

3차원 셸 요소를 이용한 섬유보강 고무모재 공기 스프링의 유한요소 해석

이형욱* · 허 훈* · 김진영** · 정수교**

Finite Element Analysis of Air Springs with Fiber-Reinforced Rubber Composites using 3-D Shell Elements

Hyoung-Wook Lee, Hoon Huh, Jin-Young Kim and Soo-Gyo Jeong

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Air Spring(공기스프링), Shell Element(셸 요소), Physical stabilization(물리적안정화기법)

Abstract

This paper is concerned with the orthotropic problem of diaphragm-type air springs which consist of rubber linings, nylon reinforced rubber composite and bead ring. The analysis is carried out with a finite element method developed to consider the orthotropic properties, geometric nonlinearity using four-node degenerated shell element with reduced integration. Physical stabilization scheme is used to control the zero-energy modes of the element. An inflation analysis and a lateral deformation analysis of an air spring are carried out. Numerical analysis results demonstrate the variation of the outer diameter, the fold height, the vertical force and the lateral force.

기호설명

- $\hat{\ }^{\wedge}$: Terms in the local coordinate system
- $\hat{\sigma}$: Cauchy stress tensor
- \hat{f}^{int} : Internal force vector
- \hat{K}^{int} : Internal stiffness matrix
- \hat{B} : Gradient matrix of shape function
- $\hat{\eta}$: Velocity strain tensor

1. 서론

고속전철 현가장치의 핵심부품 중의 하나인 공기 스프링은 일반적으로 차량의 현가장치의 부품으로 사용되며 타제품에 비해서 승차감이 매우 우수하기 때문에 대형 고급 수송기관의 현가장치 부품으로 주로 쓰이고 있다⁽¹⁾. 신간선과 TGV 등의

외국 고속전철에도 공기 스프링이 사용되고 있다. Fig. 1에 다이어프램형 공기 스프링을 도시하였다.

공기 스프링은 고무재질을 모재로 하고 있으므로 비선형 탄성재질과 비압축성의 특징을 가지게 되며⁽²⁾, 에어백의 소재로 고무 모재의 내부에 보강 섬유가 함침된 복합재료를 사용하므로 공기 스프링은 고무와 보강섬유와의 연결방향과 접착력에 따라 이방성과 비선형성을 가지게 된다. 또한 대변형에 의한 기하학적 비선형성을 가지게 된다.

지금까지의 해석은 공기 스프링을 단순한 형태의 모델로 가정하여 해석을 한 예⁽³⁻⁵⁾와 내부의 코드지를 직접 또는 간접적으로 모델링하여 해석을 한 예^(6,7)가 있다. ABAQUS로 공기 스프링을 해석한 경우⁽⁷⁾에는 리바(Rebar)요소를 사용하여 에어백을 하나의 층으로 모델링하여 해석을 하였다. 이 경우 코드지에 따라 물성치와 교차각을 실제와 같이 부위별로 다르게 모델링 할 수 없고, 공기 스프링의 정확한 형상을 모델링하지 않았기 때문에 실제의 변형을 정확히 모사하지 못하였다. Lee와 Huh⁽⁸⁾등은 실제 다이어프램형 공기 스프링 제품의 분석을 통한 정확한 형상 모델링과 축대칭 해석을

* 한국과학기술원 기계공학과

** 대원강업(주) 대원기술연구소

통하여 설계변수에 대한 검증을 수행하였다.

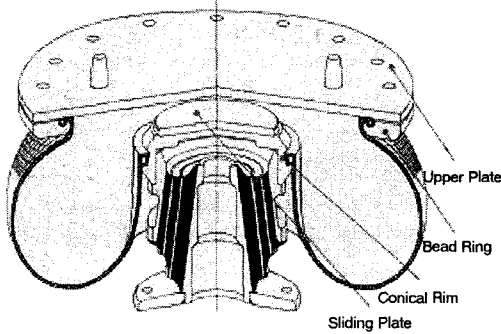


Fig. 1 Mounting hardware of a diaphragm air spring.

