

## 전달관로 요소를 이용한 가변스텝 시뮬레이션

황운규 \* · 조승호 \*\*

## Variable step size simulation using transmission line element

Un-Kyoo Hwang, Seung-Ho Cho

**Key Words :** transmission line element(전달관로 요소), simulation(시뮬레이션), parallel processing(병렬처리), variable timestep size(가변 시간스텝 크기)

## Abstract

In this paper, the simulation methods using transmission lines are studied and realized, which are necessary in design and analysis of hydraulic control systems. The basic idea of this method is that system components are separated by transmission line element for simulation. The PI-controller can keep inductance level as low as desired. It can also handle nonlinearities and discontinuities without flag signal when restarting integration. Parallel hydraulic circuits are simulated using parallel processing algorithm. To show that using variable timestep size in each subsystem, simulation time can be reduced. Performance of the simulation results is compared with that of Runge Kutta method.

## 1. 서론

전달관로 모델링(Transmission Line Modeling)방법은 1970년대 초부터 전자기학 혹은 열전도를 대상으로 연구가 시도되었다.<sup>(1,2)</sup> 전달관로 모델링은 최근 일반적인 경향 중 하나로서 전통적인 실험과 해석적 기술에 수치해석적 시뮬레이션을 추가하기 위한 것으로서, 이는 디지털 컴퓨터로 해를 구하기 위한 모델을 구성하는 방법이다. 아울러, 이는 컴퓨터 기술의 발달에 밀접한 연관성을 가지고 있다. 최근 비용과 시간의 절약 면에서 빠른 시뮬레이션 또는 실시간 시뮬레이션 필요성이 점차적으로 대두되고 있다. 이는 인간-기계 결합시스템에서 인간이 기계를 조작하는 실제의 느낌을 시뮬레이션으로 반영하려는 의도도 포함된다.

사용된 방법의 기본 아이디어는 부품들을 서로 분리시키는 전달길이 관로요소를 사용하여 시스템을 몇 개의 서브 시스템으로 나누고 서브 시스템의 동특성을 고려한 적분 시간 스텝을 최적 조합시켜, 시뮬레이션 시간을 최소한으로 줄이는데 목

적을 두고 있다.

이때 분리된 시스템에서 다른 시간 스텝을 사용하여 병렬처리시 독립적으로 오차에 대한 피드백 처리를 적용함으로써, 각 서브시스템은 빠른 속도와 더불어 정밀도를 향상시킬 수 있다. 또한 동기 지점을 각 서브시스템들의 특성에 맞게 조절하여 서로다른 타입의 시스템에서도 최적화된 병렬처리를 할수있다. 아울러 본 연구는 고정스텝로직 및 가변스텝 런지쿠타(Runge Kutta)방식과 비교를 시도 하였다.

## 2. 전달관로 요소를 사용한 모델링

## 2.1 기본원리

유압 시스템을 시뮬레이션 할 때 단위 전달관로요소를 사용하는 기본 원리는, 각각의 부품내에서 미분방정식을 풀 수 있게 하기 위하여 여러부품을 서로 분리시키는 것이다. 이는 부품들 사이의 한 개 스텝에 해당하는 길이의 관로요소를 도입함으로써 수행 된다. 따라서 부품들 사이에 지연시간이 도입된다.

전달관로 요소들을 사용하여 모델링 할 때, 순

\* 홍익대학교 대학원 기계공학과

\*\* 홍익대학교 기계공학과

수 체적(capacitance)은 하나의 시간스텝에 해당하는 관로 요소로 대체된다. 이는 관로 양단에 부착되어있는 부품들을 하나의 시간스텝으로 서로 분리시킨다.

따라서, 분할된 시스템은 시간 지연을 가지고 처리 된다. 본 방법의 수치적 안정성은 관로요소들의 기생적(parasitic) 인덕턴스와 관련이 있다. 인덕턴스가 원하지 않는 효과를 가져오면 관로길이가 충분히 짧아지도록 시간 스텝을 줄인다.

본 논문에서는 기생적인 인덕턴스를 요구되는 수준까지 제한하는 방법에 의하여, 스텝크기를 조절한다.

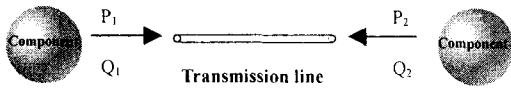


Fig. 1 Transmission line element separating components.

