

연속체-보 천이 유한요소의 구성

박우진* · 임장근**

Formulation Method of a Solid-To-Beam Transitional Finite Element

Park Woo Jin and Lim Jang Keun

Key Words : Transitional Finite Element(천이 유한요소), Hexahedral Solid Element(육면체 고체요소), Quadrilateral Plane Element(사면체 평면요소), Euler's Beam Element(오일러 보요소), Isoparametric Formulation(등매개변수수식화), Compatible Displacement Field(적합변위장)

Abstract

Various transition elements are generally used for the effective analysis of a complicated mechanical structure. In this paper, a solid-to-beam transition finite element which connects a continuum element and a C^1 -continuity beam element each other is proposed. The shape functions of the transition finite elements, which a 8-noded hexahedral solid element for 3D analysis and a 4-noded quadrilateral plane element for 2D analysis are connected to a Euler's beam element, are explicitly formulated. In order to show the effectiveness and convergence characteristics of the proposed transition elements, numerical tests are performed for various examples and their results are compared with those obtained by other methods. As the result of this study, following conclusions are obtained: (1)The proposed transition finite elements show the monotonic convergence characteristics because of having used the compatible displacement fields. (2)As being used the transition element in the finite element analysis, the finite element modelings are more convenient and the analysis results are more accurate because of the formulation characteristics of the Euler's beam element.

1. 서론

구조물을 유한요소법으로 해석할 때 요소의 선정은 해의 신뢰성과 유효성 측면에서 매우 중요하다. 특히 기계구조물과 같이 구조요소(structure element)^(1,2)로 모델링하기 어려운 경우에는 대부분 연속체요소(continuum element)^(1,2)로 분할하여 해석한다.

그러나, 복잡한 기계구조물을 연속체요소로 모델링할 때, 유한요소해석의 입력자료를 준비하는 데에는 상당한 노력과 시간이 필요하다. 해석하고자 하는 구조물이 평면 문제인 경우에는 비교적 수월하게 처리할 수 있으나 3 차원 고체인 경우에

는 해석모델링과 입력자료작성이 쉽지 않다. 따라서, 최근에는 상용패키지 프로그램의 요소자동생성모듈을 이용함으로써 모델링과 입력자료작성을 자동화할 수 있으나 생성된 요소의 특성과 자동화 루틴의 내용을 잘 이해하지 못하면 해석결과의 신뢰성에 문제가 된다.

복잡한 구조물을 효과적으로 해석하고 특히 모델링에 소요되는 시간과 노력을 줄이기 위하여 천이 유한요소(transitional finite element)를 사용한다.

천이 유한요소에는 두 가지 종류가 있다. 한 가지는 고차요소(higher order element)에서 저차요소(lower order element)로 분할하거나 요소의 크기를 조정할 때 사용되는 천이요소로서 요소의 적합성(compatibility)과 연속성을 만족시키기 위하여 여러 가지 연구결과가 보고되어 있으며^(3,4) 최근 적응유한요소해석(adaptive finite element analysis)에 주로 사용된다. 또 하나의 다른 천이유한요소는 종류가

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교 기계공학부

서로 다른 요소로써 한 가지 구조물을 분할할 때 연결되는 절점에서 자유도와 주변수(primary variable)가 다르기 때문에 생기는 역학적인 문제를 해결하기 위하여 개발된 요소이다. 이와 같은 특성의 천이 유한요소로는 대표적으로 T.C.Gmur와 R.H.Kauten⁽⁵⁾이 제안한 고체요소(solid element)와 보요소를 연결하는 천이 요소가 있다.

이 천이 유한요소는 등매개변수수식화(isoparametric formulation)^(5,6)에 의하여 구성되기 때문에 수식이 복잡하고 C¹ 연속성의 오일러보요소와 연결할 때에는 적합성이 문제된다.

본 논문에서는 연속체요소와 보요소를 연결하는 천이 유한요소의 새로운 구성법을 제안하고자 한다. 연속체요소는 2차원평면요소와 3차원고체요소의 저차요소를 사용하고 보요소는 C¹ 연속성의 오일러보를 기준으로 한다.