공기 스프링의 3 차원 해석에서 나타난 문제점은 자유도의 증가로 해석시간이 많이 소요된다는 것이다. 이를 해결하기 위해서 쉘 요소를 사용하여 자유도를 줄이는 것이 방법이 될 수 있다. 공기 스프링을 해석하기 위해서는 적층된 복합재료의 특성을 해석할 수 있는 쉘 요소가 필요하다.

쉘 요소는 수렴성과 가상적인 재료 에너지 모드 가 없는 안정된 거동이 요구된다. 수식적으로 정식화하기 간단하고 응용이 편리하며 정확한 응력의 계산이 수행되어야 한다. 또한 전단변형 구속과 막 변형 구속이 없고, 상대적으로 형상의 비틀림에 대해 덜 민감하여야 한다. 추후로 비선형에 대한 확장 용이성도 필요하다⁽⁹⁾.

현재까지 개발되어온 쉘 요소는 평면 쉘 요소와 쉘 이론을 바탕으로 한 곡면 쉘 요소⁽¹⁰⁾ 그리고 가장 많이 쓰이는 감절점 쉘 요소⁽¹¹⁾가 있다. 감절점 쉘 요소는 특정한 쉘 이론의 추가 없이 임의의 쉘 형상의 유한요소 모델에 대해 적용할 수 있고, 두께방향 전단변형의 고려로 얇은 쉘, 두꺼운 쉘, 복합 적층 쉘을 모델링할 수 있다. 변형 기하학이 등 매개 변수에 의해 표현이 가능하여 요소 사이의 적합성을 만족하고, 낮은 차수의 형상함수를 이용할 수 있다. 또한 비선형으로의 확장이 용이하다. 그러나 전단 변형 구속 및 막 변형 구속의 제거가 필요하여 저감 적분법, 선택적 저감 적분법⁽¹²⁾, 안정화 행렬^(13,14) 등의 방법을 사용하여야 한다. 쉘 요소는 일반적으로 경제성과 기하학적 뒤틀림에 덜 민감하고 고차 요소에 비해 적은 계산 시간으로 높은 정확도를 얻을 수 있으며 안정적인 4 절점 요소를 사용한다.

1970년 Ahmad 등에 의해 감절점 쉘 요소가 개발된 후로 많은 연구자들이 쉘 요소를 개발해 왔다. 1981년 Hughes 와 Liu⁽¹⁵⁾에 의해 선택적 저감 적분법을 이용한 쉘 요소가 개발되었고, 1984년

Belytschko 등⁽¹³⁾에 의해 인위적인 계수를 이용한 무 에너지 모드 제어기법이 개발되었다. 이후로 무 에너지 모드를 제어하기 위한 방법으로 인위적인 계수를 사용하지 않는 기법이 개발되었고, 1994년 Belytschko 와 Leviathan⁽¹⁴⁾에 의해 안정화 행렬을 이용한 제어기법이 개발되었다. Liu 등⁽¹⁶⁾은 Resultant Stress Degenerated Shell 을 개발하였다.

Allman⁽¹⁷⁾에 의해 제안된 드릴링 자유도(Drilling Degree of Freedom)는 면내 거동을 향상시키고, 구속현상을 줄일 수 있었다. 이 후로 드릴링 자유도는 Cook⁽¹⁸⁾, Hughes⁽¹⁹⁾, Zhu 등⁽²⁰⁾에 의해 발전되었다.

본 논문에서는 두께방향의 전단변형을 허용하는 쉘 이론의 기본 가정과 유한요소의 등 매개 변수 개념을 바탕으로 한 감절점 쉘 요소를 사용하기로 한다. Belytschko 등에 의해 제안된 쉘 수식화를 기본으로 한 저감 적분법을 사용하고, 무 에너지 모드의 제어는 Belytschko 와 Leviathan⁽¹⁴⁾에 의해 제안된 물리적 안정화 기법(Physical Stabilization Method)을 사용하였다.

