

# R-P 법에 의한 이차원 평면문제의 적응 유한요소 해석

정상욱\* · 임장근\*\*

## Adaptive Finite Element Analysis of 2-D Plane Problems Using the R-P version

Sang Wook Chung and Jang Keun Lim

**Key Words :** Adaptive Finite Element Analysis(적응유한요소해석), R-P method(R-P 방법), Error Estimation(오차평가), R-method(R-방법), P-method(P-방법)

### Abstract

Adaptive finite element analysis, which its solution error meets with the user defined allowable error, is recently used for improving reliability of finite element analysis results. This adaptive analysis is composed of two procedures; one is the error estimation of an analysis result and another is the reconstruction of finite elements. In the rp-method, an element size is controlled by relocating of nodal positions(r-method) and the order of an element shape function is determined by the hierarchical polynomial(p-method) corresponding to the element solution error. In order to show the effectiveness and accuracy of the suggested rp-method, various numerical examples were analyzed and these analysis results were examined by comparing with those obtained by the existed methods. As a result of this study, following conclusions are obtained. (1) rp-method is more accurate and effective than the r- and p-method. (2) The solution convergency of the rp-method is controlled by means of the iterative calculation numbers of the r- and p- method each other.

### 1. 서론

유한요소법은 해석 영역을 유한 개의 요소들로 분할하여 근사해를 얻는 수치 해법이기 때문에, 요소 분할 방법과 요소의 구성 상태에 따라 해의 정확도가 좌우된다. 유한요소 해석 결과가 실제 구조물의 설계 및 안전성 평가 등에 직접 응용될 때 유한요소해의 신뢰성 평가는 대단히 중요한 문제이지만 일반적으로 엄밀해를 모르기 때문에 이의 평가는 현실적으로 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 유한요소 해석을 위한 최적의 요소망 구성과 오차 평가 문제를 병행하여 연구가 진행되어 왔다.

유한요소해의 오차를 평가하는 방법에는 Zienkiewicz<sup>(1)</sup> 등이 제안한 응력 오차 평가법과 Kelly<sup>(2)</sup> 등이 제안한 요소 내의 불평형 응력으로써 오차를 평가하는 방법 등이 있다. 또한, 해석자가

초기에 작성한 유한요소망을 재조정하는 방법에도 여러 가지가 연구되고 있다. 이 중 절점 이동법(r-method)<sup>(3)</sup>은 최적 요소망을 구성하는 방법 중에서 가장 먼저 시도되었던 방법이다. 이 방법은 최적의 요소망 형성을 위해 초기 요소망의 절점 좌표를 수정하여, 해석 영역 내의 요소들을 동일한 이동 기준에 따라 크기를 조절하는 방법이다. 이 방법은 초기에 주어진 총 자유도 수를 일정하게 유지할 수 있다는 장점이 있으나, 사용자가 원하는 정확도의 해석 결과를 얻기에는 한계가 있다. 계의 자유도를 증가 시켜 유한요소해의 정확도를 향상시키는 방법으로 요소 세분법(h-method)<sup>(4)</sup>과 다항 증가법(p-method)<sup>(5,6)</sup>이 연구 되었다. 요소 세분법은 분할 오차가 크게 평가된 요소들을 보다 작은 요소들로 세분함으로써 해의 정확도를 향상시키는 방법이다. 이 방법은 사용자가 원하는 정확도를 지정하고 이에 부합하는 해석 결과를 얻을 수 있으나, 요소의 세분으로 인하여 자유도가 급격히 증가하기 때문에 계산시간이 오래 걸리고 적응 해석 알고리즘이 복잡해진다<sup>(2)</sup>.

다항 증가법은 계층적 형상 함수가 도입됨에

\* 한양대학교 대학원

\*\* 한양대학교 기계공학부

따라서 다항식의 차수를 증가 시키기가 용이해졌으며, 자유도 증가로 인한 해의 수렴 속도가 요소 세분법보다 훨씬 빠른 장점이 있다<sup>(5,6)</sup>.

본 논문에서는 요소 경계에서의 불평형 응력을 이용하여 해석 오차를 평가하는 방법을 제안하고 요소망을 재구성하는 방법으로 다항증가법과 절점 이동법을 혼합한 R-P 법을 사용한 적응 해석을 수행하고자 한다. 여러 가지 수치 예제를 해석하고 그 결과를 비교 검토하여 제안한 R-P 법의 유효성과 정확도를 평가하고자 한다.

