

유한두께를 가지는 보강된 균열평판에 대한 면외굽힘을 고려한 응력강도계수 계산

김종호* · 이순복**

Calculation of stress intensity factor considering out-of-plane bending for a patched crack with finite thickness

Jong Ho Kim*, Soon Bok Lee**

Key Words : One-sided patched crack(한쪽 면에 보강된 균열), Crack bridging model(균열가교 모델), Spring constant(스프링 상수), Stress intensity factor(응력강도계수)

Abstract

A simple method was suggested to calculate the stress intensity factor for a one-sided patched crack with finite thickness. To consider out-of-plane bending effect resulting from the load-path eccentricity, the spring constant as a function of the through-thickness coordinate z was calculated from the stress distribution in the un-cracked plate, $\sigma_{yy}(y=0, z)$, and the displacement for the representative single strip joint, $u_x(y=0, z)$. The stress intensity factors were obtained using Rose's asymptotic solution approach and compared with the finite element results. In short crack region, two results had a little difference. However, two results were almost same in long crack region. On the other hand, the stress intensity factor using plane stress assumption was more similar to finite element result than plane strain condition.

기호설명

a	crack length
k	spring constant
S	stiffness ratio ($= E'_R t_R / E'_P t_P$)
I	moment of inertia
σ_∞	remote applied stress
K	stress intensity factor

1. 서론

최근에는 고강도 섬유의 복합재료와 접착제가 발달함에 따라 보강재를 접착하는 보수방법이 널리 사용되고 있다. 이 방법은 특히 항공기 구조물에서 많이 사용되고 있으며 기존의 손상된 부분을 제거하지 않고 그 위에 부착하기 때문에 구조물의 잔존수명을 늘이는 장점을 가지고 있다. 보강재를

접착하는 방법은 크게 두 가지로 균열평판을 양면(two-sided)에서 접착하거나 한쪽 면(one-sided)에서 접착하는 것을 들 수 있다. 양면에서 접착하는 방법은 균열평판의 거동을 대칭적으로 모사할 수 있기 때문에 해석이 용이하다. 그러나 한쪽 면에서 접착했을 때는 비대칭으로 면외(out-of-plane) 굽힘 효과가 발생하기 때문에 해석이 용이하지 않다. 그러나 이 방법은 실제 항공 구조물에서 많이 사용되고 있기 때문에 해석의 필요성이 더 커지고 있다.

Rose⁽¹⁾는 내부균열(center-cracked)이 내재된 무한체에 있어서 보강재를 접착한 경우 응력강도계수는 균열이 증가함에 따라 일정 값에 수렴한다는 것을 보였다. 이러한 거동은 보강재의 균열가교(crack-bridging) 기구로 설명될 수 있다. 즉 가해준 하중은 균열면의 상대변위를 유한한 값으로 제한하고 하중을 전달하는 것이다. 그러나 여기서 Rose는 면외 굽힘효과를 무시하고 해석을 수행하였다. 한편 Wang 등⁽²⁾은 한쪽 면에 보강재를 접착했을 때 발생하는 면외 굽힘효과를 고려하여 균열

* 한국과학기술원

** 한국과학기술원

평판에 대하여 응력강도계수의 상한해(upper bound solution)를 얻었다. 그리고 3 차원 유한요소법을 이용하여 균열길이에 대한 응력강도계수를 두께방향에 대하여 얻고 상한해를 비교하였다. 이처럼 유한두께를 가지는 보강된 균열평판에 대한 응력강도계수를 구하는 것은 면의 굽힘 효과 때문에 쉽지 않다. 그래서 본 연구에서는 유한두께를 가지는 보강된 내부균열 평판에 대한 응력강도계수를 균열가고 모델 즉 균열면에 스프링이 연속적으로 분포하는 것으로 가정하고 응력강도계수의 상한해 및 균열길이에 대한 응력강도계수를 얻고 기존 연구자들에 의해 얻어진 유한요소결과와 비교 분석하였다.

2. 문제의 정의

먼저 다루고자 하는 문제는 Fig. 1(a)에서 보이는 균일한 인장응력, σ_∞ 을 받고 있는 유한체에 내재된 균열길이 $2a$ 의 내부균열이다. 균열부재, 보강재, 접착제 층을 나타내는 파라미터의 첨자로서 P, R, A 를 사용하였다. 따라서 E_P, E_R 은 균열부재와 보강재의 탄성계수, G_A 는 접착제 층의 전단계수를 나타낸다. 그리고 t_P, t_R, t_A 는 각각의 두께를 나타낸다. 이 해석은 다음과 같은 가정을 가지고 있다. (i) 균열부재와 보강재는 모두 등방성이며 변형은 모두 선형 탄성이다. (ii) 접착에 의한 잔류 열 응력은 없다. 보강된 균열평판에 대한 응력강도계수의 상한해를 구하기 위해서 Rose⁽¹⁾는 변형률 에너지 방출률(strain energy release rate)과 응력강도계수의 관계를 사용하였다.