2. 이론

2.1 쉘 요소의 이론적 수식화

쉘 요소를 정의하는 Fig. 2의 좌표계는 전체 좌표계(Global Coordinate)와 자연 좌표계(Natural Coordinate), 국지 좌표계(Local Coordinate) 그리고 절점 좌표계(Nodal Coordinate) 등이 있다.

형상 함수를 식(1) 같이 정의 하면 요소의 형상은 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + r_i r)(1 + s_i s) \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \left\{ \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} t h_i \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} \right\} \quad (2)$$

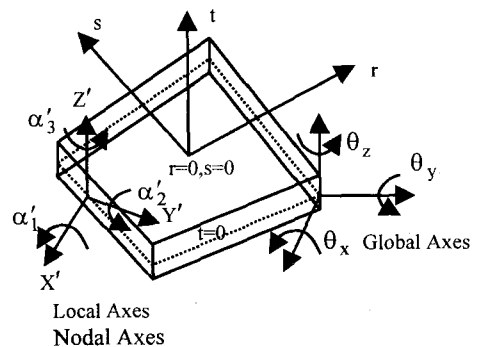


Fig. 2 Geometry and coordinate systems.

여기서 h_i 는 쉘의 절점에서의 두께를 나타내며, l, m, n 은 각 절점 좌표계의 기저 벡터이다.

응력장식으로부터 가상일의 원리와 발산정리를 적용하여 약형을 구성하고, 형상함수의 임의성을 이용하면 약형으로부터 다음과 같은 강성행렬과 하중벡터를 국부 좌표계에서의 값으로 얻을 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$\hat{f}_i^{int} = \int_{\Omega} \left(\hat{B}_i^o + \zeta \hat{B}_i^\zeta + \xi \hat{B}_i^\xi + \eta \hat{B}_i^\eta + \xi \zeta \hat{B}_i^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{B}_i^{\eta\zeta} \right)^T \left(\hat{\sigma}^o + \xi \hat{\sigma}^\xi + \eta \hat{\sigma}^\eta + \xi \zeta \hat{\sigma}^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{\sigma}^{\eta\zeta} \right) d\Omega \quad (3)$$

$$\hat{K}_{IJ}^{int} = \int_{\Omega} \left(\hat{B}_i^o + \zeta \hat{B}_i^\zeta + \xi \hat{B}_i^\xi + \eta \hat{B}_i^\eta + \xi \zeta \hat{B}_i^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{B}_i^{\eta\zeta} \right)^T \hat{C} \left(\hat{B}_j^o + \zeta \hat{B}_j^\zeta + \xi \hat{B}_j^\xi + \eta \hat{B}_j^\eta + \xi \zeta \hat{B}_j^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{B}_j^{\eta\zeta} \right) d\Omega \quad (4)$$

여기서 \hat{B} 은 형상함수의 미분 벡터로 자연 좌표계의 성분에 따라 구분을 할 수 있다. \hat{C} 은 물성에 따른 구성 텐서이다. 따라서 변형률 속도는 식(5)와 같이 정의되며, 응력의 시간에 대한 미분항은 Taylor 급수 전개에 의해 식(6)으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\eta} = \hat{B}_i \hat{v}_i = \left[\hat{B}_i^m + \hat{B}_i^b + \hat{B}_i^s \right] \hat{v}_i = \left[\hat{B}_i^o + \zeta \hat{B}_i^\zeta + \xi \hat{B}_i^\xi + \eta \hat{B}_i^\eta + \xi \zeta \hat{B}_i^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{B}_i^{\eta\zeta} \right] \hat{v}_i \quad (5)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = \dot{\hat{\sigma}}^o(\zeta) + \xi \dot{\hat{\sigma}}^\xi + \eta \dot{\hat{\sigma}}^\eta + \xi \zeta \dot{\hat{\sigma}}^{\xi\zeta} + \eta \zeta \dot{\hat{\sigma}}^{\eta\zeta} \quad (6)$$

