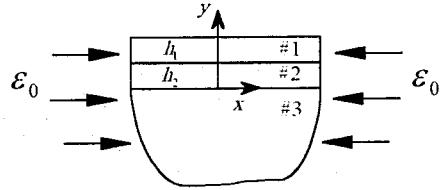


Fig. 1 Geometry of two isotropic layers bonded to a semi-infinite substrate.

층이 축 방향( $x$  방향)으로 압축 변형률을 받는다 면, 초기의 평형 상태는 두 개의 층이 직선인 상태로 남게 된다.  $y$ 방향의 수직 변위에 대한 평형 상태는, 초기 변형에 미소하게 작은 증분 변형을 중첩시켜 알 수 있다. 각각 두 개의 평형 상태는 미소하게 작용하므로 동시에 발생할 수 있다. 따라서, 어느 임계점에 도달하면 분기(bifurcation)가 발생하게 되고, 그 때의 임계 좌굴 응력이나 변형률을 계산할 수 있다.

두 개의 층과 반무한체는 균질하고, 등방성이며 선형 응력-변형률 관계를 만족한다. 그리고, 문제는 평면 변형률 상태로 가정한다. 증분 변형의 탄성 이론은 탄성층과 반무한체의 거동을 나타내는데 각각 적용된다. 여기서 해석하고자 하는 2차원 문제에서 지시 기호(indicial notation)는 생략하고, Cartesian 좌표계가 사용된다. Fig. 1에서 층의 두께는 각각  $h_1$ 과  $h_2$ 이고, #1, #2, #3은 각각 층과 반무한체를 나타내며, 앞으로 사용하게 될 수식에서 위첨자로 표기하였다. 반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 초기 응력은 다음과 같다.

$$S_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_0 \quad (3)$$

여기서  $\varepsilon_0$ 는 초기 변형률이고,  $E$ 는 Young 계수.

$\nu$ 는 Poisson 비이다. 평면 변형률(plane strain) 문제에서  $z$ 방향의 증분 변형률을 영(zero)으로 가정하고,  $x$ 와  $y$ 방향의 증분 변위는  $z$  방향과는 무관하게  $u(x, y)$ 와  $v(x, y)$ 로 나타낼 수 있다.

등방성 재료에 대한 증분 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\
\sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\
\sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0
\end{aligned}
\tag{4}$$

여기서  $\lambda$ 와  $\mu$ 는  $E$ 와  $\nu$ 로 표현되는 Lamé 상수이다. 식 (4)에서 응력은  $z$  방향과는 무관하다는 것을 알 수 있다. 따라서, 증분 응력에 대한 평형 방정식 (1)은 다음과 같이 줄어든다.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + S_{xx}\omega_{yx,y} &= 0 \\
\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + S_{xx}\omega_{yx,x} &= 0
\end{aligned}
\tag{5}$$

여기서  $\omega_{yx}$ 는 증분 회전이며,  $\omega_{yx} = (v_{,x} - u_{,y})/2$  이다. 두 등방성 층과 반무한체에 대한  $x$ 와  $y$  방향의 증분 변형 상태는 다음과 같은 표현으로 좌굴된 형태를 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \phi(\alpha, y) \sin \alpha x \\
v(x, y) &= \psi(\alpha, y) \cos \alpha x
\end{aligned}
\tag{6}$$

여기서  $\alpha = \pi/l$ 이고  $l$ 은 반 좌굴이다. 식 (4)와 (6)를 이용하여 식 (5)을 풀면, 변위장과 응력장은  $\phi(\alpha, y)$ 와  $\psi(\alpha, y)$ 의 함수로 나타낼 수 있다. 그러므로, 증분 변위와 증분 응력장의 표현은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= [Ae^{p\alpha y} + Be^{-p\alpha y} + Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}] \sin \alpha x \\
v(x, y) &= [qAe^{p\alpha y} - qBe^{-p\alpha y} - Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}] \cos \alpha x \\
\sigma_{yy}(x, y) &= [\{\lambda + p\alpha(\lambda + 2\mu)\}Ae^{p\alpha y} + \{\lambda + p\alpha(\lambda + 2\mu)\}Be^{-p\alpha y} - 2\mu Ce^{\alpha y} - 2\mu De^{-\alpha y}] \alpha \cos \alpha x \\
\sigma_{xy}(x, y) &= [\mu(p - q)Ae^{p\alpha y} - \mu(p - q)Be^{-p\alpha y} + 2\mu Ce^{\alpha y} - 2\mu De^{-\alpha y}] \alpha \sin \alpha x
\end{aligned}
\tag{7}$$