## 2. 오차 평가법

### 2.1 응력 오차

유한요소 해석의 결과로 얻어지는 요소의 응력 값은 다음과 같다.<sup>(1)</sup>

$$\sigma^h = (DSN) \bar{u} \quad (1)$$

단,  $\bar{u}$ 는 요소의 절점변위이고 D, S, N은 각각 구성행렬, 미분연산행렬, 변위의 형상함수행렬을 의미한다. 이 때, 유한요소해인  $\sigma^h$ 는 엄밀해인  $\bar{\sigma}$ 와 차이가 생기게 되며 이 값을 응력 오차로 정의하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_\sigma = \bar{\sigma} - \sigma^h \quad (2)$$

응력의 엄밀해  $\bar{\sigma}$ 는 일반 기계 구조물에 대하여 알 수 없기 때문에 다음의 근사식을 사용하여 구하게 된다.

$$\bar{\sigma} \approx N_\sigma \sigma^* \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} N_\sigma^T (\bar{\sigma} - \sigma^h) d\Omega = 0 \quad (4)$$

식 (3)와 식 (4)에서  $N_\sigma$ 는 변위의 형상 함수 N을 응력분포에 도입한 응력에 대한 보간 함수행렬이고  $\sigma^*$ 는 식 (3)을 식 (4)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 얻어지는 절점 응력이다.

$$\sigma^* = A^{-1} \int_{\Omega} N_\sigma^T DSN d\Omega \quad (5)$$

$$A = \int_{\Omega} N_\sigma^T N_\sigma d\Omega \quad (6)$$

### 2.2 오차의 크기

위에서 표현한 응력 오차에 대하여 오차에너지를 구하고 이를 값을 요소 내에서 적분하여 그 값을 요소의 해석 오차로 정의하면 탄성 문제에 대하여 다음과 같이 표현 할 수 있다.<sup>(2)</sup>

$$\|e_\sigma\| \equiv \left( \int_{\Omega} (e_\sigma^T D^{-1} e_\sigma) d\Omega \right)^{1/2} \quad (7)$$

식 (7)로 표현한 오차의 크기를 각 요소에 대하여 구한 다음에 계 전체의 해석 오차는 다음과

같이 그 값을 제곱하여 더함으로써 얻어진다.

$$e_t = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{e=1}^M \|e_\sigma\|^2} \quad (8)$$

식 (8)에서  $e_t$ 는 계의 평균 해석 오차를 의미하고 M은 전체 요소 개수이다. 적응 해석의 반복 계산은 위에서 구한 전체 평균오차가 허용 오차보다 작아지도록 수행한다.

$$e_t \leq e_{all} \quad (9)$$

단,  $e_{all}$ 은 사용자가 지정한 허용 오차를 뜻한다.

## 3. 요소망의 재구성 방안

### 3.1 절점 이동법 (R-method)

유한요소법으로 해석한 결과에 대하여 요소별로 응력 오차의 값을 구할 때 이 오차 값을 모든 요소에 균일하게 분포하도록 요소를 구성하게 되면 이때의 요소 분할은 가장 합리적이고 최적으로 분할 된 상태라고 생각할 수 있다.<sup>(3)</sup> 요소망의 구성을 합리화 하기위해 각 요소의 크기를 어느 정도로 조정하여야 하는가를 판단하기 위한 요소 크기의 재조정 계수를 다음과 같이 정의한다.

$$\xi_e = \frac{\|e_\sigma\|}{e_t} \quad (10)$$

식 (10)에서  $\xi_e \geq 1$ 인 요소에 대해서는 이 요소에 할당된 절점의 위치를 조정하여 요소의 크기를 작게 하여야 하고,  $\xi_e < 1$ 이면 좀 더 크게 조정되어야 함을 의미한다. 이때 새롭게 조정할 절점의 위치는 해석 절점이 내부에 있는 경우와 해석 영역의 경계에 있을 경우를 나누어 생각한다. 절점의 위치에 대한 분류는 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다.

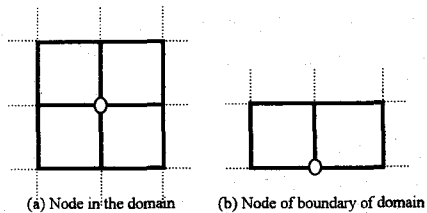


Fig. 1 Condition of nodal location.