Fig.1 와 같은 관로 모델에 대하여 분포관로 전달 방정식을 풀면, 다음과 같은 4 개의 폴(pole)을 갖는 방정식이 유도된다.<sup>(3)</sup>

$$\begin{pmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서

$$A_L = D_L = \cosh hs\sqrt{N(s)}$$

$$B_L = -\frac{1}{Z_c\sqrt{N(s)}} \sinh hs\sqrt{N(s)}$$

$$C_L = -Z_c\sqrt{N(s)} \sinh hs\sqrt{N(s)}$$

$$Z_c = \frac{\rho a}{A} \Rightarrow \frac{h}{C}$$

$Z_c$ 는 무점성 특성 임피던스 이고,  $N(s)$ 는 주파수에 관계되는 마찰 계수 이다. 만약 점성마찰이 무시된다면 ( $N(s)=1$ ) 시간 영역에서 유량과 압력사이에 관련된 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(t+h) &= c_1(t) + Z_c q_1(t+h) \\ p_2(t+h) &= c_2(t) + Z_c q_2(t+h) \end{aligned} \quad (2)$$

이때

$$\begin{aligned} c_2(t) &= p_1(t) + Z_c q_1(t) \\ c_1(t) &= p_2(t) + Z_c q_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$c_1$  과  $c_2$  는 한 노드에서 압력과 유량의 계산에 필요한 상대 노드의 모든 정보를 포함하고 있다. 관로 사이의 각 부품들에 대하여 식(2)를 적용시켜 시뮬레이션 한다. 관로요소를 사용하는데 있어 제한 요소는 관로길이에 의해 나타나는 기생적인 인덕턴스이다. 시뮬레이션에서 관로 길이는 시간스텝에 비례하기 때문에 인덕턴스 또한 시간스텝에 비례한다. 그러므로, 긴시간스텝에 의한 영향을 피하기위하여 시간스텝을 줄여야 하나, 고정된 짧은 시간 스텝으로 시스템을 시뮬레이션 할 경우, 연산 시간이 늘어나고, 전단오차가 문제가 될 수 있다. 따라서 효과적인 방법은 가변 시간스텝으로 시스템을 시뮬레이션 하는 것이다. 가변 시간스텝은 빠르고 정밀한 출력을 나타내어 컴퓨터의 계산능력을 보다 효율적으로 사용 하는 장점을 가진다.

## 2.2 오차 추정

한가지 오차 기준으로서 압력 차이의 유일한 원인은 유체의 관성 또는 인덕턴스이기 때문에 손실없는 관로에서 두 점 사이의 압력차이는 미리 정해놓은 기준을 초과해서는 안되는 것으로 설정하였다. 집중정수를 사용한 관로 방정식은 다음과 같다.

$$p_2 - p_1 + L \frac{dq}{dt} + Rq = 0 \quad (4)$$

$$q_2 - q_1 + C \frac{dp}{dt} = 0 \quad (5)$$

만약 관로 요소가 손실없이 ( $R=0$ ) 모델 되었다면, 관로 인덕턴스  $L$  은 단지 관로 양단의 압력차이의 유일한 근원이다. 관로의 인덕턴스  $L$  은 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.

$$L = \frac{\rho l}{A} \quad (6)$$

여기서  $l$ 은 길이,  $\rho$ 는 기름 밀도 그리고  $A$ 는 관로의 단면적이다. 관로의 길이는 시간스텝  $h$ 와 유체안의 음속  $a$ 에 의해서 결정되고, 단면적  $A$

는 체적  $V$  와 길이  $l$  에 관계 되므로, 다음식을 얻을 수 있다.

$$L = \frac{h^2}{C} \quad (7)$$

즉,  $L$  은 시간스텝  $h$  의 자승에 비례하고. 이는 또한 시간스텝의 함수로서 오차의 지표가 된다.

이 오차는 유량이 변화할 때, 양끝단사이의 압력차에 의하여 나타나게 된다.