천이 유한요소에 연결되는 절점에서는 연속체요소와 보요소가 가지는 변위의 형상함수를 그대로 도입하여 요소방정식을 구성함으로써 적합성을 만족시키고자 한다. 제안한 천이 유한요소의 특성과 정확도를 보이기 위하여 여러가지 문제에 수치실험을 수행하고 그 결과를 검토하고자 한다.

2. 천이 유한요소의 구성법

형태가 서로 다른 유한요소를 연결하기 위한 천이 유한요소는 요소의 차수와 종류에 따라서 여러 가지를 생각할 수 있으나 전형적으로 연속체요소(continuum element)와 보요소(beam element)를 연결하는 연속체-보 천이 유한요소를 생각할 수 있다.

Fig.1(a)는 사변형 평면요소(quadrilateral plane element)와 평면보요소를 연결하는 천이 유한요소이고 Fig.1(b)는 육면체고체요소(hexahedral solid element)와 보요소를 연결하는 천이 유한요소이다.

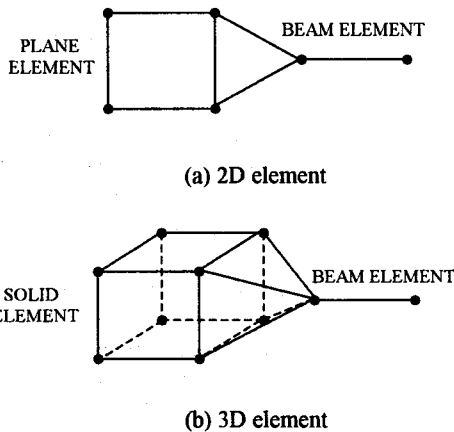


Fig. 1 Solid-to-beam transitional elements.

면요소와 고체요소는 연속체요소(continuum element)로서 모두 등매개변수수식화(isoparametric formulation)에 의해서 구성된다. 4절점 사변형 평면요소는 선형요소로서 Fig.2와 같이 등매개변수 사상되고 이에 따른 사상함수(mapping function)또는 형상함수는 다음과 같이 얻어진다.⁽¹⁻⁴⁾

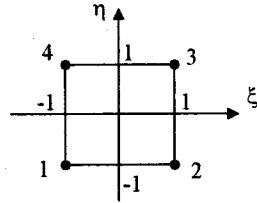


Fig. 2 Four-noded quadrilateral plane element.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (1)$$

한편, 8절점 육면체 고체요소는 Fig.3과 같이 등매개변수사상(isoparametric mapping)되고 이에 따른 사상함수 및 형상함수는 다음과 같다.⁽¹⁻⁴⁾

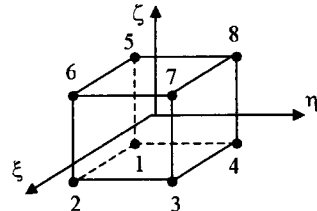


Fig. 3 Eight-noded hexahedral solid element.

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \quad N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \quad N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (2)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \quad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), \quad N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

이들 연속체요소는 C⁰ 연속성을 갖기 때문에 주변수는 각 방향의 변위(displacement)가 된다. 그러나 이들과 연결되는 보요소는 C¹ 연속성을 갖기 때문에 변위와 그의 미계수까지를 주변수로 잡아야 한다. Fig.4는 전형적인 오일러보(Euler beam)요소의 절점자유도를 보인다.

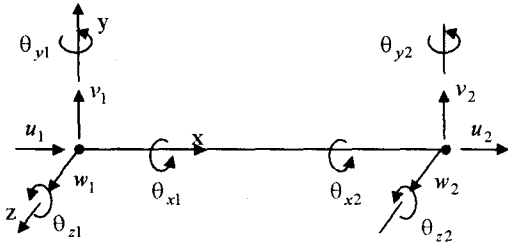


Fig. 4 Euler's beam element.