여기서,

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{\frac{2\mu + S_{xx}}{2\mu - S_{xx}}}, \\
q &= \frac{-2\lambda - 2\mu + S_{xx}}{p(2\lambda + 2\mu + S_{xx})}
\end{aligned}
\tag{8}$$

이다. A, B, C, D는 임의의 상수이다. 식 (7)은 두 개의 층과 반무한체에 각각 적용된다. 그리고, 층과 반무한체에 대한 변수와 미지수를 구별하는데 위첨자로 표기하였다. 반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 표면의 트랙션인 식(2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
T_x &= \left(1 - \frac{S_{xx}}{\mu}\right) \sigma_{yy} \\
T_y &= \sigma_{xy}
\end{aligned}
\tag{9}$$

Fig. 1에서  $y = h_1 + h_2$ 인 표면에는 트랙션은 없고,  $y = 0$ 과  $y = h_2$ 인 계면(interface)에서 변위와 트랙션은 연속(continuous)이어야 하므로 경계 조건을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^{\#1}(x, h_1 + h_2) &= 0 \\
\sigma_{xy}^{\#1}(x, h_1 + h_2) &= 0 \\
u^{\#1}(x, h_2) &= u^{\#2}(x, h_2) \\
v^{\#1}(x, h_2) &= v^{\#2}(x, h_2) \\
\sigma_{yy}^{\#1}(x, h_2) &= \sigma_{yy}^{\#2}(x, h_2) \\
\left(1 - \frac{S_{xx}^{\#1}}{\mu^{\#1}}\right) \sigma_{xy}^{\#1}(x, h_2) &= \left(1 - \frac{S_{xx}^{\#2}}{\mu^{\#2}}\right) \sigma_{xy}^{\#2}(x, h_2) \\
u^{\#2}(x, 0) &= u^{\#3}(x, 0) \\
v^{\#2}(x, 0) &= v^{\#3}(x, 0) \\
\sigma_{yy}^{\#2}(x, 0) &= \sigma_{yy}^{\#3}(x, 0) \\
\left(1 - \frac{S_{xx}^{\#2}}{\mu^{\#2}}\right) \sigma_{xy}^{\#2}(x, 0) &= \left(1 - \frac{S_{xx}^{\#3}}{\mu^{\#3}}\right) \sigma_{xy}^{\#3}(x, 0)
\end{aligned}
\tag{10}$$

위첨자 #1, #2는 등방성 층을, #3은 반무한체를 나타낸다. 반무한체가 계면( $y = 0$ )에서 매우 멀리 갈 때, 즉  $y \rightarrow -\infty$ , 증분 변위와 응력은 영(zero)이 된다. 그러므로, 반무한체에서 임의의 상수  $B^{\#3}$ 과  $D^{\#3}$ 은 영이 된다. 식 (7)을 이용하여 경계 조건 (10)을 대수 방정식(algebraic equation)

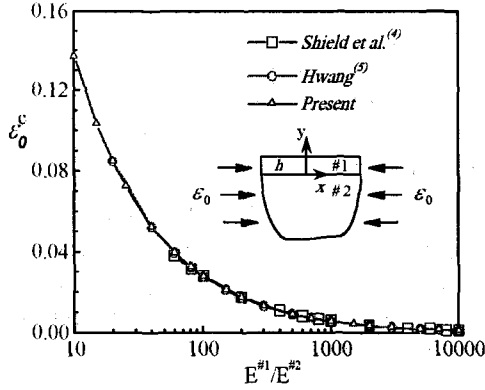


Fig. 2 Comparing present solution, Shield et al. and Hwang with critical buckling strains.

으로 표현하면 다음과 같다.

$$[a]\{Y\} = 0 \quad (11)$$

여기에서  $\{Y\}^T = (A^{#1}, B^{#1}, C^{#1}, D^{#1}, A^{#2}, B^{#2}, C^{#2}, D^{#2}, A^{#3}, C^{#3})$ 이다. 행렬  $[a]$ 는 초기 응력  $S_{xx}^{#1}$ ,  $S_{xx}^{#2}$ 과  $S_{xx}^{#3}$ 을 포함한  $10 \times 10$ 행렬이다. 미지수 행렬  $\{Y\}$ 에 대한 유용해(non-trivial solution)가 존재하기 위해서는 행렬  $[a]$ 의 행렬식(determinant)이 영이 되어야 한다. 임계 좌굴 응력과 변형률은 행렬  $[a]$ 의 행렬식이 영으로 되면서 가장 작은 초기 응력과 변형률 상태에서 결정된다. 수치 해석으로는 좌굴 변형률과 파장의 광범위한 초기 추측 값들을 이용하여 이분법(bisection method)을 적용하였다. 변형률이 최소가 될 때의 변형률이 임계 좌굴 변형률이고, 그에 대응되는 파장이 좌굴 파장으로 결정된다.

