

육면형 병렬기구의 작업공간 해석

최우천* · 정태중**

Analysis of the Workspace of Cubic Parallel Manipulator

Woo Chun Choi, Tae Joong Jung

Key Words: Parallel Manipulator(병렬기구), Workspace(작업공간), Inverse Kinematics(역기구학), Link Interference(링크 간섭)

Abstract

In a parallel manipulator, there are three constraints that determine workspace: link length constraint, passive joint angle constraint, and interference among links. Generally, the link length constraint is the most dominant. The interference among links is, however, also an important parameter in designing a desired parallel manipulator. In this study, the interference among links is mathematically modeled by considering the links as a line and a cylinder of radius of twice the link radius, and a new algorithm is suggested to check if arbitrary two links interfere each other or not. The workspace of a cubic parallel manipulator is illustrated in a 2D space satisfying the three constraints.

1. 서론

병렬기구는 움직이는 플랫폼과 고정된 베이스를 여러 개의 링크로 연결하여 페루프 구조를 갖기 때문에, 기존에 주로 사용되던 직렬 기구에 비해 고강성, 고정밀, 고속에 적합하다. 그러나, 이러한 페루프 구조는 병렬기구의 작업공간을 직렬기구에 비해 축소시키는 단점이 있다. 이렇게 상대적으로 작은 작업 공간 때문에 병렬기구의 작업공간을 원하는 크기와 형태를 갖도록 설계하는 것이 매우 중요하다.

병렬기구에서 작업공간은 대부분 플랫폼의 한 점이 도달 가능한 공간 상의 위치로 표시되고, 보통 그 부분 집합들로 나타내게 된다. 많이 사용되는 부분집합들은 일정자세 작업공간, 자유자재 작업공간, 도달 가능 작업공간 등이 있다.

이러한 작업 공간의 종류와 관계없이 작업공간을 결정하는 방법은 병진 벡터 T 와 회전 행렬 R 중에서 어느 하나가 주어졌을 때 역기구학의 해를 구하여 얻어지는 링크의 방향벡터가 구속조건을 만족하는 경우 작업공간으로 포함시키는 것이다.

병렬기구의 작업공간은 많은 연구자들에 의해 연구되었다. Fichter 등⁽¹⁾은 링크길이 제한만에 의해 일정자세 작업공간을 경계점을 도시하여 나타내었고, Gosselin⁽²⁾은 링크길이 제한에 의한 작업공간이 동심원의 공통영역이 된다는 것을 보이고 면적을 계산하였다. Merlet⁽³⁾은 원하는 형태와 크기를 갖도록 병렬기구를 설계하는 방법을 제시하였다. Bonev 등⁽⁴⁾은 오일러 각을 사용하여 자세작업공간을 도시하는 방법을 제시하였고, Merlet⁽⁵⁾은 여러 종류의 작업공간을 분류하였다. Adkins 등⁽⁶⁾은 3차원으로 작업공간을 도시하고, 특이점의 궤적을 나타내었다. Dafaoui 등⁽⁷⁾은 자신들이 고안

* 고려대학교 기계공학과

** 고려대학교 기계공학과 대학원

한 기구의 작업공간을 2차원 단면에 나타내었다.

본 연구에서는 작업공간의 세 가지 구속 조건인 링크 길이 제한, 수동 관절의 각도 제한, 링크 간의 간섭 모두에 대해서 해석적인 식을 구하여 도시적으로 작업공간을 나타내는 방법을 다룬다. 특히 링크 간의 간섭영역을 직선과 원통을 사용한 모델링을 바탕으로 하여 이를 순차적인 방법으로 수학적인 식들로 표시할 수 있음을 보인다. 그리고 이러한 방법을 육면형 병렬기구에 적용하여 이 기구의 작업공간을 구한다.

2. 작업공간의 구속조건

2.1 링크 길이의 제한

Fig. 1은 일반적인 형상의 6자유도 병렬기구의 좌표벡터를 표시하고 있다.

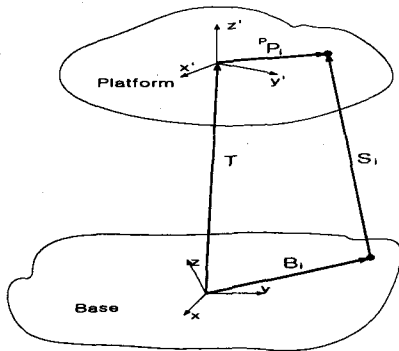


Fig.1 Coordinates and vectors of 6 d.o.f. parallel manipulator with general configuration.