절점자유도를 보인다

오일러보에서 변위 u, v, w 와 각 방향의 회전각 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 사이에는 다음 관계가 성립한다.^(2,4)

$$\begin{aligned} u_x &= u + z\theta_y - y\theta_z \\ u_y &= v - z\theta_x \\ u_z &= w + y\theta_x \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)에서 u, v, w 는 x, y, z 방향의 중립축 변위를 의미하고 θ_x 는 비틀각(torsional angle)이고, θ_y, θ_z 는 y, z 방향의 처짐각(deflection angle)으로 변위와 다음 관계를 갖는다.^(2,4)

$$\begin{aligned} \theta_y &= -\frac{dw}{dx} \\ \theta_z &= \frac{dv}{dx} \end{aligned} \quad (4)$$

이제, Fig.4 와 같은 오일러보에 대하여 식 (3),(4)를 만족하는 변위의 형상함수(shape function) 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (5)$$

식 (5)에서 $\{u\}^T = [u_x \ u_y \ u_z]$ 로서 각 방향의 변위벡터이고 $\{d\}^T = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}]$ 인 요소의 절점변위벡터를 의미한다.

한편, 형상함수행렬은 다음과 같이 표현된다

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & -\frac{a}{2}\eta N_3' & -\frac{b}{2}\zeta N_3' & 0 & \frac{b}{2}\zeta N_4' & -\frac{a}{2}\eta N_4' & N_2 & -\frac{a}{2}\eta N_5' & -\frac{b}{5}\zeta N_5' & 0 & \frac{b}{2}\zeta N_6' & -\frac{a}{2}\eta N_6' \\ 0 & N_3 & 0 & -\frac{b}{2}\zeta N_1 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & -\frac{b}{2}\zeta N_2 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & \frac{a}{2}\eta N_1 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & \frac{a}{2}\eta N_2 & -N_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } N_1 &= 1 - \xi, & N_2 &= \xi \\ N_3 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & N_4 &= 6\xi(1 - \xi)^2 \\ N_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & N_6 &= 1(-\xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (7)$$

이고 $\xi = \frac{x}{l}, \eta = \frac{2y}{l}, \zeta = \frac{2z}{l}$ 인 무차원 좌표계로 $0 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta, \zeta \leq 1$ 의 범위를 만족하도록 설정된다. 따라서 l 는 보요소의 길이이고, a, b 는 연결되는 연속체요소의 y, z 방향의 높이와 폭을 의미한다. 그리고 N_1' 는 N_1 의 x 에 관한 미분값을 의미한다.

이제 연속체요소와 보요소를 연결하는 천이 유한요소의 형상함수를 구하기 위하여 Fig.5 와 같은 2차원 3절점의 천이 유한요소를 생각한다.

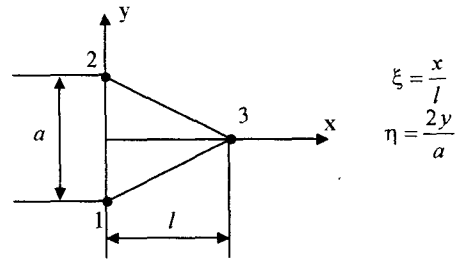


Fig. 5 Two dimensional transition element with three nodes.

Fig.5 에서 절점 1,2 는 평면요소의 절점이고 절점 3 은 C^1 의 연속성의 오일러보요소의 절점이다. 따라서 식(1)과 (6)에서 이들 절점에 해당되는 형상함수로서 천이유한요소의 변위성분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{u\}_2 = [N]_2 \{d\}_2 \quad (8)$$

단, $\{u\}_2^T = [u \ v]$ 이고 $\{d\}_2^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ \theta_{z3}]$ 이다. 식 (8)에서 형상함수 $[N]_2$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[N]_2 = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 & N_1^b & 0 & -\frac{a}{2}\eta N_1^b \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s & 0 & N_2^b & N_3^b \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{단, } N_1^s = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2^s = \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_1^b = \xi, \quad N_2^b = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad N_3^b = 1(\xi^2 - \xi^3) \quad (10)$$

그리고 3 차원 고체 요소와 보요소를 연결하기 위한 천이유한요소로 Fig.6 과 같이 5 절점의 가장 간단한 요소를 생각할 수 있다.

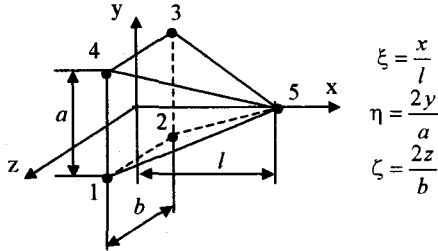


Fig. 6 Three dimensional transition element with five nodes.

