

# 압축하중을 받는 박판 4각튜브의 소성좌굴 연구

김천옥\* · 한병기\*\* · 김종민\*\*\*

## Study on the Plastic Buckling of Thin Rectangular Tubes under Compression

C.W. Kim, B.K. Han and J.M. Kim

**Key Words:** Thin-walled rectangular tube(박판 4각튜브), Plastic buckling(소성좌굴), Plastic flow(소성흐름), Thickness-width ratio(후폭비)

### Abstract

In the present paper the plastic buckling of thin-walled rectangular tube is analyzed. The stress-strain relations of the plates of the tube are idealized into nonlinear material of Ramberg and Osgood. Computing elastic moduli of the nonlinear material a precise plastic buckling stress has determined. The plastic buckling stress of the wider plate of the tube is considered as the crippling strength of the tube. The present theory is in good agreement with the experiments in various thickness-width ratios and materials.

#### 기호설명

- $E$  : 탄성계수
- $E_s$  : 시퀀트계수
- $E_t$  : 접선계수
- $K$  : 직4각튜브의 탄성좌굴계수
- $P_{max}$  : 직4각튜브의 최대압괴하중
- $\sigma_{cr(plastic)}$  : 직4각평판의 소성좌굴응력
- $\sigma_{cr(tube)}$  : 직4각튜브의 압괴강도
- $t/b$  : 직4각튜브 좌굴판의 후폭비

#### 1. 서론

차체의 대부분을 구성하고 있는 박판 4각튜브의 압괴특성 및 에너지 흡수능력의 정확한 예측을 위해서는 그 거동에 대한 적절한 모델링과 이

해가 필요하다. 이러한 박판 구조물은 스틱모델<sup>[1]</sup> 해석에서 사각튜브로 등가치환 할 수 있다. 이러한 부재들은 거의 항복응력에 도달하지 못하고 좌굴이 발생하게 된다. 차체 앞부분은 정면충돌시 대부분의 에너지를 흡수하므로 압축하중을 받는 박판 사각튜브의 좌굴응력과 극한강도는 여러 논문에서 연구되었다<sup>[2-6]</sup>.

Mahmood와 Paluszny<sup>[4]</sup>는 압축하중을 받는 4각튜브의 붕괴거동에 대한 일반식을 반실험적으로 제시하였다. 그들은 최대압괴하중을 Stowell<sup>[7]</sup>의 매개변수를 이용하여 구하였다. 탄성좌굴응력과 이 매개변수로 후폭비에 따른 4각튜브의 압괴강도를 유도하였다. 이 식에서 지수  $n$ 은 실험적으로 0.43이 된다. 그러나 이 값은 넓은 범위의 후폭비와 재료에 대해 적절하지 못하다.

본 논문에서는 박판4각튜브의 압괴강도를 판의 소성좌굴응력으로부터 유도한다. 튜브의 판요소는 단순지지 조건으로 가정하고 판의 소성좌굴응력은 재료의 기계적 성질에 의해 결정된다. 재료의 응력-변형률 선도는 Ramberg와 Osgood<sup>[8]</sup>의 비선형식으로 이상화되고 이로부터 탄성계수들이 구해진다. 이론의 정밀성을 검토하기 위해 직4각

\* 정회원, 연세대학교 기계공학과

\*\* 정회원, 홍익대학교 기계공학과

\*\*\* 연세대학교 대학원 기계공학과

튜브에 대한 압괴시험을 실시하였으며 기존 연구자의 해석결과와도 비교, 검토하였다.

## 2. 이론

### 2.1 평판의 소성좌굴

판의 두께가 비교적 두꺼워 탄성좌굴응력이 항복응력을 초과하게 되면 소성좌굴 현상이 나타난다.  $x$ 축 방향으로 압축하중을 받는 판의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.<sup>[9]</sup>

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

비선형 구간에서의 응력-변형을 관계는 다음과 같다.

$$\sigma = E_s \varepsilon \quad (2)$$

여기서 시킨트계수  $E_s$ 는 상수가 아니고 응력과 변형률의 함수이다. 좌굴이 일어나는 동안 판의 응력상태는 평면응력상태에 있으므로 다음과 같이 소성 응력-변형을 관계를 가정한다.<sup>[8]</sup>