식(3)과 식(4)는 자연 좌표계의 성분에서 ξ, η 에 대해 직접 적분을 하면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{f}_i^{int} = \hat{f}_i^o + \hat{f}_i^{stab} \quad (7)$$

$$\hat{K}_{IJ}^{int} = \hat{K}_{IJ}^o + \hat{K}_{IJ}^{stab} \quad (8)$$

여기서 'o'는 상수항이 되고, 'stab'는 안정화 항이 된다. 이 식을 전체 좌표계로 변환시킨 후 비선형 행렬식을 풀게 된다. 식(7)과 식(8)의 성분을 식(9)에서 식(12)에 나타내었다.

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^o &= \int_{\Omega} \left[\hat{B}_i^o + \zeta \hat{B}_i^\zeta \right]^T \hat{\sigma}(\zeta) d\Omega \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J d\xi d\eta \left[\hat{B}_i^o + \zeta \hat{B}_i^\zeta \right]^T \hat{\sigma}(\zeta) dt \\ &= \frac{aA}{2} \sum \left[\hat{B}_i^o + \zeta_k \hat{B}_i^\zeta \right]^T \hat{\sigma}(\zeta_k) w_k \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{IJ}^o &= \int_{\Omega} \left[\hat{B}_i^o + \zeta \hat{B}_i^\zeta \right]^T \hat{C}(\zeta) \left[\hat{B}_j^o + \zeta \hat{B}_j^\zeta \right] d\Omega \\ &= \frac{aA}{2} \sum \left[\hat{B}_i^o + \zeta_k \hat{B}_i^\zeta \right]^T \hat{C}(\zeta_k) \left[\hat{B}_j^o + \zeta_k \hat{B}_j^\zeta \right] w_k \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^{stab} &= \int_{\Omega} \left(\xi \hat{B}_i^\xi + \eta \hat{B}_i^\eta + \xi \zeta \hat{B}_i^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{B}_i^{\eta\zeta} \right)^T \left(\xi \hat{\sigma}^\xi + \eta \hat{\sigma}^\eta + \xi \zeta \hat{\sigma}^{\xi\zeta} + \eta \zeta \hat{\sigma}^{\eta\zeta} \right) d\Omega \\ &= \frac{aA}{9} \left[3 \left(\hat{B}_i^\xi \right)^T \hat{\sigma}^\xi + 3 \left(\hat{B}_i^\eta \right)^T \hat{\sigma}^\eta \right. \\ &\quad \left. + \left(\hat{B}_i^{\xi\zeta} \right)^T \hat{\sigma}^{\xi\zeta} + \left(\hat{B}_i^{\eta\zeta} \right)^T \hat{\sigma}^{\eta\zeta} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{K}_{IJ}^{stab} = \frac{aA}{9} \left[3 \left(\hat{B}_i^\xi \right)^T \hat{C}(0) \hat{B}_j^\xi + 3 \left(\hat{B}_i^\eta \right)^T \hat{C}(0) \hat{B}_j^\eta \right. \\ \left. + \left(\hat{B}_i^{\xi\zeta} \right)^T \hat{C}(0) \hat{B}_j^{\xi\zeta} + \left(\hat{B}_i^{\eta\zeta} \right)^T \hat{C}(0) \hat{B}_j^{\eta\zeta} \right] \quad (12)$$

3. 유한요소 해석

3.1 공기 스프링의 모델링

3.1.1 공기 스프링의 형상 모델링

공기 스프링의 쉘 요소 모델링을 위한 형상을 Fig. 3에 도시하였다. 도시된 그림은 TGV-K 용으로 설계될 모델을 2차원으로 유한요소화한 것이다.