이 그림에서 T 는 베이스 좌표계 원점에서 플랫폼 좌표계 원점을 향하는 병진벡터이고, B_i 는 베이스 좌표계 원점에서 임의의 i 번째 링크의 베이스 쪽 끝점을 향하는 벡터이며, ${}^p P_i$ 는 플랫폼 좌표계 원점에서 i 번째 링크의 플랫폼 쪽 끝점을 향하는 벡터이다. 여기서 위 첨자 p 는 플랫폼 좌표계를 기준으로 했음을 의미한다. S_i 는 i 번째 링크의 베이스 쪽 끝점에서 플랫폼 쪽 끝점을 향하는 벡터로 역기구학의 해이다. Fig. 1에서

$$S_i = T + R^p P_i - B_i \quad (1)$$

이 되고, S_i 방향의 단위 벡터 s_i 는,

$$s_i = \frac{S_i}{|S_i|} = \frac{S_i}{\sqrt{S_i \cdot S_i}} \quad (2)$$

이다. 링크 최소길이를와 최대길이를 각각 l_{\min} 과 l_{\max} 이라 할 때, 링크 길이 제한은 식 (1)에서 구한 S_i 로부터,

$$l_{\min} \leq |S_i| \leq l_{\max} \quad (3)$$

이 된다. 이 구속조건은 일반적으로 세 가지 구속조건 중에서 가장 지배적이다.

2.2 수동 관절 각도 제한

병렬형 기구에서는 원하는 자유도를 얻기 위해 보통 링크의 양끝에 회전 관절을 두게 되는데, 이러한 관절들은 중심 축에 대해서 움직일 수 있는 각도가 제한되므로 플랫폼이 도달할 수 있는 공간을 제약하는 요인이 된다. i 번째 링크의 베이스 쪽 끝의 관절 중심축의 단위 벡터를 j_{bi} 라 하고, 플랫폼 쪽 끝 관절 중심축의 단위벡터를 ${}^p j_{pi}$ 라 하면, 관절은 그 중심축에 대해 유한한 각도만큼 꺾일 수 있으므로 다음 식이 성립한다.

$$j_{bi} \cdot s_i \leq \cos \theta_{bi} \quad (4)$$

$$-{}^p j_{pi} \cdot {}^p s_i \leq \cos \theta_{pi} \quad (5)$$

여기서 ${}^p s_i$ 는 플랫폼 좌표계를 기준한 i 번째 링크의 단위방향벡터이다. 식 (5)의 앞에 '-' 부호가 붙는 것은 플랫폼 쪽 끝에서 관절이 플랫폼에 대해 거꾸로 설치되므로 ${}^p j_{pi}$ 와 ${}^p s_i$ 의 방향의 서로 반대이기 때문이다. 이 구속조건은 구형관절과 같이 허용 꺾임각이 작은 경우에 특히 작업공간을 구속한다.

2.3 링크 간의 간섭

링크 간의 간섭을 판별하기 위해서 기본적으로 링크는 직경이 일정한 유한한 길이를 갖는 원통이라고 가정한다. 이렇게 가정하면 임의의 두 링크 간의 간섭은 두 원통의 중심축 간의 거리가 두 원통의 반경의 합보다 작거나 같을 때 발생함을 알 수 있다. 이를 보다 수학적으로 표현하기 용이하게 하기 위하여 어느 한쪽을 직선으로 하고, 다른 한 쪽을 반경이 원래 두 링크 반경의 합과 같은 원통으로 하여, 이 직선과 원통이 경

계조건 내에서 해를 갖게 되면 간섭이 발생할 가능성이 있다⁽⁸⁾.

Fig. 2는 직선으로 표현된 i번째 링크와 원통으로 표현된 j번째 링크를 보여주고 있다. 직선으로 표시되는 i번째 링크 위의 임의의 점으로의 벡터를 X_i 라 하면, X_i 는 Fig. 3으로부터, 매개변수 t 를 사용하여,

$$X_i = B_i + t(P_i - B_i) = B_i + tS_i \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (6)$$

이 된다.

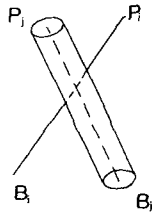


Fig. 2 Interference check between two arbitrary links.