강된 평판에 대한 응력의 재분포와 Fig. 1(c) 에 보이는 접합 조인트에 대한 변위의 분포에 의해서 계산된다.

2.1 균열이 없는 평판에 대한 응력의 재분포

Fig. 1(b)에 보이는 균열이 없는 부재의 응력 재분포는 고전 평판 이론을 사용하여 계산할 수 있다⁽²⁾. 균열이 없는 부재에서의 응력 σ_y 는 다음과 같다⁽¹⁾.

$$\sigma_y(y=0, z) = \frac{\sigma_\infty}{1+S} + \frac{\sigma_\infty t_P \Delta t (\bar{z} - z)}{I_t} \quad (1)$$

$$\bar{z} = \frac{t_P/2 + S(t_P + t_A + t_P/2)}{1+S} \quad (2)$$

$$\Delta t = \bar{z} - t_P/2 \quad (3)$$

여기서 $S = E'_R t_R / E'_P t_P$ 는 부재와 보강재의 강성비를 나타낸다. 탄성계수는 평면변형을 조건과 평면응력 조건에 따라서 각각 $E' = E / (1 - \nu^2)$, $E' = E$ 로 나타내진다. 그리고 I_t 는 평면변형을 조건하에서의 총 관성모멘트로 다음과 같다.

$$I_t = I_P + E'_R / E'_P I_R \quad (4)$$

$$I_P = \frac{1}{12} t_P^3 + t_P (t_P/2 - \bar{z}) \quad (5)$$

$$I_R = \frac{1}{12} t_R^3 + t_R (t_R/2 + t_A + t_P - \bar{z}) \quad (6)$$

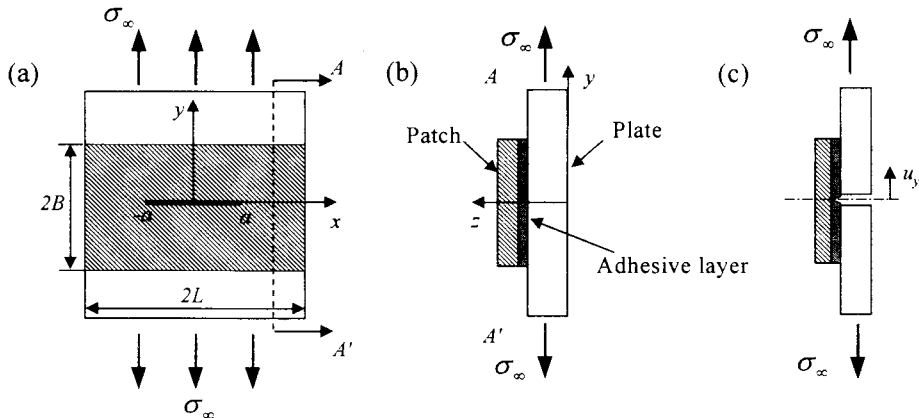


Fig.1 Repair configuration: (a) Patched crack with reinforcement, (b) Cross-section along A-A', (c) A single strip joint

2.2 보강된 균열평판에 대한 변위의 계산

Fig. 1 (c)에 보이는 보강된 균열평판에 대한 변위분포는 다음과 같이 구할 수 있다⁽²⁾.

$$u_y(y=0, z) = -\gamma_{A, \max} t_A + \theta_0 (t_P - z) \quad (7)$$

$$\gamma_{A, \max} = -\frac{\sigma_\infty}{SE'_p \beta t_A} \left(2 + \frac{3}{2} \frac{t_P}{t_R} \right) \quad (8)$$

$$\theta_0 = \frac{6\sigma_\infty t_P (t_P + t_R)}{\kappa E'_R t_R^3} [1 - Q] \quad (9)$$

여기에서

$$Q = \frac{\beta}{\kappa(1+S)} \frac{(t_R/t_P + 3/4)(1 - S t_R/t_P)}{1 + t_R/t_P} \quad (10)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E'_p t_P} + \frac{1}{E'_R t_R} \right)} \quad (11)$$

$$\kappa = \left[\frac{E'_A}{4t_A} \left(\frac{1}{E'_p t_P^3/12} + \frac{1}{E'_R t_R^3/12} \right) \right]^{1/4} \quad (12)$$