Fig.6 에서 절점 1,2,3,4 는 고체요소의 절점이고 절점 5 는 C^1 연속성의 3 차원 오일러보요소의 절점이다. 따라서 식 (1)과 (6)에서 이들 절점에 관한 형상함수로서 3 차원 천이 유한요소의 변위 성분을 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\{u\}_3 = [N]_3 \{d\}_3 \quad (11)$$

단, $\{u\}_3^T = [u \ v \ w]$ 이고 $\{d\}_3^T = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \ u_5 \ v_5 \ w_5 \ \theta_{x5} \theta_{y5} \theta_{z5}\}$ 이다.

식 (11)에서 형상함수 $[N]_3$ 는 다음과 같다.

$$[N]_3 = [N]_s + [N]_b \quad (12)$$

$$[N]_s = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & 0 & N_2^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & 0 & N_2^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^s & 0 & 0 & N_2^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$[N]_b = \begin{bmatrix} N_1^b & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} N_1^b & -\frac{a}{2} \eta N_1^b \\ 0 & N_2^b & 0 & -\frac{b}{2} \zeta N_1^b & 0 & -N_3^b \\ 0 & 0 & N_2^b & \frac{a}{2} \eta N_1^b & N_3^b & 0 \end{bmatrix} \quad (13b)$$

$$\text{단, } N_1^s = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_2^s = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (14)$$

$$N_3^s = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_4^s = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

이고 식(13b)의 N_1^b, N_2^b, N_3^b 는 식 (10)의 표현과 동일하다.

이제, 식(9),(12)로 표현한 형상함수로서 천이 유한요소와 행렬방정식을 구하는 방법은 일반 유한요소법의 요소 방정식을 구하는 과정^(1,2,4) 과 동일하게 구할 수 있다.

3. 수치 계산 및 검토

앞 절에서 구성한 연속체-보 천이 유한요소의 특성과 정확도를 조사하기 위하여 몇가지 간단한 문제에 대하여 수치계산을 수행하고 그 결과를 검토하고자 한다.

3.1 외팔보 문제

우선, Fig.7 과 같이 사각형단면을 갖고 끝단 하중 P 를 받는 외팔보문제를 여러가지 방법으로 해석한다.

Fig.8 은 Fig.7 의 외팔보를 유한요소법으로 해석하기 위한 해석 모델을 보인다. Fig.8(a)는 10 개의 평면요소만으로 모델링한 것이고 Fig.8(b)는 한 개의 3 절점 천이 유한요소를 써서 4 개의 평면요소와 5 개의 보요소를 연결하여 모델링한 것이다.

Fig.8(a)와 같이 모델링하는 것보다 Fig.8(b)와

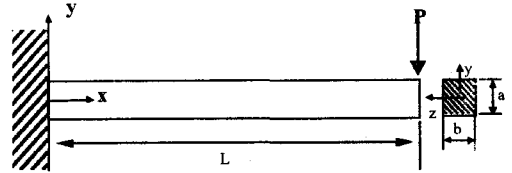
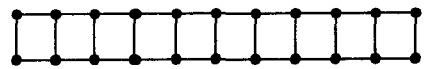
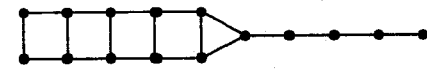


Fig. 7 Cantilever beam with a tip load.



(a) plane element



(b) transition element



(c) beam element

Fig. 8 Two dimension finite element models of the cantilever beam.

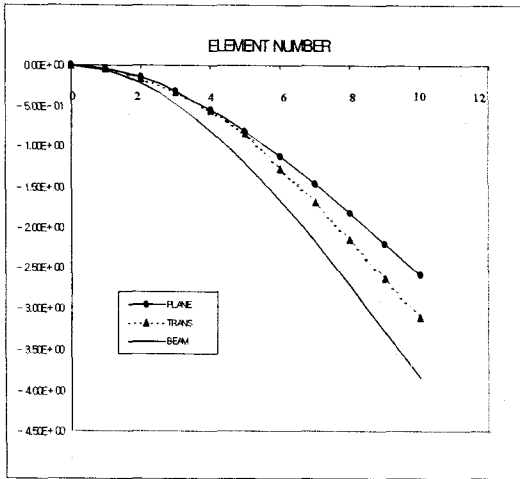


Fig. 9 Nodal displacements according to finite element modeling methods.