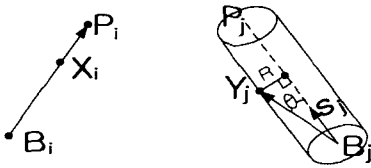


Fig. 3 Arbitrary point X_i on i -th link and Arbitrary point Y_j on j -th link.

마찬가지로 원통으로 표시된 j번째 링크 위의 임의의 점으로의 벡터를 Y_j 라고 하면, Fig. 3으로부터, Y_j 에 관한 벡터 식을 (7)식과 같이 얻는다.

$$(Y_j - B_j) \cdot (Y_j - B_j) - ((Y_j - B_j) \cdot s_j)^2 = R^2 \quad (7)$$

여기서 R 은 원래의 두 링크의 반경의 합이다.

식 (6)의 X_i 를 식 (7)의 Y_j 에 대입한 후 t 에 관하여 정리하면,

$$\begin{aligned} & \{S_i \cdot S_i - (S_i \cdot s_j)^2\}t^2 \\ & + 2[(B_i - B_j) \cdot S_i - (S_i \cdot s_j)((B_i - B_j) \cdot s_j)]t \\ & + (B_i - B_j) \cdot (B_i - B_j) - ((B_i - B_j) \cdot s_j)^2 - R^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

을 얻는다.

식 (8)에서 t 의 2차항, 1차항, 상수항의 계수를 각각 a , b , c 라고 하면 식 (8)은,

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (9)$$

이 된다. 식 (9)의 해가 존재하려면

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad (10)$$

이어야 한다. 식 (10)이 만족되면, 무한히 긴 직선과 무한히 긴 원통이 서로 만난다는 것을 의미하며, 이는 두 링크의 간섭을 위한 필요조건이다. 직선의 길이가 링크의 플랫폼과 베이스의 양 끝점 사이로 한정되려면, 식 (9)의 해가 식 (6)의 t 의 조건 즉, $0 \leq t \leq 1$ 을 만족해야 한다. 즉,

$$0 \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 1 \quad (11-1)$$

$$0 \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 1 \quad (11-2)$$

이 된다.

$t=0$ 인 경우, X_i 는 B_i 가 되고, $t=1$ 인 경우 P_i 가 된다. 그런데 원통의 경우에는 길이를 한정시킬 수는 있으나, 이 경우 원통은 원래의 링크 원통이 아니기 때문에 양 끝 쪽에서 간섭여부를 판별할 때 오차가 발생한다. 이 때문에 원통의 경우에는 길이를 한정시키지 않고, 다음과 같이 한다.

- I) i번째 링크를 직선으로 j번째 링크를 원통으로 하여 해가 존재하며 그 해가 0과 1사이인지 판단한다.
- II) i번째 링크를 원통으로 j번째 링크를 직선으로 하여 해가 존재하고 0과 1사이의 값인지 판단한다.
- III) I)과 II)에서 모두 해가 존재하게 되면 i번째 링크와 j번째 링크는 서로 간섭하는 것이 된다.

한편, 식 (9)에서 a 는

$$a = (S_i \cdot S_i - (S_i \cdot s_j)^2) = |S_i|^2(1 - \cos^2 \theta_{ij}) \geq 0 \quad (12)$$

이다. 여기서 θ_{ij} 는 i번째 링크와 j번째 링크사이의 각도이다. 식 (12)에서 알 수 있듯이 a 는 항상 0보다 크고, 0이 되는 경우는 i, j 링크가 서로 평행할 때이다. 이렇게 평행한 경우에는 b 도 0이 되고, c 는 일반적으로 0이 되지 않음을 알 수 있다. 즉, 두 링크가 평행한 경우, 식 (9)식은 좌변이 c 만 남으므로 불능이 됨을 알 수 있고, 이것

은 평행한 두 링크간의 간섭은 발생할 수 없음을 의미한다.

링크간의 간섭은 병렬형 기구의 보편적인 형태인 Stewart-Gough 형태에서는 크게 발생하지 않으나, 새로운 형태의 병렬 기구를 설계하는데 있어서 중요한 파라미터가 된다.

3. 구속조건들에 의한 작업공간의 도식

3.1 링크 길이 제한의 도식

다음과 같은 수학 기호를 도시를 위해 사용한다.