3. 균열가교(crack-bridging) 모델

3.1 스프링 상수 $k(z)$ 의 결정

두께에 따른 스프링 상수의 결정은 Rose⁽¹⁾에 의해 제안된 방법을 사용하여 구한다. 즉 Fig. 1(b)에서 보이는 균열이 없는 보강된 평판에서의 재분포된 응력 식(1)과 Fig. 1(c)에서 구한 변위인 식(7)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$k(z) = \frac{\sigma_{yy}(y=0, z)}{E'_p u_y(y=0, z)} = \frac{1}{\pi \Lambda(z)} \quad (13)$$

여기서 $\Lambda(z)$ 는 물리적 파라미터로 정의된다. 한편, 스프링 상수 $k(z)$ 에 대한 제곱평균(average)의 표현은 다음과 같다.

$$k_{rms} = \left(\frac{1}{t_P} \int_0^{t_P} k^2(z) dz \right)^{1/2} \quad (14)$$

3.2 두께에 따른 응력강도계수의 계산

두께방향으로의 거리 z 에 대하여 스프링 상수

를 이용하여 균열가교 모델을 적용하면 Fig. 2와 같이 균열면 사이에 선형거동을 하는 스프링이 분포되어 있다고 가정할 수 있다⁽³⁾. 이것에 대한 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{yy}(z) = \frac{\sigma_\infty}{1+S} + \frac{\sigma_\infty t_P \Delta t (\bar{z} - z)}{I_t}, \quad as \ x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (15)$$

$$\sigma_{yy}(z, x) = k(z) E'_p u_y(z, x), \quad |x| < a, y = 0 \quad (16)$$

한편 두께에 대한 변화가 없다고 가정된 무한체에 내재된 보강된 내부균열에 재분포된 응력 σ_c 이 작용할 때 응력강도계수 상한해는 스프링 상수 및 식(13)에서 정의된 물리적 파라미터를 도입하면 식(17)과 같이 표현할 수 있고 균열길이에 대한 근사적인 접근해는 식(18)과 같이 나타낼 수 있다⁽⁴⁾.

$$K_c = \sigma_o \sqrt{\pi \Lambda} \quad (17)$$

$$K = \sigma_o \sqrt{\pi a \Lambda / (a + \Lambda)} \quad (18)$$

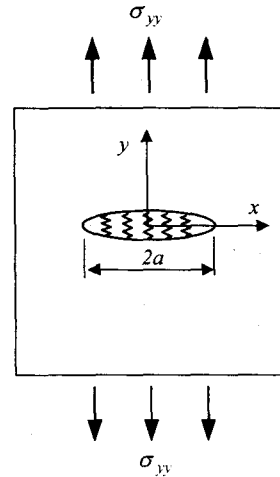


Fig. 2 Distributed springs model for a patched crack

식(17)과 (18)을 이용하여 두께에 대한 응력강도계수의 상한해와 균열길이에 대한 응력강도계수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_c(z) = \sigma_{yy}(y=0, z) \sqrt{\pi \Lambda(z)} \quad (19)$$

$$K(z) = \sigma_{yy}(y=0, z) \sqrt{\frac{\pi a \Lambda(z)}{a + \Lambda(z)}} \quad (20)$$

한편, 유한두께를 가지는 보강된 균열평판에 대한 총 변형률에너지 방출률 G_∞ 은 식(21)이며 이것에 대한 스프링 상수는 식(1)에 대한 제곱평균근해 σ_{rms} 를 사용하면 식(22)와 같다⁽²⁾.

$$G_\infty = \frac{1}{t_p} \int_0^p \sigma_{yy}(y=0, z) u_y(y=0, z) dz \quad (21)$$

$$k_{\infty, rms} = \left(\frac{\sigma_{rms}}{\sqrt{E_p G_\infty}} \right)^{1/2} \quad (22)$$

4. 결과분석 및 토의

계산에 사용된 균열부재, 보강재 그리고 접착재의 물성치와 치수는 Wang 등⁽²⁾이 사용한 값으로 Table 1에 나타내었다. 그리고 Fig. 1(a)에서 보이는 보강재와 접착재의 폭(2L)과 높이(2B)는 각각 500mm, 100mm 이고 균열부재는 500mm, 500mm이다.