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_s} (\sigma_x - \nu_p \sigma_y) \quad (3.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_s} (\sigma_y - \nu_p \sigma_x) \quad (3.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu_p)}{E_s} \tau_{xy} \quad (3.c)$$

여기서 프와송의 비( $\nu_p$ )는 비압축성 변형일 때 0.5이다. 지금 두께가  $t$  이고 폭이  $b$  인 평판이 압축하중  $\sigma_x$ 를 받으면 소성구간으로 압축되며, 좌굴이 일어난 후에는 응력증분과 변형률증분 관계가 성립된다. 식(3)과 증분 관계식을 사용하여  $x$  방향으로 압축하중을 받는 판의 소성좌굴에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\left( \nu_p^2 + (1 - \nu_p^2) \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

직사각형인 평판의 끝단이 단순지지조건일 경우 식(4)의 해는 탄성좌굴의 경우와 유사하며  $n=1$  을 취하면 다음과 같다.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_s}{12(1 - \nu_p^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left[ \left\{ \nu_p^2 + (1 - \nu_p^2) \frac{E_t}{E_s} \right\} \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + 2 + \left( \frac{a}{mb} \right)^2 \right] \quad (5)$$

식(5)는  $\partial \sigma_{cr} / \partial m = 0$ 을 수행함으로써 최소화 할 수 있으며 그 결과는

$$\left( \frac{a}{mb} \right)^4 = \left( \nu_p^2 + (1 - \nu_p^2) \frac{E_t}{E_s} \right) \quad (6)$$

이고, 이를 식(5)에 대입하면 다음과 같다.

$$\sigma_{cr(plastic)} = \frac{\pi^2 E_s}{12(1 - \nu_p^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \times \left[ 2 + 2 \left( \nu_p^2 + (1 - \nu_p^2) \frac{E_t}{E_s} \right)^{1/2} \right] \quad (7)$$

이 식에 소성변형시 비압축성을 고려하여  $\nu_p = 1/2$  로 하면 Gerard<sup>[10]</sup>의 결과와 일치한다.

### 2.2 재료의 비선형 거동

소성역에서 재료의 응력-변형률 선도와 접선계수를 표현하기 위하여 여러 가지 방법들이 있는데 Ramberg-Osgood<sup>[8]</sup>은 다음 관계식을 제시하였다.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \chi \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n \quad (8)$$

여기서  $\chi$ 와  $n$ 은 상수이다. 이 식은 다음과 같은 무차원화 된 응력과 변형률로 표현할 수 있다.

$$e = \frac{\epsilon E}{\sigma_1} \quad s = \frac{\sigma}{\sigma_1} \quad (9)$$

여기서  $\sigma_1$ 은 시컨트 항복응력이고, Fig. 1에 나타나 있다. Fig. 1에서  $m_1$ 은 0과 1사이의 상수이다. 실험적인 방법으로  $m_1$ 을 고정함으로써 식(9)는 비슷한 거동을 하는 재료의 응력-변형률 선도들을 하나의 곡선으로 만들 수 있다. 그러면 응력-변형률의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.<sup>[11]</sup>

$$e = s + \frac{1-m_1}{m_1} s^n \quad (10)$$

식(10)을 이용하여  $m_1$ 과  $n$ 값을 적절히 선정하면 무차원 응력-변형률 선도를 도출할 수 있다.

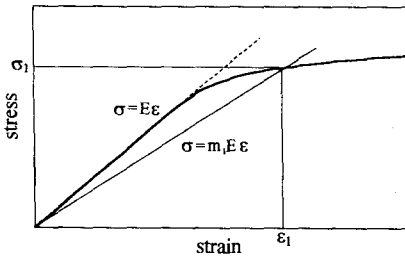


Figure 1. Determination of secant yield strength  $\sigma_1$ .