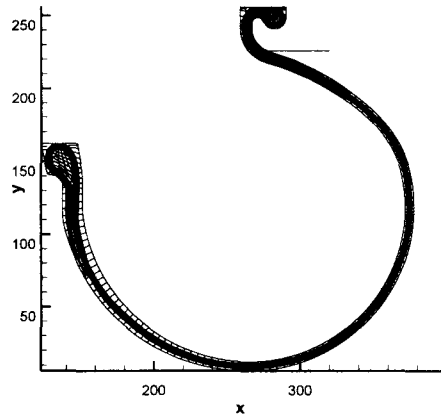


Fig. 3 Finite element mesh of the air spring model for TGV-K

3.1.2 두께 모델링

정확한 쉘의 해석을 위해서는 정확한 두께의 모델링이 필요하다. 2차원 684N 4. 100 모델로부터 두께를 측정하여 3차원 쉘 모델에 적용을 하였다.

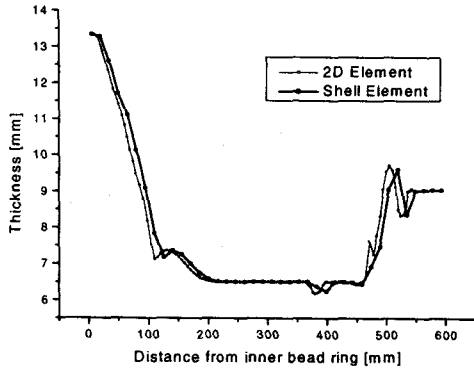


Fig. 4 Thickness distributions of an air spring.

Fig. 4는 2차원 모델과 3차원 셸 모델의 두께 분포를 나타낸 것이다. 2차원으로부터 잘 근사되었음을 알 수 있다.

3.1.3 유한요소 모델링

공기 스프링의 해석을 위해 2차원의 유한 요소의 중심을 따라서 모델링을 수행하였다. 기하학적 형상으로부터 유한요소 모델링을 한 초기 유한요소는 Fig. 5에 나타나 있다. 구성된 유한요소 모델은 663개의 절점과 600개의 요소로 되어있다. 교차각은 이론적으로 계산된 값⁽¹⁾을 사용하였다.

3.2 공기 스프링의 유한요소 해석

2장에서 유도된 수식화를 이용하여 프로그램을 구성하고, 구성된 프로그램으로 공기 스프링의 변형 해석을 수행하였다.

3.2.1 해석 조건

공기 스프링의 해석 시 재료는 직교 이방성 재료로 모델링하였고, 플라이의 각도는 이론적으로 계산한 각도를 사용하였다. 6층의 고무보강 섬유 복합재료로 구성된 코드지와 고무재질의 내피와 외피를 구성하여 8층의 두께를 가진다. 각 층의

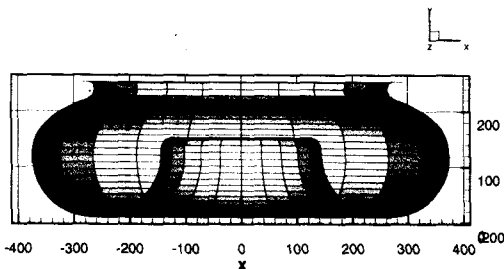


Fig. 5 Finite element mesh of a diaphragm air spring.

두께는 내피와 외피는 각각 2mm로 설정하고, 나머지 두께를 6층의 코드지 두께로 하였다. 코드지의 두께는 최소 0.6mm와 0.7mm가 되게 두 가지 설정을 하였다. 압력은 내부에 6기압을 부과하였고, 횡 방향 변형해석 시는 우선 내압을 부과하고, 추후에 횡 방향으로의 변형해석을 수행하였다.

팽창해석 시의 경계 조건은 비드링이 있는 부분을 모두 구속하였고, 슬라이딩 판이 있는 쪽도 모두 구속을 하였다. 횡 방향 변형의 경우 상판을 횡 방향으로 이동시키는 것으로 경계조건을 부과하였다.