### 3. 결과 및 토론

본 연구에서 얻은 해석 결과의 타당성을 검증하기 위해 행렬  $[a]$ 의 행렬식에서 두 등방성 층의 Young 계수가 같고, 포아송 비(Poisson's ratio)는  $\nu^{#1} = \nu^{#2} = \nu^{#3} = 0.25$ 이고, 층 #1과 #2의 두께를  $h = h_1 + h_2$ 라 하면, Shield 등<sup>(4)</sup>이 연구한 분제와 동일하다. 임계 좌굴 변형률의 부호를 기존의 해석 결과와 비교하기 위해 변형률은

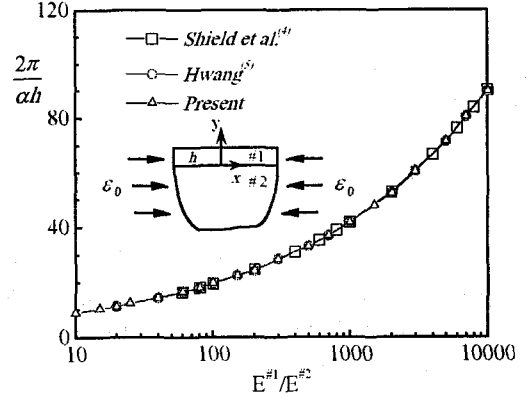


Fig. 3 Comparing present solution, Shield et al. and Hwang with buckling wavelenghts.

$\epsilon_{xx} = -\epsilon_0$ 인 관계로 일치시켰다. Fig. 2에서 등방성 층과 반무한체의 강성비( $E^1/E^2$ )의 함수로서 임계 좌굴 변형률  $\epsilon_0^c$ 이 Shield 등<sup>(4)</sup>과 일치하였다. 또한, Fig. 3에서는 무차원화시킨 좌굴 파장  $(2\pi/ah)$ 도 정확하게 일치하였다. Figs. 2와 3에서 등방성 층과 반무한체에 대한 임계 좌굴 변형률과 무차원화시킨 좌굴 파장을 기존의 해석 결과<sup>(4,5)</sup>와 비교하여 일치하였으므로 본 연구의 해석 결과가 타당함을 알 수 있다.

두 등방성 층과 반무한체에 각각 증분 변형 이론을 적용하여 층의 기하학적 형상과 재료 물성치가 좌굴 변형에 미치는 영향을 해석하였다. Fig. 4는 두 등방성 층의 Young 계수가 같을 때 ( $E^1 = E^2$ ), 임계 좌굴 변형률과 무차원화시킨 좌굴 파장을 나타내었다. 본 연구의 해석 결과에서 포아송 비(Poisson's ratio)는  $\nu^{#1} = \nu^{#2} = \nu^{#3} = 0.25$ 이고, 무차원화시킨 좌굴 파장  $(2\pi/ah_1)$ 은 층 #1의 파장만을 나타내었다. 두 등방성 층의 Young 계수가 같으므로 임계 좌굴 변형률은 등방성 층 #1과 #2의 두께 비(thickness ratio,  $h_2/h_1$ )에 의존하지 않지만(Fig. 4(a)), 무차원화시킨 좌굴 파장은 중간층 #2의 두께가 증가하면서 상대적으로 층 #1은 매우 큰 좌굴 파장을 보이며 좌굴 변형을 일으킨다는 것을 알 수 있다(Fig. 4(b)).

Figs. 5, 6, 7은 층 #2와 반무한체의 강성 비가 일정( $E^2/E^3 = 10, 100, 300$ )할 때 층 #1과 반무한체의 강성비( $E^1/E^3$ )의 함수로 층 #2의 두께 변화에