토출이 막혀있고 ( $Q_2 = 0$ ) 마찰은 영 ( $N = 1$ ) 이라는 가정 하에서, 관로에 관한 전달 방정식은 4-폴 방정식(1)으로부터 유도될 수 있다. 압력  $P_1$  과  $P_2$  는 다음과 같이  $Q_1$  에 의하여 나타내진다.

$$\frac{P_1(s)C}{hQ_1(s)} = \frac{e^{sh} + e^{-sh}}{e^{sh} - e^{-sh}} \quad (8a)$$

$$\frac{P_2(s)C}{hQ_1(s)} = \frac{2}{e^{sh} - e^{-sh}} \quad (8b)$$

식 (8a)에서 압력치의 추정오차와 실제 오차는 각각 (9), (10)식으로 표현 된다.<sup>(4)</sup>

$$\hat{E}(s) = \frac{Q_1(s)}{C} h \frac{2 - e^{sh} - e^{-sh}}{e^{sh} - e^{-sh}} \quad (9)$$

$$E(s) = \frac{Q_1(s)}{C} \left( \frac{1}{s} - h \frac{e^{sh} + e^{-sh}}{e^{sh} - e^{-sh}} \right) \quad (10)$$

위의 두 식은 시간스텝  $h$  와 주파수  $w$  에 대하여 그 특성과 값이 거의 유사한 경향을 보이므로 추정 오차  $\hat{E}(s)$  에 의하여 시간스텝  $h$  를 결정할 수 있다.<sup>(4)</sup>

### 2.3 스텝 크기의 조정

스텝크기 조정 알고리즘을 보면 보통의 스텝크기 제어기는 적분제어기로 볼수 있다. 여기서 쓰이는 PI 컨트롤러는 스텝크기의 변화가 부드럽다는 장점을 가진다.<sup>(5,6)</sup>

스텝크기를 제어하는 과정을 Fig. 2 피드백 시스템으로 표현 될 수 있다. 추정 오차가 출력 이고 스텝 크기는 입력이다. 이 피드백시스템의 안정성은 아직 제대로 해석되지 않았으나, 수치적 실험에

서 안정성은 충분히 좋은것으로 나타났다.

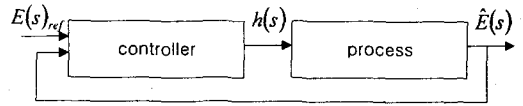


Fig. 2 Step size controller

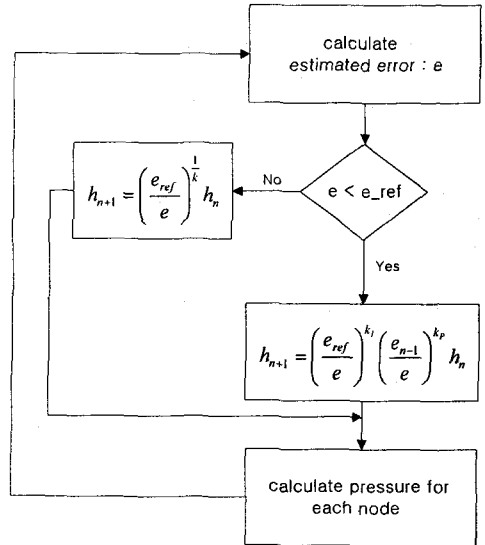


Fig. 3 step size control algorithm

스텝 제어기는 오차가 기준치보다 클 경우 현재 시간스텝은 거부하며 거부된 스텝보다 크기를 훨씬 줄여서 시간스텝을 재산출한다. 각스텝이 부적절하다고 보여지는한 거부되나, 실제 시물레이션에서는 전체 시물레이션 시간에 비하여 극히 적은 스텝만이 거부되므로, 계산에 필요한 스텝수를 줄이게된다. 일반적인 스텝 크기 제어기는 식(11)과 같다

$$h_{n+1} = \left( \frac{e_{ref}}{e} \right)^{k_i} \left( \frac{e_{n-1}}{e} \right)^{k_p} h_n \quad (11)$$

여기서  $e$  는 현재 시간스텝의 오차이고,  $e_{ref}$  는 기준입력 오차이고,  $k_i$  와  $k_p$  는 컨트롤 상수이다. 그러므로 스텝 크기는 오차에 의해 조정된다.