3.2.2 공기 스프링의 팽창 해석

두께를 최소 0.6mm로 한 경우의 팽창 해석의 결과를 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 7에는 두께를 최소 0.7mm로 설정하여 해석을 한 경우에 대한 변형 형상을 도시하였다. 내부의 섬유 직경이 0.5mm로 일정하기 때문에 코드지의 두께가 커질수록 약한 물성이 계산되어 팽창의 정도가 커지게 된다.

Fig. 8에 도시된 팽창해석 시 외경의 변화를 보면 이차원 축 대칭 해석⁽¹⁾에 비해 두께가 0.7mm 일 때의 외경의 변화는 더 크고, 두께가 0.6mm 일 때는 더 적게 변화하는 것을 알 수 있다. Fig. 9에 도시된 에어백의 장착높이의 변화 역시 같은 형태를 보이고 있다. 이것은 2차원 해석은 요소의 두께를 이용해서 하나의 코드지를 하나의 요소로 모델링하여 해석을 할 수 있으나 3차원 해석의 경우에는 요소의 두께를 최소 0.6mm나 0.7mm로 고정을 시켰기 때문이다. 각 층의 두께는 0.6mm

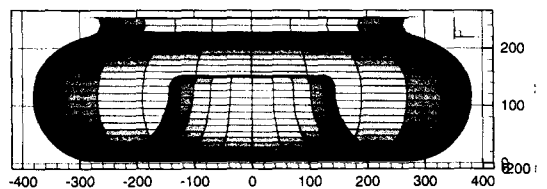


Fig. 6 Deformed shape in an inflation analysis (6 bar, minimum thickness=0.6mm).

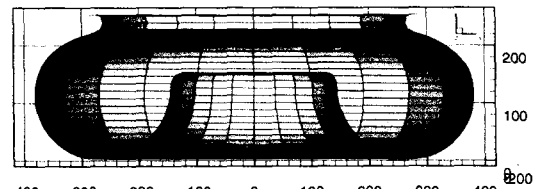


Fig. 7 Deformed shape in an inflation analysis (6 bar, minimum thickness=0.7mm).

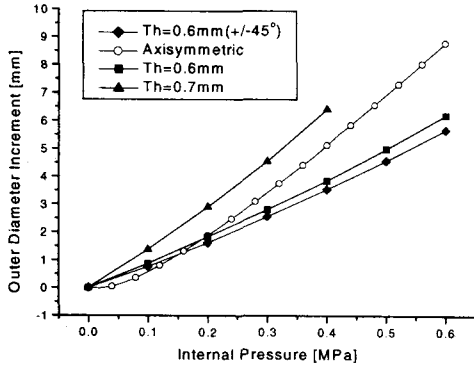


Fig. 8 Variation of the outer diameter with respect to the internal pressure.

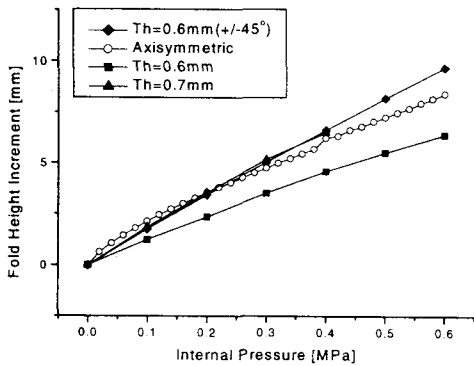


Fig. 9 Variation of the fold height with respect to the internal pressure.

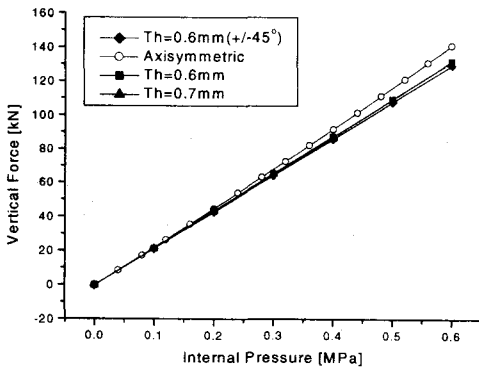


Fig. 10 Variation of the vertical force with respect to the internal pressure.