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad {}^0P_i = \begin{bmatrix} x_{pi} \\ y_{pi} \\ z_{pi} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} x_{bi} \\ y_{bi} \\ z_{bi} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

그러면, 식 (1)과 식 (3)으로부터,

$$l_{\min}^2 \leq (x + r_{11}x_{pi} + r_{12}y_{pi} + r_{13}z_{pi} - x_{bi})^2 + (y + r_{21}x_{pi} + r_{22}y_{pi} + r_{23}z_{pi} - y_{bi})^2 + (z + r_{31}x_{pi} + r_{32}y_{pi} + r_{33}z_{pi} - z_{bi})^2 \leq l_{\max}^2 \quad (14)$$

이 된다. 식 (14)을 만족하는 영역은 3차원 공간에서 반경이 각각 l_{\min} 과 l_{\max} 인 동심 구의 사이가 되고, 6자유도의 병렬기구에서는 6개의 링크가 존재하므로, 6개의 동심 구 사이 영역의 공통 영역이 링크 길이 제한을 만족하는 영역이다.

3.2 수동 관절 각도 제한의 도식

식 (4)에서,

$$\mathbf{j}_{bi} = \begin{bmatrix} x_{j, bi} \\ y_{j, bi} \\ z_{j, bi} \end{bmatrix} \quad (15)$$

이라고 하고, 식 (4)에 대입한 후 양변을 제곱하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \{ x_{j, bi}(x + r_{11}x_{pi} + r_{12}y_{pi} + r_{13}z_{pi} - x_{bi}) \\ & + y_{j, bi}(y + r_{21}x_{pi} + r_{22}y_{pi} + r_{23}z_{pi} - y_{bi}) \\ & + z_{j, bi}(z + r_{31}x_{pi} + r_{32}y_{pi} + r_{33}z_{pi} - z_{bi}) \}^2 \\ & \leq \cos^2 \theta_{bi} \{ (x + r_{11}x_{pi} + r_{12}y_{pi} + r_{13}z_{pi} - x_{bi})^2 \\ & + (y + r_{21}x_{pi} + r_{22}y_{pi} + r_{23}z_{pi} - y_{bi})^2 \\ & + (z + r_{31}x_{pi} + r_{32}y_{pi} + r_{33}z_{pi} - z_{bi})^2 \} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)은 x, y, z 에 관한 2차식이 되므로, 이것은 공간의 어느 단면에 대하여 타원이나 쌍곡선들로

주어진다. 따라서, 수동 관절의 각도 제한을 만족하는 영역은 이들 타원이나 쌍곡선들이 공통으로 만족하는 영역이 된다. 주의할 것은 식 (14)는 식 (4)를 제곱하여 얻어지므로 식 (14)를 만족하는 영역이 모두 식 (4)를 만족하지는 않는다는 것이다. 이를 판별해야 한다.

3.3 링크간의 간섭의 도식

링크길이 제한이나 수동관절의 각도 제한과는 달리 링크간의 간섭에 대해서는 단순한 식을 얻을 수 없다. 또 식 (11)은 한번에 도식할 수 없으므로 다음과 같은 방법을 사용한다.

I) 식 (10)을 도식한다.

II) 식 (11-1)에 대하여,

$$i) \quad b \leq \sqrt{b^2 - 4ac} \leq 2a + b \quad (17)$$

$$ii) \quad b \leq 0 \quad (18)$$

이면 식 (17)은,

$$iii) \quad a^2 + ab + ac \geq 0 \quad (19)$$

이 되고

$$iv) \quad b > 0 \quad (20)$$

이면 식 (17)은,

$$v) \quad ac \leq 0 \leq a^2 + ab + ac \quad (21)$$

이 된다.

III) 식 (11-2)에 대하여,

$$i) \quad -2a - b \leq \sqrt{b^2 - 4ac} \leq -b \quad (22)$$

ii) b 가 0보다 크면, 즉 식 (20)이 성립하면, 식 (22)이 성립할 수 없으므로 식 (18)이 성립해야 한다.

$$iii) \quad 2a + b \geq 0 \quad (23)$$

인 경우 식 (22)은,

$$iv) \quad ac \geq 0 \quad (24)$$

이 되고,

$$v) \quad 2a + b < 0 \quad (25)$$

이면 식 (22)은,

$$vi) \quad a^2 + ab + ac \leq 0 \leq ac \quad (26)$$

이 된다.