스텝이 거부되었을 때 사용되는 제어기는 식 (12)와 같다. 컨트롤식 (12)에 상수  $k$  는 식(11)에 상수  $k_i$  보다 스텝의 안정성을 위하여 상당히 큰 값이다. 본 논문에선 :  $k_i = 0.01$ ,  $k_p = 0.05$  와

$k=1.5$  를 사용하였다.

$$h_{n+1} = \left( \frac{e_{ref}}{e} \right)^{\frac{1}{k}} h_n \quad (12)$$

### 2.4 수정된 모델

시간스텝의 변화 결과로서 변화하는  $Z_c$  값을 보상하기 위하여, 변화하는 시간스텝에 적합하도록, 적분방식을 수정한다. 체적 변화 혹은 체적탄성계수 등과 같은 다른 이유로 특성 임피던스가 변할 때 이 보상이 사용되어진다.

$$c_i(t) = \alpha c_i(t-h) + (1-\alpha)c_{oi}(t) \quad (13)$$

여기서  $c_{oi}$  은 필터되지 않은 특성이다. 파라미터  $\alpha$  는  $\alpha=0.2$  로 선택한다. 이로 인하여 전달방정식(10)은 다음식으로 바뀐다.

$$\frac{P_1(s)C}{Q_1(s)} = \frac{h e^{sh} + e^{-sh}(1-\alpha)^2 - 2\alpha + \alpha^2 e^{-sh}}{(1-\alpha)e^{sh} - e^{-sh}(1-\alpha)^2 - 2\alpha + \alpha^2 e^{-sh}} \quad (14)$$

또한 추정 오차  $\hat{e}(t)$  를 만들때, 두개의 시간스텝에서의 평균압력을 사용하는 것이 유리하다. 이는 하나의 체적에서 이웃 노드들에 있는 압력의 고주파 진동의 영향을 줄인다.<sup>(2)</sup> 따라서, 수정된 오차  $\hat{e}$  는 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{e} = \frac{P_{1n} - P_{2n} + P_{1_{n-1}} - P_{2_{n-1}}}{2} \quad (15)$$

이로 인하여 추정오차의 전달방정식에서, 공진을 억제하고 스텝크기를 보다 부드럽게 선택할 수 있다.

### 3. 병렬처리

계산시 높은 효율을 얻기 위하여서, 시뮬레이션 되는 복잡한 시스템을 몇 개의 부분으로 나눠 다른 시간스텝으로 실행시킬 수 있다. 이때 각 서브시스템사이에서의 연결은 전달 관로 요소들을 사용하여 처리할 수 있다. 병렬 시스템의 한 예가 Fig.4 에 개략적으로 도시되어 있다. 가운데 하나

의 부품이 2 개의 서브시스템에 연결되어있다. 서브시스템 1 과 2 에 대하여 각각 시간스텝을 계산한다. 이때, 시간스텝의 거부처리는 각 서브시스템 별로 독립적으로 이루어지게 된다. 다음 스텝 계산시에는 이들중, 가장짧은 시간스텝을 가지는 서브시스템만을 계산한다. 이때 긴 시간스텝을 가진 서브시스템은 정상유동으로 대체되며, 긴 시간스텝을 가지는 시스템과 동기화될 수 있도록, 짧은 시간스텝을 가진 서브시스템이 시간스텝 산출 중 동기교점을 만들어 내게 된다. 작은 시간스텝을 가진 서브 시스템은 동기시스템에서 다른 서브시스템과 정보를 공유하게된다.

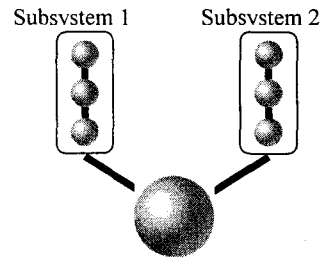


Fig. 4 Simple model for parallel processing

### 4. 시뮬레이션 결과

#### 4.1 압력 릴리프 밸브를 사용한 서보 시스템

밸브와 릴리프밸브 그리고 실린더가 사용된 간단한 유압회로가 Fig.5 에 도시 되어져 있다. 실린더 챔버의 초기 압력은 5MPa 이고 밸브가 닫혀있는 상태에서, 0.05 초에 열리게 된다. 펌프의 공급압력은 10MPa 공급유량은 30l/min 이다.

여기서 비선형성요인에는 방향제어 밸브의 개방, 스트로크한계, 6MPa 에서 열리도록 설정된 릴리프 밸브가 해당된다.