에서 0.7mm 사이에 존재하게 되므로 3 차원 해석에서도 각 층의 두께를 실제와 유사하게 모델링하면 2 차원 해석과 거의 같은 수치를 얻을 수 있을 것으로 보여진다. Fig. 10 에 도시 된 내압의 변화

에 따른 지지하중은 축 대칭해석과 거의 비슷하게 나타난 것을 알 수 있다.

3.2.3 공기 스프링의 횡 방향 변형 해석

공기 스프링의 횡 방향 변형 해석에서는 2 단계의 해석을 수행하였다. 1 단계로 내압을 부과하여 팽창해석을 수행하고, 2 단계에서 횡 방향 변형을 부과하였다. 압력의 부과는 2 기압과 4 기압의 두 가지 경우를 적용하였고, 횡 방향의 변위는 60mm 를 부과하였다.

유한요소 해석에서는 내부의 압력에 대한 영향은 거의 없는 것으로 나타났다. 이러한 효과를 나타내기 위해서는 상관까지 모델링하여 해석을 수행하여야 할 것으로 보여진다.

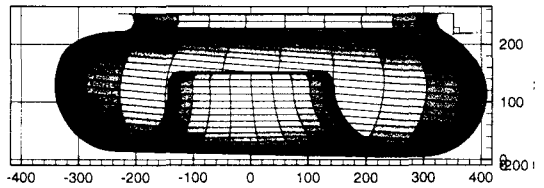


Fig. 11 Deformed shape in a lateral deformation analysis (60mm, 2 bar).

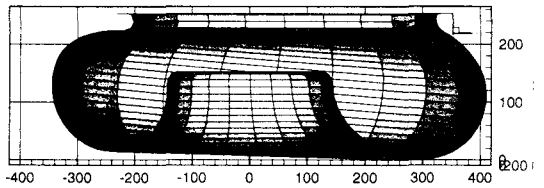


Fig. 12 Deformed shape in a lateral deformation analysis (60mm, 4 bar).

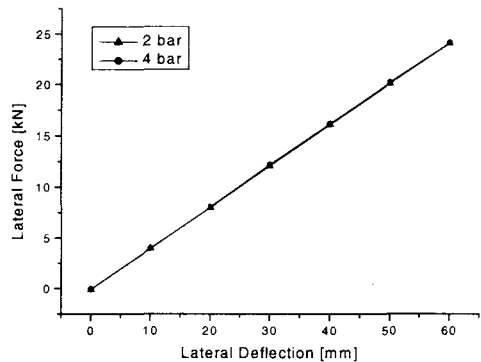


Fig. 13 Variation of the lateral force with respect to the lateral deflection.

Fig. 11 와 Fig. 12 에 2 기압과 4 기압의 압력 해

석 후 60mm 의 횡 방향 변형 해석의 결과를 도시하였다. 변형 형상은 물리적으로 타당한 것으로 나타났다. Fig. 13 에 횡 방향 변형 시 횡 방향 지지 하중을 도시하였다. 횡 방향 지지 하중은 내압에 큰 영향이 없는 것으로 나타났으며 이것은 압력의 효과는 해석 중에 서로 대칭이 되므로 서로 상쇄된 것으로 보여진다.

위의 결과에서 3 차원 쉘 요소를 이용한 프로그램의 개발과 이차원 해석 프로그램의 개발로 공기 스프링의 팽창해석 및 횡 방향 변형 해석, 그리고, 회전 해석등에 적용할 수 있음을 확인하였다.