같이 천이 유한요소를 사용하면 약 22%의 절점수를 줄여서 해석하는 효과를 가진다. Fig.8(c)는 천이 유한요소의 정확도를 보이기 위하여 보요소만으로 모델링한 것이다. Fig.9는 이들의 해석결과에서 절점변위만을 비교하여 도시한 것이다.

Fig.9 에서 알 수 있듯이 천이 유한요소를 사용하여 해석한 것이 평면요소만을 사용하여 해석한 것보다 최대변위가 약 5%정도 큰 값을 보인다. 이 경우에 보요소만으로 해석한 결과는 엄밀해(exact solution)로 볼 수 있으며 이들 결과를 서로 비교해보면 평면요소만으로 해석하는 것보다 천이 유한요소를 사용하여 해석하는 것이 해의 정확도를 향상시키고 절점수도 줄일 수 있는 매우 효과적인 방법임을 알 수 있다.

Fig.10 은 Fig.7 의 외팔보를 3 차원으로 해석하기 위한 유한요소모델이다. Fig.10(a)는 10 개의 3

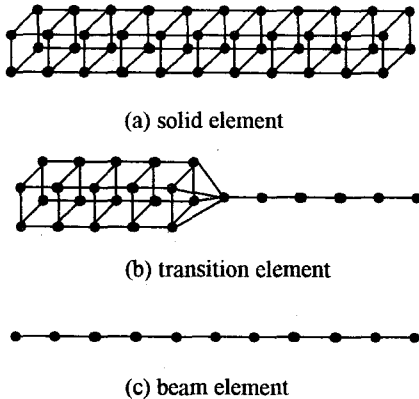


Fig. 10 Three dimensional finite element models of the cantilever beam.

차원 고체요소모델이고 Fig.10(b)는 천이유한요소를 사용한 모델, Fig.10(c)는 10 개의 보요소만으로 분할한 모델이다. 이들의 결과는 Fig.9 와 유사한 결과를 보이며 천이 유한요소를 사용한 모델이 고체요소만으로 분할한 모델보다 약 41%의 절점수를 줄이면서도 더 정확한 해석결과를 얻을 수 있음을 보인다.

3.2 커넥팅 로드

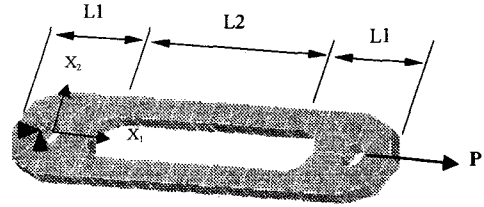


Fig. 11 Typical connecting rod.

Fig.11 은 기계구조물에 사용되는 전형적인 커넥팅로드로서 2 차원 평면응력문제라 해석할 수 있다. 이것을 유한요소법으로 해석하기 위해서는 Fig.12 와 같이 평면부재와 보로 구성되었다고 생각하여 해석모델을 작성할 수 있다.

Fig.12(a)는 평면요소만으로 구성한 것이고 Fig.12(b)는 4 개의 천이 유한요소를 사용하여 평면요소와 보요소로 구성한 모델이다. 이들의 해석결과는 3.1 절에서 설명한 외팔보와 유사한 특성을 보인다.

3.3 곡선 링크

Fig.13 은 전형적인 3 차원 곡선링크를 보인다.

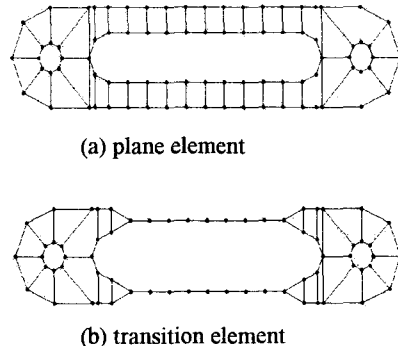


Fig. 12 Two dimensional finite element models of the connecting rod.

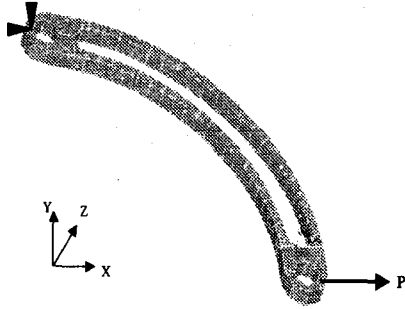


Fig. 13 Curved link of a robot manipulator.