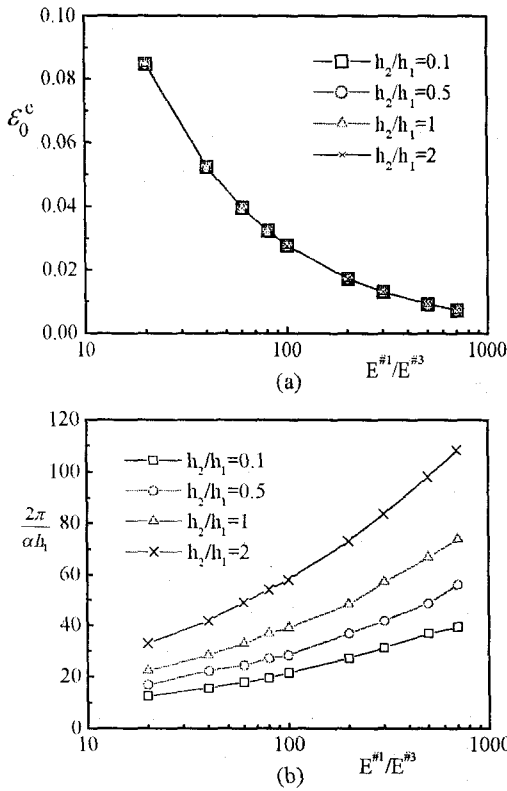


Fig. 4 Two isotropic layers bonded to a semi-infinite substrate when  $E^{\#1}=E^{\#2}$ . (a) Critical buckling strains. (b) Buckling wavelengths of an isotropic layer #1.

따라 임계 좌굴 변형률을 나타내었다. 층 #2가 층 #1보다 강성이 더 크면( $E^{\#2}>E^{\#1}$ ) 층 #2의 두께가 증가할 때 좌굴 변형이 쉽게 발생한다. 그러나 층 #2가 층 #1보다 강성이 작으면( $E^{\#2}<E^{\#1}$ ) 층 #2의 두께가 증가하면서 좌굴 변형이 발생하기가 상대적으로 더 어렵다. 이러한 현상은 층 #1의 강성이 작을 때 더욱 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다. 그러나, 층 #1과 층 #2의 강성이 너무 크게 차이가 나면 좌굴 변형률에 미치는 영향은 두께 비에 거의 의존하지 않고 반무한체에 하나의 층이 집합되어진 구조와 일치하게 된다. Fig. 8은 두 층의 재료 물성치가 같을 때 층 #1과 층 #2의 두께 비 ( $h_2/h_1$ )의 함수로서 임계 좌굴 변형률과 무차원화시킨 좌굴 파장을 나타내었다. Fig. 8(a)에서 좌굴 변형률은 두 등방성 층의 Young 계수가 같을 때( $E^{\#1}=E^{\#2}$ ) 층의 두께 변화에 의존하지 않고 일정한 값을 나타내며 Fig. 4(a)와 같은 결

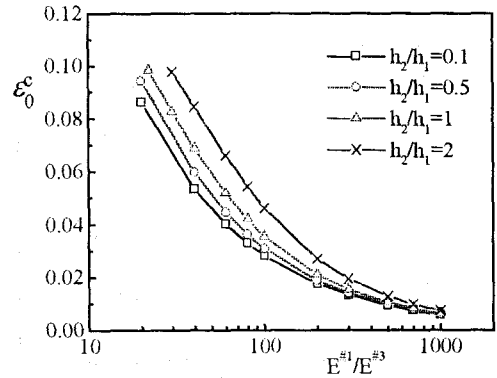


Fig. 5 Critical buckling strains. ( $E^{\#2}/E^{\#3}=10$ )

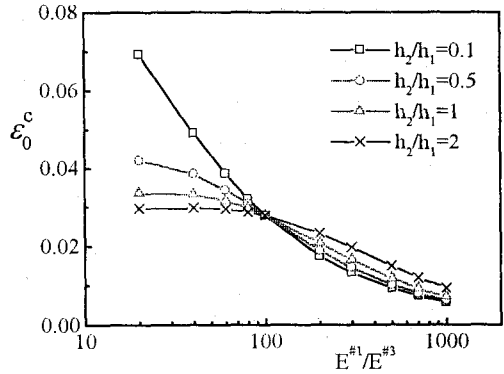


Fig. 6 Critical buckling strains. ( $E^{\#2}/E^{\#3}=100$ )