접선계수  $E_t$ 는 응력-변형률 선도에서 주어진 응력에 해당되는 점의 접선 기울기이므로 다음 관계식으로 표시할 수 있다.<sup>[11]</sup>

$$\frac{E_t}{E} = 1 + \frac{n(1-m_1)}{m_1} s^{n-1} \quad (11)$$

식(9)에서 응력  $\sigma$ 를 소성좌굴응력  $\sigma_{cr}$ 로 대체하면 다음식을 얻는다.

$$\frac{E_t}{E} = \frac{1}{1 + \frac{n(1-m_1)}{m_1} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}} \quad (12)$$

응력-변형률 선도위의 어느 한점에서 원점을

이은 직선의 기울기가 시컨트계수  $E_s$ 이므로 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{E_s}{E} = \frac{1}{1 + \frac{(1-m_1)}{m_1} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}} \quad (13)$$

식(12)와 (13)을 식(7)에 대입하면 4변이 단순지 지된 판에 대한 소성좌굴응력을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{cr(Plastic)} = \frac{m_1 \pi^2 E}{\left[ m_1 + (1-m_1) \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1} \right] 12(1-\nu_p^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \times \left[ 2 + 2 \left( \nu_p^2 + (1-\nu_p^2) \frac{m_1 + (1-m_1) \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}}{m_1 + n(1-m_1) \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}} \right)^{1/2} \right] \quad (14)$$

## 2.2 박판 4각튜브의 압괴

박판 4각튜브가 Fig. 2와 같이 압축응력을 받을 때, 튜브가 매우 얇다고 가정하면 하중을 받지 않는 모서리는 근사적으로 단순지지조건을 만족한다.<sup>[6]</sup>

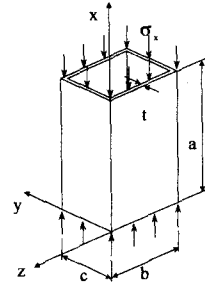


Figure 2. A rectangular tube subjected to compressive stress.

일반적으로 박판 4각튜브에서는 폭이 넓은 판의 좌굴응력이 좁은 판의 좌굴응력보다 낮으므로 먼저 좌굴되며, 폭이 좁은 판은 구속판으로 작용한다. Bleich<sup>[12]</sup>는 직4각튜브의 탄성좌굴계수( $K$ )에 대한 근사해를 단순지지 조건에서 다음과 같이 제시하였다.

$$K = p + 2\sqrt{q} \quad (15)$$

여기서  $p$ 와  $q$ 는 모서리의 구속조건으로 직4각 튜브의 경우에는 단면의 중형비( $c/b$ )에 따른 계수이다. 직4각튜브의 두께가 일정할 경우 단면중형비에 대한  $K$ 의 값을 Fig. 3에 나타내었다.

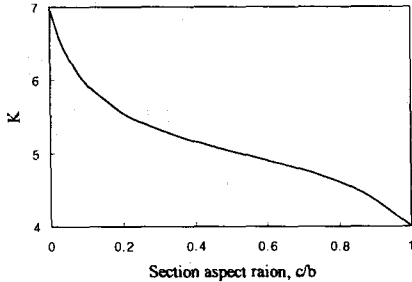


Figure 3. Buckling coefficient  $K$  as a function of section aspect ratio ( $c/b$ ) of thin-walled tubes

좌굴계수  $K$ 를 사용하면 박판 4각튜브의 좌굴응력은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sigma_{cr(\text{tube})} = \frac{K\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{m_1}{[m_1 + (1-m_1)\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}]} \times \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \nu_p^2 + (1-\nu_p^2) \frac{m_1 + (1-m_1)\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}}{m_1 + n(1-m_1)\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_1}\right)^{n-1}} \right)^{1/2} \right] \quad (16)$$

4각튜브의 압괴강도가 소성좌굴응력과 같다고 가정하면 최대압괴하중은 다음과 같다.

$$P_{\max} = 2\sigma_{cr}(b+c)t \quad (17)$$

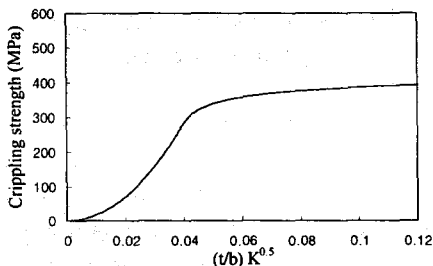


Figure 4. Crippling strength of mild steel tubes with the width to thickness ratio( $t/b$ )

Fig. 4는 재료의 기계적 성질이  $\sigma_y = 354$  MPa,

$\sigma_u = 394$  MPa,  $m_1 = 0.2$ ,  $n = 25$  인 박판 직4각튜브에 대하여 후폭비( $t/b$ )에 따른 압괴강도의 변화를 보여주고 있다.