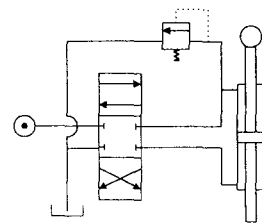


Fig. 5 Single circuit

Fig6, Fig7 은 위 회로의 시뮬레이션 결과이다. 0.05 초에서 밸브가 개방되어, 실린더내의 압력 변

동에 따른 시간스텝의 변화가 초기에 명확히 나타나고 있다. 시스템이 안정구간으로 들어감에 따라 스텝크기는 급증하고 있음을 알수있다. 2.3 초 근방에서 실린더가 스트로크 한계에 도달하게 되며, 이에대한 비선형성처리를 위하여 시간스텝이 감소하는 것을 Fig.7 이 보여주고 있다. 고정스텝 처리의 경우 0.001 초 이하의 세밀한 시간스텝으로 시뮬레이션 하는 경우 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었으며 그 이상의 시간스텝크기로서 시뮬레이션 할 경우에는 불안정한 결과를 나타내었다.

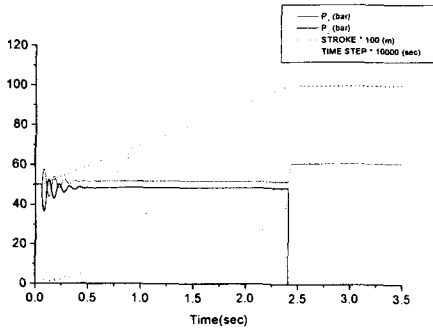


Fig. 6 Single circuit simulation using variable stepsize (transmission line element:  $h=0.01\sim 0.0001s$ )

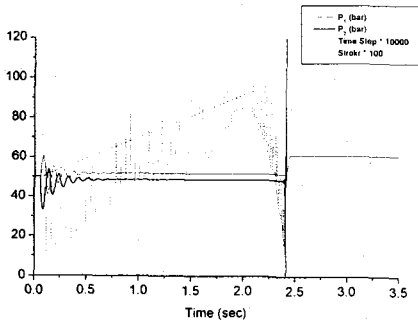


Fig. 7 Single circuit simulation using variable stepsize (R.K.4:  $h=0.01\sim 0.0001s$ )

R.K.4 가변시간스텝로직에 대해 가변 시간간격 0.01~0.0001 초로 설정하여 시뮬레이션한 결과는 Fig.7 와 같다. R.K.4 로직의 경우 위와같이 전달관로를 이용한 가변스텝과 동일한 시간스텝의 변동폭(0.01~0.0001 초)으로 시뮬레이션 할 경우 불안정한 모습을 보였으며, 시간스텝에 따른 변화가 심하게 나타났다. 시간스텝의 변동폭을 1/10 으로 감소 시킬경우(0.001~0.00001 초) 비로서 안정적인 결과를 나타내었다.

## 4.2 병렬 처리

병렬처리를 위한 시스템이 Fig 8 에 나타나 있다.

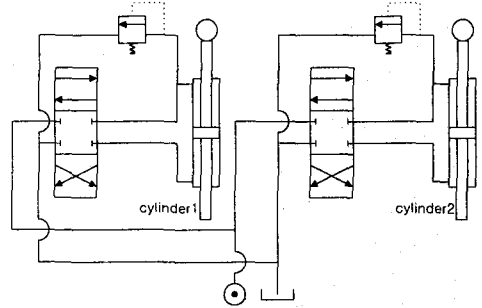


Fig. 8 Parallel circuit

실린더 1 의 제어밸브가 0.05 초, 실린더 2 의 제어밸브가 0.15 초에서 각각 열린다. 펌프의 용량은 60 l/min 이며 그외 설정은 Fig.5 의 단일회로 시스템과 동일하게 하였다. 시뮬레이션 결과가 Fig.9, Fig.10 에 도시되어 있다.

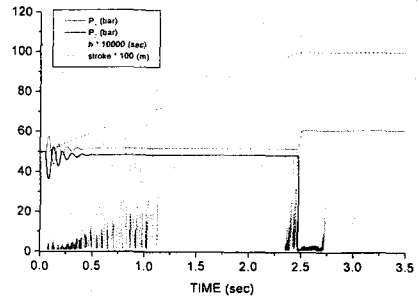


Fig. 9 Parallel circuit simulation using variable stepsize (transmission line element:  $h=0.01\sim 0.0001s$ )

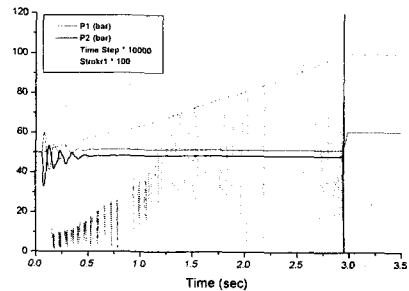


Fig. 10 Parallel circuit simulation using variable stepsize (R.K.4:  $h=0.01\sim 0.0001s$ )