식 (10)과 식 (18)-(21)과 식 (23)-(26)을 만족시키는 영역이 간섭영역이 된다.

4. 육면형 병렬기구의 작업공간

앞서 서술한 방법을 사용하여 육면형 병렬기구 (Fig. 4 참조)의 좌표를 대입하여 작업공간을 도시해 본다. 육면형 병렬기구에서의 좌표는 다음과 같다.

$${}^p P_1 = \begin{bmatrix} -140 \\ -140 \\ -28 \end{bmatrix}, \quad {}^p P_2 = \begin{bmatrix} -140 \\ 140 \\ -28 \end{bmatrix}, \quad {}^p P_3 = \begin{bmatrix} 140 \\ 0 \\ -28 \end{bmatrix},$$

$${}^p P_4 = \begin{bmatrix} -177 \\ 70 \\ -280 \end{bmatrix}, \quad {}^p P_5 = \begin{bmatrix} -177 \\ -70 \\ -280 \end{bmatrix}, \quad {}^p P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 177 \\ -140 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -140 \\ -140 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -140 \\ 140 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 140 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 177 \\ 70 \\ 130 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 177 \\ -70 \\ 130 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -177 \\ 280 \end{bmatrix}$$

(27)

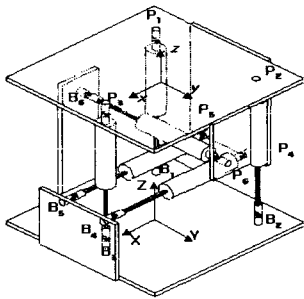


Fig. 4 Schematic of a Cubic Parallel Manipulator.

본 연구에서는 회전행렬을 항등행렬로 고정하여 일정자세 작업공간을 구하였고, 해석과 도시를 위해 Mathematica를 사용하였다. x, y 단면에 대해서 베이스 좌표계 원점으로부터 400 mm 높이에서 도시하였다. 링크의 최소길이는 249 mm, 최대길이는 399 mm이다.

Fig. 5은 링크 길이 제한에 의한 작업공간을 나타내고 있다. 채색된 영역이 링크 길이 제한을 만족시키는 영역이다. 동심원 영역이 3개 밖에 주어지지 않는 것은 회전행렬이 항등행렬인 경우 육면형 병렬기구는 1~3번 링크와 4~5번 링크의 방향벡터가 동일하므로 동심원이 겹치기 때문이다.

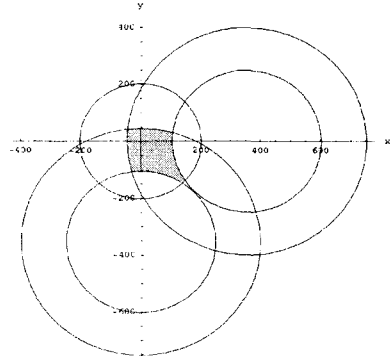


Fig. 5 Workspace Satisfying the link length constraint at $z=400\text{mm}$.

Fig. 6은 수동 관절 각도 제한에 의한 작업공간을 나타낸다. 최대 꺾임각은 30° 로 하였다. 포물선과 원으로 주어지는 그림이 3개만 나오는 것은 1~3링크와 4~5 링크의 플랫폼과 베이스 끝 관절의 단위방향벡터가 동일하기 때문이다.

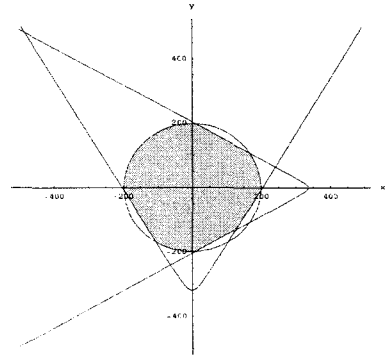


Fig. 6 Workspace satisfying the passive joint angle constraint at $z=400\text{mm}$.

Fig. 5 과 Fig. 6을 비교해 보면 링크 길이 제한을 만족시키는 영역이 수동 관절 각도 제한을 만족시키는 영역에 대부분 포함되므로 수동 관절 각도 제한은 작업공간에 큰 영향을 미치지 못함을 알 수 있다.