Fig. 1 (a)와 같이 이동시키고자 하는 절점 i가 해석 영역의 내부에 위치하고 있는 경우는 식 (11)과 같이 절점 좌표를 이동시켜 나타낼 수 있다.

$$x_i = \sum_{e=1}^m \bar{x}_e \left( \frac{\xi_e}{A_e} \right) / \sum_{e=1}^m \left( \frac{\xi_e}{A_e} \right) \quad (11a)$$

$$y_i = \sum_{e=1}^m \bar{y}_e \left( \frac{\xi_e}{A_e} \right) / \sum_{e=1}^m \left( \frac{\xi_e}{A_e} \right) \quad (11b)$$

여기서  $A_e$  는  $e$  요소의 면적을 전체 요소의 면적으로 나눈 무차원 면적을,  $\bar{x}_e$ ,  $\bar{y}_e$  는  $e$  요소의 중심을 의미한다. 그리고  $m$  은  $i$  절점에 인접한 요소의 개수이다. 그리고 Fig.1 (b) 와 같이 이동하고자 하는 절점이 해석 경계에 위치하고 있는 경우는 절점이 주어진 경계선을 따라 이동되어야 하므로 다음과 같은 2 차 등매개 사상 함수를 도입하여 절점의 좌표를 이동시킨다.

$$(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^3 f_j(\eta) \cdot (\bar{x}_j, \bar{y}_j) \quad (12a)$$

$$f_1(\eta) = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)$$

$$f_2(\eta) = 1 - \eta^2 \quad (12b)$$

$$f_3(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1+\eta)$$

$$\eta = \left( -\frac{\xi_1}{A_1} + \frac{\xi_2}{A_2} \right) / \left( \frac{\xi_1}{A_1} + \frac{\xi_2}{A_2} \right) \quad (12c)$$

여기서  $\bar{x}_j, \bar{y}_j$  는  $e$  요소의 4 개의 변 중에서 해석 영역 경계에 위치한 변의 중심을 의미한다.

## 3.2 다항 증가법 (P-method)

### 3.2.1 계층형상함수 (hierarchical shape function)

유한요소 내의 변위 분포를 가정할 때 오차를 줄이기 위하여 다항식의 차수를 증가 시킨다. 이때 일반적인 다항식으로 차수를 증가 시키면 형상 함수 구성과 행렬식의 연산 등에 복잡한 계산이 따르기 때문에 이와 같은 어려움을 덜기 위하여 통상적으로 계층 함수를 도입한다. 이 계층 함수는 다음과 같은 Rodrigue 의 다항식에서 유도된다.

$$P(\xi) = \frac{1}{(n-1)! 2^{n-1}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (1-\xi^2)^n, \quad n \geq 1 \quad (13)$$

식 (13)을 이용한 계층 형상 함수는  $n=1, 2, 3, \dots$  에 대하여

$$h_1 = 1 - \phi^2$$

$$h_2 = \phi(1 - \phi^2) \quad (14)$$

$$h_3 = 1 - 6\phi^2 + 5\phi^4$$

로 구할 수 있다. 식 (14)에서  $\phi$  는 요소의 형상 함수에서 사용되는 무차원 좌표계  $\xi, \eta$  중에서 변에 따라 설정되는 임의 값을 의미한다. 식 (14)로

표현되는 계층 형상 함수는 요소의 변에서 Fig. 2 와 같이 2 차, 3 차, 4 차식의 변위 분포를 설정하는데 사용된다.

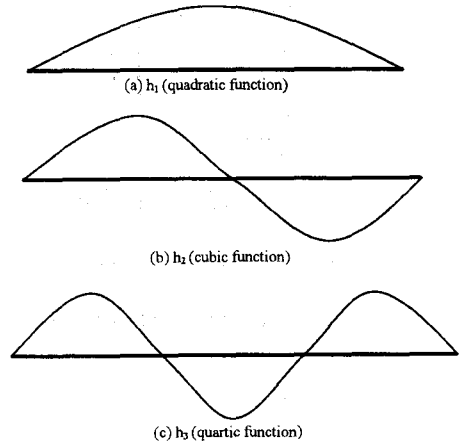


Fig. 2 Modes for the hierarchical shape functions.