4. 결론

본 논문에서는 쉘 요소를 이용한 공기 스프링의 3 차원 해석 기법을 개발 및 정립하였고, 정립된 이론을 바탕으로 한 공기 스프링 해석용 자체 프로그램을 개발하여 해석을 수행하였다. 본 논문에서 얻어진 프로그램을 이용하면 빠른 시간과 저렴한 비용으로 공기 스프링의 내압과 횡 방향 변형에 따른 하중지지 능력과 형상해석, 취약부분 및 응력의 분포를 해석할 수 있고, 이러한 결과를 바탕으로 공기 스프링의 설계방향을 제시하고, 설계안의 검증 및 평가를 할 수 있을 것이다.

직교 이방성 모델의 적용 시 수렴성이 저하하는 경향이 있는데 향후 이를 보완해야 할 것이다.

후 기

본 연구는 건설교통부와 산업자원부 및 과학기술부에서 시행한 G7 고속전철 기술개발사업에 의하여 연구한 결과 중 일부이며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) 허훈, 이형욱, 김세호 1999, 공기스프링 FEM 해석기법 개발, 대원강업(주) 수탁연구과제보고서.
- (2) J. E. Morton, 1987, *Rubber Technology*, 3rd Ed., Van Nostrand Reinhold, New York.
- (3) Gent, A. N. and Thomas, A. G., 1974, "Force-Deflection Relations for a Model Air Spring," *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 47, pp. 384~395.
- (4) Agnew, B., 1991, "A Note on the Design of Air Springs," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 205, pp. 207~209.
- (5) Boros, A., Kovacs, F. and Lengyel, K., 1991, "Modelling of Axial-Symmetric Fibre-Reinforced Rubber Membranes Loaded by Inner Pressure. Computer Simulation of Air-Springs," *International*

- Rubber Conference (IKT/IRC 91)*, pp. 487~489.
- (6) Maßann, C., 1995, "FE-Berechnungen an Cord-Gummi Verbundwerkstoffen zur Ermittlung von Ermüdungsmechanismen in Luftfedern," *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, Vol. 48, pp. 423~429.
- (7) Hibbit, Karlsson and Sorenson Inc., 1996, *ABAQUS/Standard Manual*.
- (8) 이형욱, 김세호, 허훈, 김진영, 정수교, 1999, 대한기계학회 논문집, 제 23 권, 제 9 호, pp. 1569 ~ 1576.
- (9) 백종균, 1994, 대체 변형률장에 의한 효율적인 4 절점 쉘 유한요소의 개발, 한국과학기술원 박사 논문.
- (10) Simo J. C. and Fox D. D., 1989, "On a stress resultant geometrically exact shell model - Part I : Formulation and optimal parametrization," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 72, pp. 267~304.
- (11) Ahmad S., Irons B. M. and Zienkiewicz O. C., 1970, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 2, pp. 419~451.
- (12) Hughes T. J. R., Cohen M. and Haroun M., 1979, "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 46, pp. 203~222.
- (13) Belytschko T., Lin J. I. and Tsay C. S., 1984, "Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 42, pp. 225~251.
- (14) Belytschko T. and Leviathan I., 1994, "Physical stabilization of the 4-node shell element with one point quadrature," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 113, pp. 321~350.
- (15) Hughes T. J. R. and Liu W. K., 1981, "Nonlinear Finite-Element Analysis of Shells; Part I: Three-Dimensional Shells," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 26, pp. 331~362.
- (16) Liu W. K., Law E. S., Lam D. and Belytschko T., 1986, "Resultant-stress degenerated-shell element," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 55, pp. 259~300.
- (17) Allman D. J., 1988, "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 26, pp. 717~739.
- (18) Cook R. D., 1994, "Four-node 'flat' shell element: Drilling degrees of freedom, membrane - bending coupled, warped geometry and behavior," *Comput. Struct.*, Vol. 35, pp. 621~641.
- (19) Hughes T. J. R. and Brezzi F., 1989, "On drilling degrees of freedom," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 72, pp. 105~121.
- (20) Zhu Y. and Zacharia T., 1996, "A new one-point quadrature, quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 136, pp. 165~203.