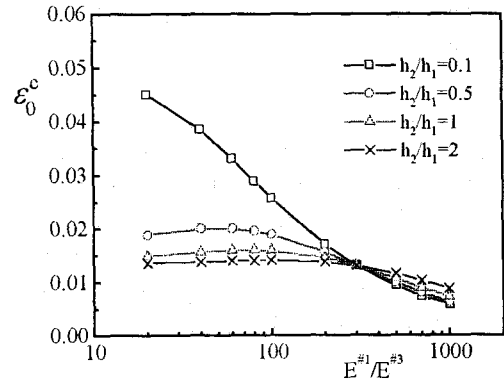
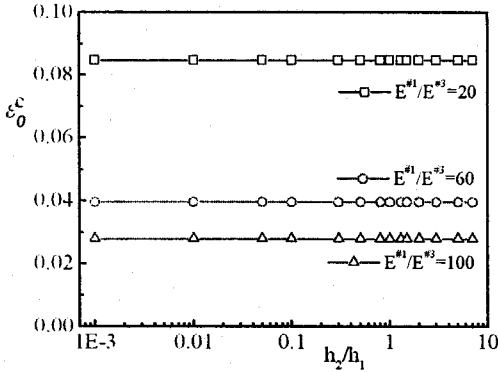
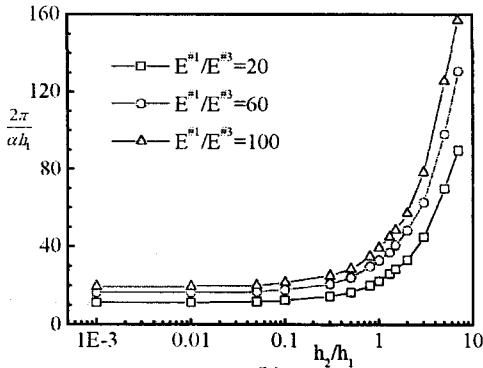


Fig. 7 Critical buckling strains. ( $E^{\#2}/E^{\#3}=300$ )

과를 보여준다. Fig. 8(b)는 층 #1과 층 #2의 두께 비 ( $h_2/h_1$ )의 함수로 두 등방성 층의 강성을 달리하여 층 #1에 미치는 좌굴 파장의 영향을 나타내었다. 층 #2의 두께가 층 #1보다 증가하면서



(a)



(b)

Fig. 8 Two isotropic layers bonded to a semi-infinite substrate when  $E^1 = E^2$ . (a) Critical buckling strains. (b) Buckling wavelengths of an isotropic layer #1.

층 #1의 무차원화된 좌굴 파장은 급격하게 커지면서 좌굴을 발생시킨다. 반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 좌굴 변형률과 좌굴 파장은 층의 기하학적 형상과 재료 물성치 변화에 매우 큰 영향을 받는다. 특히, 층 #2의 두께가 증가하거나 층 #1의 강성이 작은 곳에서 층 #2의 강성이 매우 클 때 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다.

#### 4. 결론

반무한체에 접합된 두 탄성층의 좌굴 변형을 해석하였다. 두 등방성 층의 좌굴 변형률과 좌굴 파장은 증분 변형 이론을 적용하였다. 기존의 연구<sup>(4,5)</sup>와는 달리 본 연구에서는 두 등방성 층의 기하학적 형상과 재료 물성치가 좌굴 변형에 미치는 영향을 나타내었다. 좌굴 변형률은 두 등방

성 층의 강성비가 100이하에서 두께변화와 강성비에 매우 민감함을 알 수 있다. 낮은 강성비로 층과 반무한체가 접합되어진 구조에서 좌굴 발생 후에 일어나는 층간 박리현상은 두 등방성 층의 두께와 재료 물성치의 변화가 제품의 신뢰성 평가에 중요한 인자가 됨을 알 수 있다.

#### 후 기

본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구(981-1012-071-2) 지원으로 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) Gough, G. S., Elam, C. F. and De Bruyne, N. A., 1940, "The Stabilization of a Thin Sheet by a Continuous Supporting Medium." J. Royal Aero. Soc., Vol. 44, No. 34, pp. 12-43.
- (2) Hoff, N. J. and Mautner, S. E., 1945, "The Buckling of Sandwich Type Panels." J. Aero. Sci., Vol. 12, No. 3, pp. 285-297.
- (3) Dorris, J. F. and Nemet-Nasser, S., 1980, "Instability of a Layer on a Half Space." ASME, J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 304-312.
- (4) Shield, T. W., Kim, K. S. and Shield, R. T., 1994, "The Buckling of an Elastic Layer Bonded to an Elastic Substrate in Plane Strain." ASME, J. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 231-235.
- (5) Hwang, S. F., 1998, "The Buckling of an Orthotropic Layer on a Half-Space." Int. J. Mech. Sci., Vol. 40, No. 7, pp. 711-721.
- (6) Biot, M. A., 1965, Mechanics of Incremental Deformations. Wiley, New York.
- (7) Goodier, J. N., 1946, "Cylindrical Buckling of Sandwich Plates." ASME, J. Appl. Mech., Vol. 13, pp. A253-A260.
- (8) Chung, W. Y. and Testa, R. B., 1969, "The Elastic Stability of Fiber in a Composite Plate." J. Comp. Mater., Vol. 3, pp. 58-80.
- (9) Christensen, R. M., 1994, "Material Instability for Fiber Composites." ASME, J. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 476-477.