### 3.2.2 변위 분포식

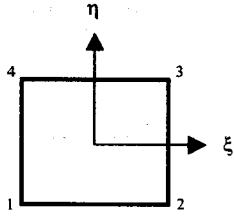
이차원 평면문제를 해석하기 위한 사변형 선형 요소에서 변위 벡터  $u$  는 다음과 같이 표현된다.

$$u = N d = [N_b \quad N_h] \begin{Bmatrix} d_b \\ d_h \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)에서 벡터  $u$  는  $u^T = [u \quad v]$  이고,  $d_b$  는 요소의 기본 절점변위로 4 절점 사변형 요소에서는  $[u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T$  로 나타내지며,  $d_h$  는 계층 형상 함수로 추가되는 계층 변수(hierarchical parameters) 벡터로써  $[\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \dots]^T$  가 된다. 형상 함수  $N$  은  $N_b$  와  $N_h$  로 분할될 때  $N_b$  는 절점 변위에 해당되는 기본 형상함수이고  $N_h$  는 계층 형상 함수 행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$N_h = \begin{bmatrix} f_0 h_1 & 0 & f_0 h_2 & 0 & f_0 h_3 & 0 & \dots \\ 0 & f_0 h_1 & 0 & f_0 h_2 & 0 & f_0 h_3 & \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (16)으로 표현된 계층 형상 함수는 요소의 변에서 정의되기 때문에 Fig. 3 과 같이 사변형 요소의 증가법을 사용하면 어느 변에 계층 형상 함수가 사용되느냐에 따라서  $f_0, h_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 가 다르게 정의되고 차수가 1 차에서 3 차까지 변함에 따라서 행렬식  $N_h$  의 크기가 달라진다. 이들 관계를 정리하면 Fig. 4 와 Table 1 과 같다.



$$f_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\eta) & \text{at side 12} \\ \frac{1}{2}(1+\xi) & \text{at side 23} \\ \frac{1}{2}(1+\eta) & \text{at side 34} \\ \frac{1}{2}(1-\xi) & \text{at side 41} \end{cases}$$

Fig. 3 4 node quadrilateral isoparametric element and  $f_0$  functions.

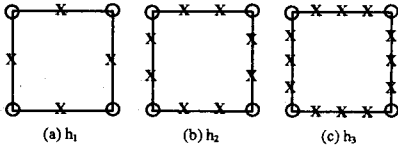


Fig. 4 Position of the basic nodes and the hierarchical nodes according to the P-method procedure.

(O : basic nodes, X : hierarchical nodes)

Table. 1 Hierarchical shape functions of a quadrilateral element.

step	side 12	side 23
	side 34	side 41
$h_1$	$1-\xi^2$	$1-\eta^2$
$h_2$	$\xi(1-\xi^2)$	$\eta(1-\eta^2)$
$h_3$	$1-6\xi^2+5\xi^4$	$1-6\eta^2+5\eta^4$

### 3.2.3 다항 증가법의 해법

다항 증가법을 사용하면 초기 모델의 절점 자유도에 추가 절점 자유도가 합해져 자유도의 수가 늘어나게 된다. 자유도가 많아짐에 따라 일반적인 요소의 해석과정에서 따르는 강성 행렬의 역행렬 연산이 복잡해 지게 된다. 이 때 계산의 편리를 위하여 다음과 같은 방법으로 전체계 방정식의 강성 행렬을 분할 하고 반복법<sup>(7)</sup>에 의하여 해를 구

한다. 초기의 유한요소 모델의 기본자유도에 관한 방정식은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$[K_{bb}]\{d_b\} = \{f_b\} \quad (17)$$

식 (17)에서 첨자 b 는 기본 절점에 관한 자유도를 의미한다. 위의 식으로 정확도가 기대값 보다 낮다고 판단되어질 때 선택되어진 요소의 계층 모드를 높여 정확도를 향상시키게 되는데 이러한 과정은 초기 유한요소의 강성 행렬에서 행과 열이 추가됨을 뜻하고 추가된 부분에 대하여 재조정된 계의 방정식은 다음과 같이 분할된다.

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bh} \\ K_{hb} & K_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_b \\ d_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ f_h \end{bmatrix} \quad (18)$$

식 (18)에서 첨자 h 는 계층 형상 함수로 인하여 추가된 자유도를 의미하고  $[K_{hh}]$ ,  $d_h$ ,  $f_h$  는 이에 따른 강성 행렬, 계층 자유도와 힘을 표시한다. 식 (18)을 전개하면,

$$[K_{bb}]\{d_b\} = \{f_b\} - [K_{bh}]\{d_h\} \quad (19a)$$

$$[K_{hh}]\{d_h\} = \{f_h\} - [K_{hb}]\{d_b\} \quad (19b)$$

로 되고 식 (19)가 반복해를 구하는 기본식이 된다. 즉 식(19a)에서 초기  $\{d_h\}$ 를  $\{0\}$ 으로 가정하고  $\{d_b\}$ 를 구한다음 이를 식(19b)에 대입하여  $\{d_h\}$ 를 구하고 이 값을 다시 식 (19a)에 대입하여  $\{d_b\}$ 를 구한다. 이와 같은 과정은  $\{d_b\}$ 의 오차가  $10^{-7}$ 에 이를 때 까지 반복 계산한다.