### 3. 실험

본 연구에서 시험편은 일반 구조용강으로 제작된 완제품의 직4각튜브(A~C type)와 냉연강판 SCP1으로 절곡가공된 직4각튜브(D~J type)를 사용하였다. Table 1은 시험편의 치수를 나타낸다.

압괴실험에 사용된 시편과 동일한 재료에서 채취하고 인장실험으로부터 항복응력, 극한강도, 탄성계수를 찾아내었다. 응력-변형률 선도로부터 비선형계수인  $m_1$ 과  $n$ 을 근사적으로 결정하였다. Fig. 5는 이 비선형계수를 결정하는 방법을 보여준다.

Table 1 Dimensions of specimens

specimen	b (mm)	c (mm)	t (mm)	a (mm)	t/b
A	40	40	2.2	250	0.0550
B	60	40	2.2	250	0.0367
C	50	30	1.4	250	0.0280
D	20	10	1.0	50	0.0500
E	30	20	1.0	100	0.0333
F	50	30	1.0	150	0.0200
G	70	50	1.0	300	0.0143
H	80	80	1.0	400	0.0125
I	100	100	1.0	400	0.0100
J	130	130	1.0	400	0.0077

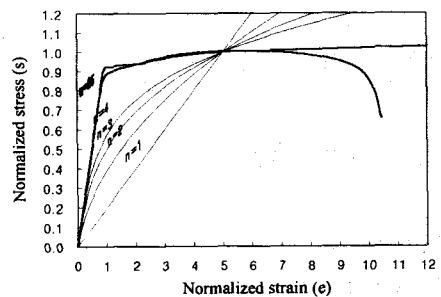


Figure 5. Idealized stress-strain curve for determination of the nonlinear coefficients  $m_1(0.2)$  and  $n(25)$  of structural steel 'A' type specimen.

각각의 시편에 대한 인장시험 결과와 이들로 부터 찾은 비선형계수들을 Table 2에 정리하였다.

Table 2 Mechanical properties of the specimen

specimen type	A	B	C	D~J
Young's modulus (E) [MPa]	192923	199273	196147	185004
Poisson's ratio ( $\nu$ )	0.3			
Yielding strength ( $\sigma_y$ ) [MPa]	360.84	346.53	354.37	170.52
Ultimate strength ( $\sigma_u$ ) [MPa]	393.96	389.26	397.10	304.00
Elongation [%]	18~25			30~40
Nonlinear coefficient, $m_1$	0.2	0.2	0.2	0.15
Nonlinear coefficient, $n$	25	25	25	7

#### 4. 검토 및 고찰

압축하중을 받는 박판 4각튜브의 응력이 임계 응력에 도달하면 튜브는 붕괴되는데 이때 야코빈 모양의 연속적인 주름을 형성하거나 혹은 불 연속적인 주름을 형성한다. 보통 후폭비( $t/b$ )가 0.016보다 큰 튜브에 대해서 주름이 형성된다. Fig. 6은 압괴가 일어난 시편의 사진을 보여주고 있다. 후폭비가 비교적 큰 A~C type의 시편은 주름이 연속적으로 생성됨을 보이지만 후폭비가 넓은 영역에 존재하는 D~J type의 시편은 후폭 비가 감소함에 따라 생성된 주름사이에 초기의 평면상태를 일부 유지하고 있다. 이는 후폭비가 큰 튜브에서 발생하는 소성흐름(plastic flow)이 후 폭비가 매우 작은 튜브에서는 충분히 발달되지 않음을 나타낸다.

Fig. 7은 후폭비가 큰 A type의 시편과 상대적으로 매우 작은 I type의 시편에 대한 압괴시험시 하중-변위선도를 보여준다. A type의 경우에는 최대압괴하중에 도달하는 과정에서 소성흐름이 발달하면서 선형에서 비선형 관계로 전환되는 반면에 I type의 경우는 최대압괴하중에 도달할 때까지 거의 선형적으로 비례하고 탄성좌굴을 일으킬 수 있다. 한편 A type의 경우 좌굴 후 하중-변위선도가 사인곡선을 그리는데 반하여 I type의 경우 그렇지 않은데 이는 탄성좌굴이 압 괴거동을 지배하기 때문이다.