이 곡선링크를 유한요소법으로 해석하기 위해서는 Fig.14(a)와 같이 3 차원 고체요소만으로 모델링하거나 Fig.14(b)와 같이 천이 유한요소를 사용하여 고체요소와 보요소로써 모델링을 할 수도 있다. 그러나 천이 유한요소를 사용하면 모델링을 비교적 수월하게 할 수 있으며 적합성도 만족시켜 정확도면에서도 매우 우수한 결과를 얻을 수 있다.

Fig.13 은 전형적인 3 차원 곡선링크를 보인다. 이 곡선링크를 유한요소법으로 해석하기 위해서는

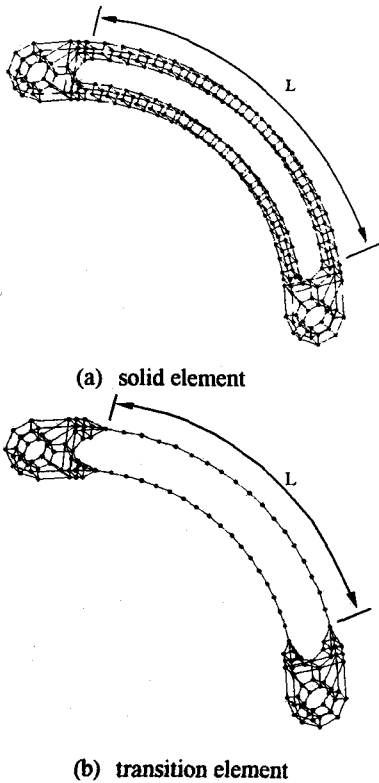


Fig. 14 Three dimensional finite element models of the curved link.

Fig.14(a)와 같이 3 차원 고체요소만으로 모델링하거나 Fig.14(b)와 같이 천이 유한요소를 사용하여 고체요소와 보요소로써 모델링을 할 수도 있다. 그러나 천이 유한요소를 사용하면 모델링을 비교적 수월하게 할 수 있으며 적합성도 만족시켜 정확도면에서도 매우 우수한 결과를 얻을 수 있다

4. 결 론

복잡한 기계구조물을 유한요소법으로 해석할 때 요소분할을 편리하게 하고 해의 정확도도 향상시키기 위하여 천이유한요소를 구성하였다. 연속체요소와 보요소를 연결시킬 수 있는 2 차원 3 절점 요소와 3 차원 5 절점 요소를 제안하였으며 이들 천이 유한요소의 특성과 정확도를 보이기 위하여 수치실험을 수행하였다. 연구결과로 다음 결론을 얻었다.

- (1) 천이 유한요소는 고체절점과 보절점에서 적합성을 만족시키기 때문에 정확도가 우수하다.
- (2) 천이 유한요소를 사용하여 연속체요소를 보요소로 모델링하면 연속체요소만으로 모델링하여 해석한 것보다 절점수를 줄일 수 있으며 보다 정확한 해석결과를 얻을 수 있다.
- (3) 천이 유한요소를 사용하여 모델링하면 연속체요소만으로 모델링하는 것보다 훨씬 편리하다.

참고문헌

- (1) Bathe, K. J.,1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- (2) Reddy, J.N.,1993, *An Introduction to the Finite Element Method*, 2 nd Edit., McGraw-Hill.
- (3) Gupta, A. K.,1978, "A Finite Element for Transition from a Fine to a Coarse Grid", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.12, No.1, pp.35-45.
- (4) Cook, R. D., Malkus, D. S. And Plesha, M. E., *Concept and Applications of Finite Element Analysis*, 3 rd Edit., John Wiley & Sons, New York.
- (5) Gmür, T. C. and Kauten, R. H., 1993, "Three-Dimensional Solid-to-Beam Transition Elements for Structural Dynamics Analysis", *International journal numerical. methods in engineering*, Vol. 36, pp.1429-1444
- (6) Surana, K. S.,1980, "Shape Functions for the Isoparametric Transition Elements for Cross-Sectional Properties and Stress Analysis of Beams". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.15, pp.1403-1407