### 3.3 적응 해석법

적응 해석은 사용자가 초기에 설정한 허용 오차에 대하여 해석 결과의 오차를 평가하고 유한요소를 재조정하여 해석 오차가 허용 오차 보다 작아질 때까지 반복하여 해석하는 방법이다. Fig. 5 는 유한요소법에서 적응 해석을 수행하는 흐름도이다. 사용자는 초기에 허용 오차를 지정하고 개략적인 요소 분할로써 유한요소 해석을 수행한다. 이와 같은 유한요소 해석 결과의 오차를 평가하고 이 오차가 큰 요소는 요소 크기가 작아지도록 그리고 오차가 작은 요소는 요소 크기가 커지도록 절점 이동법(r-method)으로 요소 크기를 조정한다. 다음에 다항 증가법(p-method)이 수행된다. 다항 증가법에서는 오차가 작은 요소에서부터 계층 형상 함수의 차수를 증가 시켜가며 해석하고 오차를 평가하여 전체 오차의 평균치가 허용 오차보다 작아질 때까지 요소의 크기와 형상 함수의 차수를 조정하면서 해석을 반복 수행한다.

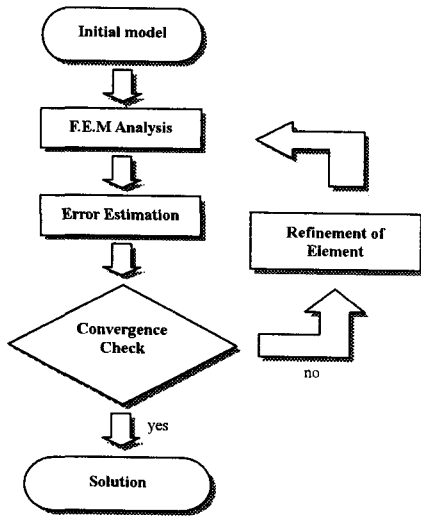


Fig. 5 Adaptive analysis procedure.

#### 4. 수치예제 및 검토

제안한 R-P 법의 유효성을 규명하기 위하여 여러 가지 수치 예제를 해석하였으며 그 결과를 R 방법, P 방법 및 R-P 법으로 구분하여 비교 검토한다.

##### 4.1 외팔보

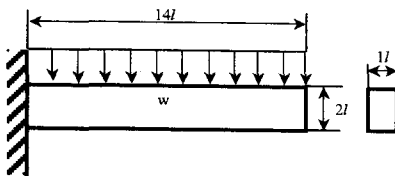


Fig. 6 Cantilever beam under uniformly distributed loads.

Fig. 6은 분포 하중  $w$ 를 받는 외팔보 모델이다. 모델을 14개의 사각형 요소로 구성하였으며 R-P 법으로 해석한 결과와 R 방법, P 방법에 의한 결과를 비교하였다.

분포하중을 가한 외팔보의 최대 처짐에 대한 엄밀해는 아래의 식으로서 얻을 수 있다.

$$v_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} \quad (20)$$

R-P 해석을 하기 이전과 이후의 유한 요소의 형상을 비교하면 Fig. 7과 같다. 응력 구배가 커지는 고정단 쪽에 요소의 크기가 작아지며 분포 하중으로 인한 응력 때문에 분포 하중이 작용하는 방향으로 절점이 이동함을 Fig. 7을 통하여 볼 수 있

다.

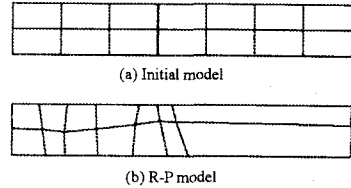


Fig. 7 Mesh shapes of initial model and r-p model of the cantilever.

Table 2는 외팔보의 최대 처짐량을 엄밀해로 무차원화하여 각 방법에 대하여 비교한 것이다. R 방법에 비하여 P 방법의 경우가 더 엄밀해와 근접하고 있음을 알 수 있고, P 방법과 R-P 법의 차이는 R-P 법에서 유한요소 형상의 찌그러짐이 발생하기 때문으로 생각된다.