시뮬레이션 초기에 시간스텝의 변동이 단일 시스템에 비해 상당히 늘어났다. 이는 두 서브시스템의 동기화 때문에 일어난다. 이때 고정스텝과

R.K.4 가변스텝을 이용한 결과는 단일시스템 처리 시와 경향이 유사하였다. 고정스텝의 경우 최대스텝크기를 0.001 초 이하로 설정해주었을 때 안정성이 보장되었으며, R.K.4 가변스텝은 시간스텝의 변동이 대단히 심하였으며 결과 또한 불안정하였다. 이때 역시 시간스텝크기 변동폭을 1/10 으로 감소시킬경우(0.001~0.00001 초) 비로서 안정적인 결과를 나타내었다. 각 로직이 계산의 안정성을 가지는 범위에서 계산결과를 비교한 것이 Fig.11 과 Fig.12 에 도시되어 있다.

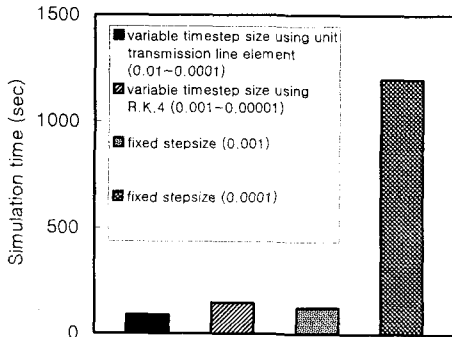


Fig. 11 Single circuit simulation

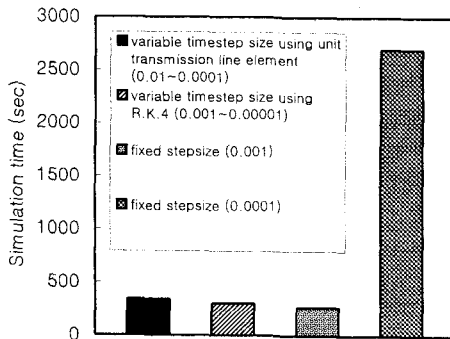


Fig. 12 Parallel circuit simulation

## 5. 결론

본 연구결과를 요약 하면 불연속점에서도 좋은 안정성을 나타냈으며, 전체적인 계산 속도는 최소스텝 사이즈( $h=0.0001s$ )로 고정시켜 계산한 결과보다 약 9 배 정도의 향상이 있었다. R.K.4 가변스텝로직과 비교 할시, 양쪽 로직 모두 계산의 안정성을 가지는 시간스텝을 사용할시는, 전달관로요

소를 이용한 가변스텝 로직이 정밀도와 계산속도에 있어서 우월성을 가지고있으며, 스텝시간 선정면에서 보다 넓은 유연성을 보여 주었다. 또한, 비선형성 처리에 있어서도 보다 뛰어난 것으로 보였다. 아울러 인덕턴스의 효과를 제어하여 긴 시간스텝의 장점을 수용하면서, 정밀한 시뮬레이션이 가능함을 보여주었다. 또한 불연속성 발생신호에 관한 정교한 플래그 시스템이 필요 없다는 장점을 가지고 있으며, 각 서브시스템에서 각기 다른 시간간격을 가지는 병렬 고속의 시뮬레이션이 가능함을 보였다.

## 참고문헌

- (1) Christopoulos, Christos, 1995, The transmission-line modelling method, New York, N.Y.: Oxford: IEEE, Oxford University Press.
- (2) S. H. Pulko, A. Lallik, R. Allen, and P. Johns., 1990, Automatic timestepping in tlm routines for the modelling of thermal diffusion processes. International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks, Devices and Fields, 3:127-136.
- (3) T. J. Viersma., 1980, Analysis, Synthesis and Design of Hydraulic Servosystems and Pipelines, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- (4) A Jansson, P Krus, J-O Palmberg, 1992, 'Variable time step size applied to simulation of fluid power systems using transmission line elements'. Presented at 'Fifth Bath International Fluid Power Workshop', Bath, UK.
- (5) E. Hairer, G. Wanner. 1991, Solving Ordinary Differential Equations I, II. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- (6) R.M.M.Mattheij, J.Molenaar, 1995, Ordinary Differential Equations In Theory and Practice. John Wiley & Sons.