링크 간의 간섭의 경우 6개의 링크 중 임의의 2개의 링크 간 간섭을 모두 점검하여 도시하여야 하는데 이를 한번에 도시하면 인식하기가 어렵다. 그러므로 작업공간에 영향을 미치는 링크의 간섭영역을 링크길이 제한에 의한 작업공간과 함

게 도시하여 간섭의 영향을 나타낸다. Fig. 7과 Fig. 8는 Fig. 4에서 1번 링크와 5번 링크가 서로 간섭하는 영역을 보여주는데 Fig. 7은 1번 링크를 직선, 5번 링크를 원통으로 하여 간섭 영역을 구한 것이고, Fig. 8은 1번 링크를 원통, 5번 링크를 직선으로 하여 구한 것이다. 실제 1번 링크와 5번 링크의 간섭 영역은 Fig. 7과 Fig. 8의 간섭 영역의 공통영역이 된다. Fig. 7과 Fig. 8에서 알 수 있듯이 링크 간의 간섭에 의해 작업 공간이 줄어들음을 알 수 있다. 이것은 1번 링크와 5번 링크 사이의 거리를 늘려줌으로써 해결할 수 있다.

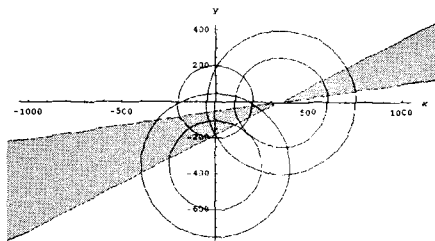


Fig. 7 Region of link interference between link 1 and link 5 modeled by a line and a cylinder, respectively.

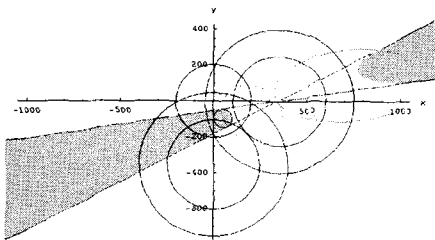


Fig. 8 Region of link interference between link 5 and link 1 modeled by a line and a cylinder, respectively.

5. 결론

- 병렬기구의 작업공간을 결정짓는 구속조건은 링크길이 제한, 수동관절각도 제한, 링크간의 간섭이고 이 세 조건은 모두 해석적인 수식을 사용하여 도시 가능하다.
- 링크간의 간섭은 직선과 원통을 이용한 모델링을 바탕으로 원통의 길이 제한이 없는 점을 보완하였고, 순차적인 알고리즘으로 이를 도시할

수 있는 방법을 개발하였다.

- 모든 구속조건을 적용하여 작업공간을 도시함으로써 설계자는 자신이 원하는 형태와 크기의 작업공간을 갖도록 병렬기구를 설계하는 것이 가능하고, 링크 간섭과 같은 문제점도 파악할 수 있다.

후기

본 연구는 한국과학재단 특정기초(과제번호: 1999-1-304-003-3)에 의해 지원을 받아 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Fichter, E. F. "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction", The International Journal of Robotics Research, Vol. 5, no. 2, pp. 157-182, 1986.
- (2) Gosselin, C., "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators", ASME Journal of Mechanical Design Vol. 112, pp. 331-336, 1990.
- (3) Merlet, J. P. "Designing a Parallel Manipulator for a Specific Workspace", The International Journal of Robotics Research, Vol. 16, no. 4, pp. 545-556, 1997.
- (4) Bonev I. A., Ryu, J. "6 자유도 병렬로봇의 새로운 오리엔테이션 작업공간 해석", ICASE, pp. 40-47, 1999/3.
- (5) Merlet, J. P. "Determination of 6D Workspaces of Gough-Type Parallel Manipulator and Comparison between Different Geometries", The International Journal of Robotics Research, Vol. 18, no. 9, pp. 902-916, 1999.
- (6) Adkins, F. A. "Operational Envelope of a Spatial Stewart Platform", The Journal of Mechanical Design, Vol. 119, pp. 330-332, 1997.
- (7) Dafaoui, E., Amirat, Y. "Analysis and Design of a Six-DOF Parallel Manipulator, Modeling, Singular Configurations, and Workspace", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 14, no. 1, pp. 78-91, 1998.
- (8) 임 재범, "스트루크, 조인트 유효각, 다리간섭을 고려한 병렬매니퓰레이터의 작업영역 및 특이형상에 관한 연구", 석사학위논문, 고려대학교, 2000.