Table 2 Normalized maximum displacement of the cantilever according to the various adaptive analysis.

Adaptive analysis	$v_{\max} / v_{\text{exact}}$
R-method	0.816
P-method	1.02
R-P method	1.03

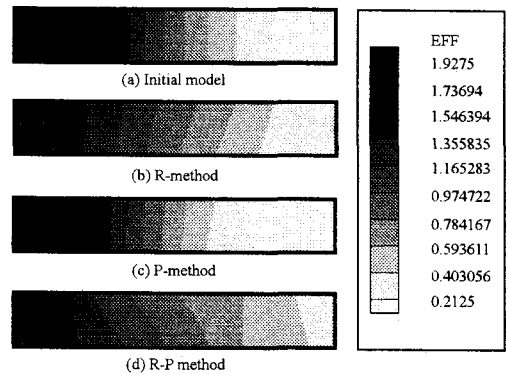


Fig. 8 Error norm contour of each method in the cantilever according to the various adaptive analysis.

Fig. 8은 여러 가지 적응 해석방법에 따라서 요소의 오차가 분포되는 형상을 도시한 것이다. 적응 해석으로 오차의 크기가 많이 감소하였고, 또한 전체 모델로 오차가 균일하게 분포해 나가고 있음을 볼 수 있다.

##### 4.2 L형 평판

Fig. 9는 분포 하중을 한쪽 면에 받고 있는 고정 L형평판이다.

## 5. 결론

이차원 평면 유한요소 해석에 대하여 해석 오차를 평가하고 이를 기준하여 유한요소를 재조정하여 해석하는 적응 해석법에 대하여 연구하였다. 절점 이동법인 R 방법과 다항 증가법인 P 방법을 혼합한 R-P 법을 제안하고 R 방법과 P 방법을 각각 독립적으로 사용한 결과와 비교 검토하여 다음의 결론을 얻었다.

1. R-P 법으로 R 방법과 P 방법을 각각 사용했을 때의 문제점이 개선 됨을 알 수 있었다.
2. R 방법의 수렴단계를 조절하여 P 방법의 차수를 낮추어 적응해석의 수렴특성을 조정할 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 337-357
- (2) Kelly, D. W., Gago, J.P. de S. R., Zienkiewicz, O. C. and Babuska, I., 1983, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I-Error Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 1593-1619
- (3) Oh, H.S. and Lim, J.K., 1996, "Modified r-method for the Finite Element Adaptive Analysis of Plane Elastic Problem", *KSME International Journal*, Vol. 10, No. 2, pp. 190-202
- (4) Bathe, K. U., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall
- (5) Robinson J., 1986, "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique", *Finite Elements in Analysis and Design* Vol. 2, pp. 377-388
- (6) Zienkiewicz, O. C. and Kelly, D. W., 1983, "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 16, pp. 53-65
- (7) Rossow, M. P. and Katz, I. N., 1978, "Hierarchical Finite Elements and Precomputed Arrays", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 977-999

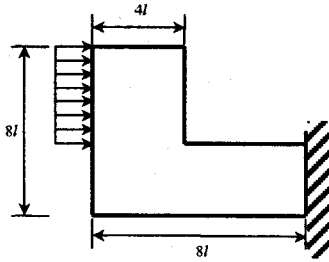
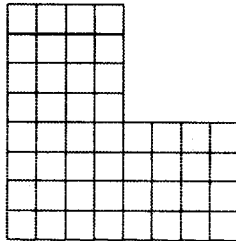
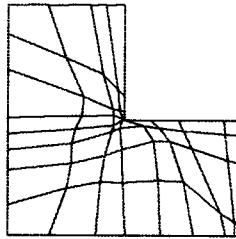


Fig. 9 L shaped plate under uniformly distributed loads.

응력의 집중 현상으로는 Fig. 10(b)와 같은 절점 좌표의 이동을 볼 수 있다.



(a) Initial model



(b) R-P model

Fig. 10 Mesh shapes of the initial model and R-P model of the L-shaped plate.

여러 가지 적응해석 방법에 대하여 엄밀해와 x 방향의 최대 변위를 무차원화하여 비교한 결과는 Table 3 와 같다. R-P 법의 경우가 엄밀해와 가장 근사한 값을 나타내고 있음을 볼 수 있다.

Table. 3 Normalized maximum displacement of the L-shaped plate according to the various adaptive analysis.

Adaptive analysis	$u_{\max} / u_{\text{exact}}$
R-method	0.818
P-method	1.09
R-P method	0.968