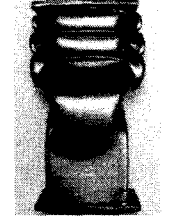


(a) A type specimen ( $t/b = 0.055$ )

(b) I type specimen ( $t/b = 0.01$ )



(c) B type specimen ( $t/b = 0.0367$ )



(d) G type specimen ( $t/b = 0.0143$ )

Figure 6. Photographs of crushed thin-walled rectangular tubes.

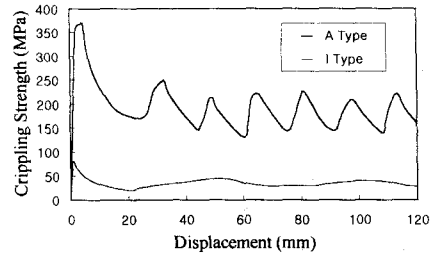


Figure 7. Load-displacement curves of crushed rectangular tubes.

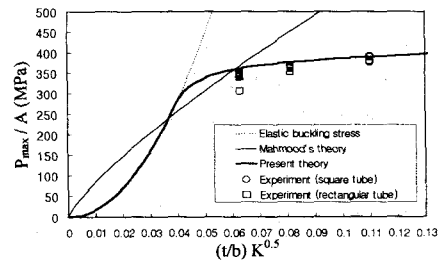


Figure 8. Comparison of the present theory and experiments.

Fig. 8은 시편 A~C type에 대한 실험결과를 보여준다. 후폭비가 임계후폭비보다 작을 때는 탄성좌굴응력식과 압괴강도식(16)은 동일한 값을 가짐을 보인다. 후폭비가 임계후폭비 이상이 되면 소성흐름이 발달하며 탄성좌굴이 적용되지 않음을 알 수 있다. Mahmood의 최대압괴강도식<sup>(4)</sup>은 탄성좌굴응력식에 항복응력을 도입하고 실험값을 고려하여 결정된 것으로 실험값보다는 크게 나타난다.

## 5. 결론

본 논문에서는 소성좌굴이론을 이용하여 압축하중을 받는 박판 4각튜브의 압괴강도를 구하였다. 본연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 두께가 비교적 두꺼운 4각튜브의 새로운 압괴식을 제안하였다. 재료의 계수를 정확하게 계산함으로써 튜브의 넓은 판의 소성좌굴응력을 구하였다.

2. 후폭비가 큰 4각튜브의 경우 규칙적인 주름을 형성하며 압괴되고 압괴강도가 증가하지만 특정한 값 이상에서는 거의 일정한 값에 수렴하는 경향을 갖는다. 따라서 압괴하중의 증가만을 위해 후폭비를 너무 크게 하는 것은 설계에 실효가 없다.

## 참고문헌

- (1) Kim, C. W. and Kim, J. H., "Light Weight Vehicle Design by Stick Model", Journal of KSAE, Vol. 12, No. 5, 1990, pp. 97-106.
- (2) Magee, C. L. and Thornton, P. H., "Design Considerations in Energy Absorption by Structural Collapse," SAE Technical Paper No. 780434, 1978.
- (3) Thornton, P. H., "Energy Absorption by the Structural Collapse of Spot-Welded Sheet Metal Sections," SAE Technical Paper No. 800372, 1980.
- (4) Mahmood, H. F. and Paluszny, A., "Design of Thin Walled Columns for Crash Energy management-Their Strength and Mode of Collapse," SAE Technical Paper, No. 811302, 1981.

- (5) Wierzbicki, T. and Abromowicz, W., "On the Crushing Mechanics of Thin-Walled Structures," Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, No. 4, 1983, pp. 727-734.
- (6) Li, S. and Reid, S. R., "Relationship between the Elastic Buckling of Square Tubes and Rectangular Plates," Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, No. 4, 1990, pp. 969-973.
- (7) Stowell, Z. E., "Compressive Strength of Flanges," NACA Technical Note No. 2020, 1950.
- (8) Ramberg, W. and Osgood, W. R., "Description of Stress-strain Curves by Three Parameters," NACA TN 902, July 1943.
- (9) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, 2nd Edi., 1963.
- (10) Gerard, G., Introduction to Structural Stability Theory, McGraw-Hill Book Co., New York, 1962.
- (11) Jeong, C. H., "A Study on Plastic Buckling of a Thin-Walled Rectangular Tube", MS Thesis, Yonsei University, February, 1999.
- (12) Bleich, F., Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.