Table 1. Physical dimensions and material properties of a typical repair

Layer	E(GPa)	ν	Thickness(mm)
Plate	71	0.3	3.0
Reinforcement	207	0.3	1.02
Adhesive	0.7*	0.33	0.203

* Adhesive's shear modulus G_A

평면응력과 평면변형률에 대하여 스프링 상수를 식(13)으로 구하였고 그 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 평면응력으로 가정한 값이 평면변형률보다 더 큰 값을 보여주고 있다. 이것은 식(19)와 (20)에 비추어 보면 응력강도계수가 평면응력이 평면변형률보다 작은 값을 가짐을 알 수 있었다. 한편, 응력상태에 따른 스프링 상수의 제곱평균근을 식(14)을 이용하여 구하였다. 그리고 Wang 등⁽²⁾이 제안한 식(22)의 결과는 평면변형률쪽에 가까운 결과를 나타내 주었다.

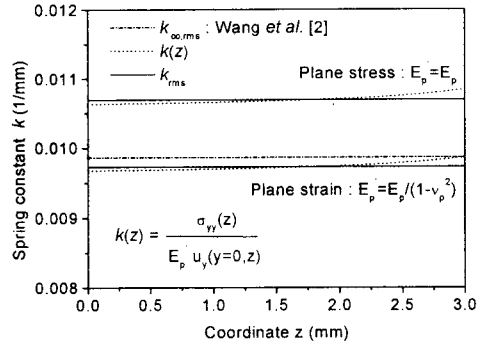


Fig. 3 Comparison of spring constants

결정된 스프링 상수를 이용하여 균열길이에 대한 응력강도계수를 식(20)를 이용하여 구하였다. Fig. 4는 평면변형률 조건하에서 두께방향의 응력강도계수와 Wang 등⁽²⁾이 유한요소법으로 구한 결과를 보여주고 있다. 여기서 K_{max} , K_m , K_{min} 은 각각 $z=0, 1.5, 3mm$ 에서 값을 나타낸다. 그리고 K_{rms} 는 제곱평균근을 나타내고 있다. 균열이 짧은 영역에서는 약간의 차이를 보이지만 균열이 긴 영역에서는 거의 비슷한 결과를 보여주고 있다.

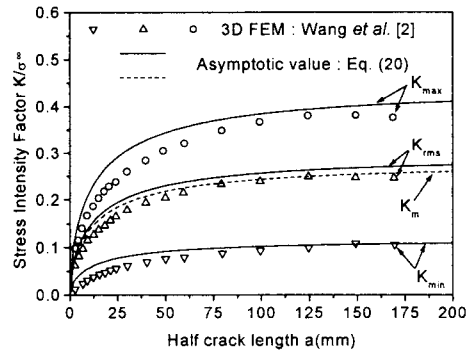


Fig. 4 Comparison between asymptotic solution and finite element results⁽²⁾ for plane strain condition.

Fig. 5는 평면응력 조건하에서 구한 점근해와 유한요소 결과를 비교하였다. Fig. 4의 결과와 같이 짧은 균열 영역에서는 약간의 차이를 보이고 긴 균열 영역에서는 거의 비슷한 값을 가졌다. 그러나 상한해를 비교해 본 결과 평면응력 조건하에서 구한 값들이 유한요소결과에 더 근접함을 알

수 있었다.

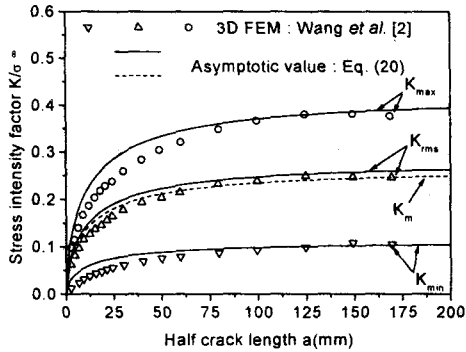


Fig. 5 Comparison between asymptotic solution and finite element results^[2] for plane stress condition.

5. 결론

한쪽 면이 보강된 균열평판에 대한 응력강도계수의 상한해와 균열길이에 대한 응력강도계수를 두께방향에 대한 스프링 상수를 이용하여 구하였다. 짧은 균열에서는 약간의 차이를 보였으나 긴 균열 영역에서는 거의 유사한 값을 가짐을 기존의 유한요소 결과를 통하여 알 수 있었다. 그리고 평면응력 조건일 때 결과가 평면변형률하의 값 보다 유한요소결과에 더 근접함을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) L.R.F. Rose, 1988, "Theoretical analysis of crack patching", A.A. Baker and R.Jones, editors, Bonded Repair of Aircraft Structures, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp.77-106.
- (2) C.H. Wang, L.R.F. Rose and R.Callinan, "Analysis of out-of-plane bending in one-sided bonded repair", Int. J. Solids Structures, Vol.35, No. 14, pp. 1653-1675.
- (3) L.R.F. Rose, 1987, "Crack reinforcement by distributed spring", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, No.4, pp.383-405.