

회전체 동역학계의 운동방정식에 근거한 양면 밸런싱 기법

정 동 화* · 박 노 길**

Two Plane Balancing Method based on the Equations of Motion of Rotor Dynamic System

Dong-Hwa Jeong and No-Gil Park

Key Words: Two Plane Balancing, Influence Coefficients Method, New Method based on the E.O.M of Motion Rotor Dynamic System

Abstract

Since the influence coefficients method in balancing of rotors is developed with the basement of not the principle of rotor system dynamics, but the linear relationship of between the measuring quantities and the unbalance quantities, field engineers can apply the method without additional understanding on the rotor dynamics. But the influence coefficients method is not robust to the measurement error.

This paper proposes a new method for the two plane balancing of rigid rotor, based on the principle of rotor dynamics. And the kit for experiment is made by ourselves, and in order to measure in the same condition with it, we do a experiment three times. And then with the Response of gap sensor, the SNR(Signal and Noise) is compared and analyzed about measuring error between the influence coefficient method and the new method, and it is proved that the new method is less robust than the influence coefficient method.

1. 서 론

회전기계가 점차 고속화되고 경량화 되면서 고립·차단과 같은 수동적 저감대책들이 기술적인 한계를 가지고 있어서 밸런싱 기술에 대한 중요성이 정밀기계 개발분야에서 재인식되고 있다. 1934년 Thearle⁽¹⁾에 의해 영향계수법이 제시된 이후, 지금까지 영향계수법은 변동없이 현장에서 지속적으로 적용되어 왔다. 최근의 이와 관련한 연구들이 종종 발표되기는 하지만 기본 틀에서 벗어난 논문은 전무한 상태이며, 측정 오차를 줄이는 전략적 접근으로 최적화의 기법이 도입되거나 실험절차를 경제적으로 수행하는 방안이 연구될 뿐 회전체 동역학 분야의 해석 결과를 직접 밸런싱에 적용시키는 방안이 연구되어 있지 않다. ⁽²⁾⁽⁴⁾ 밸런싱 기술 중에서 영향계수법은 '측정량과 불평형량 사이의 선형적 관계'를 이용한

것으로 사용자가 이해하기 쉽고 실무에 적용하기가 편리하다. 그러나 한 운전 속도에 대한 측정량만을 이용해야 하므로 측정오차의 영향에 민감하다.

밸런싱 기술은 회전체 동역학계의 진동원을 규명하는 기술이므로 기본 공식은 운동방정식을 근거로 하는 것이 가장 좋다. 그러나 지금까지 운동방정식에 근거한 밸런싱 기술은 국내외적으로 전무한 상태이다. 본 연구에서는 회전기계의 양면 밸런싱을 위한 새로운 방법으로 2자유도 집중계의 운동방정식을 근거로 하여 개발하였고, 실험을 위한 장치를 구성해서 얻은 실험 데이터를 이용하여 측정 오차에 대한 영향을 비교 분석하였다.

2. 이론적 배경

2.1 회전기계의 불평형 응답

제안된 방법은 불평형량과 측정량 사이의 운동역학적 원리를 적용하여 유도한 식이며, 아래와

* 부산대학교 기계설계공학과 대학원

** 정회원 부산대학교 기계공학부

같은 임의의 rotor system에서 두 개의 Node에서의 응답을 이용한 2자유도 회전체 동역학계의 운동방정식에서 시작한다.

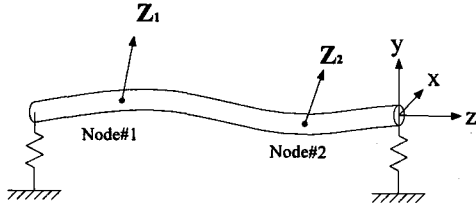


Fig1. Equation of Motion

$$M \ddot{z} + j\Omega B \dot{z} + C\dot{z} + K_s z = \Omega^2 u(t) + F_b \quad (1)$$

여기서

- M : 2×2 질량행렬(실수 대칭)
- B : 2×2 자이로행렬(실수 대칭)
- C : 2×2 감쇠행렬(실수 대칭)
- K_s : 2×2 강성행렬(실수 대칭)
- z : 두 Node점에서의 휘돌림 운동(complex)
- u : 두 Node점에서의 등가 불평형량(complex)
- F_b : rotor 자체의 shaft bow량에 의한 힘
(complex)

이다.

식(1)에 $z = Z e^{i\Omega t}$, $u = U e^{i\Omega t}$ 를 대입하여 정리하면 식(2)와 같이 된다.

$$(K_s - \Omega^2 M_0 + j\Omega C) Z = \Omega^2 U + F_b \quad (2)$$

여기서 $M_0 = M + B$ 이다.

로터에 시도중량(trial weight)를 달지 않은 상태("as is" 상태)에서 임의의 운전속도 Ω_i 에 대한 휘돌림 운동량을 $Z_i^{(0)}$ 라 할 때, 식(2)로부터 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(K_s - \Omega_i^2 M_0 + j\Omega_i C) Z_i^{(0)} = \Omega_i^2 U + F_b, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_0$$

로터에 시도중량 $T^{(k)}$ 를 단 상태에서 임의의 운전속도 Ω_l 에 대한 휘돌림 운동량을 $Z_l^{(k)}$ 라

할 때, 식(2)로부터 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(K_s - \Omega_i^2 M_0 + j\Omega_i C) Z_l^{(k)} = \Omega_i^2 (U + T^{(k)}) + F_b \quad (4)$$

$$, i = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, N_l$$

식(3)과 식(4)에서 $Z_i^{(0)}$, $Z_l^{(k)}$ 와 $T^{(k)}$ 는 다음과 같다.

$$Z_i^{(0)} = \begin{pmatrix} x_{1i}^{(0)} + jy_{1i}^{(0)} \\ x_{2i}^{(0)} + jy_{2i}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad Z_l^{(k)} = \begin{pmatrix} x_{1l}^{(k)} + jy_{1l}^{(k)} \\ x_{2l}^{(k)} + jy_{2l}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$T^{(k)} = \begin{pmatrix} T_{1x}^{(k)} + jT_{1y}^{(k)} \\ T_{2x}^{(k)} + jT_{2y}^{(k)} \end{pmatrix}$$

식(4)에서 식(3)를 빼고 정리하면 아래와 같다.

$$K_s (Z_l^{(k)} - Z_i^{(0)}) - M_0 (\Omega_i^2 Z_l^{(k)} - \Omega_i^2 Z_i^{(0)}) + C (j\Omega_l Z_l^{(k)} - j\Omega_i Z_i^{(0)}) - (\Omega_l^2 - \Omega_i^2) U = \Omega_i^2 T^{(k)} \quad (5)$$

$$, i = 1, 2, \dots, N_0,$$

$$l = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, N_l$$

2.2 양면 밸런싱 알고리즘

식(5)에서 시스템 매개변수, K_s , M_0 , C 및 불평형량 U 의 요소들을 다음과 같이 미지수 b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 로 놓는다.

$$K_s = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_4 & b_5 \\ b_5 & b_6 \end{bmatrix},$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} b_7 & b_8 \\ b_8 & b_9 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} b_{10} + jb_{11} \\ b_{12} + jb_{13} \end{bmatrix}$$

식(5)의 나머지 값들은 모두 측정에 의해서 얻어지므로 미지수와 기지수로 분류하여 정리하면 다음과 같다.

$$A_{ii}^{(k)} b = f_{ii}^{(k)} \quad (6)$$

$$, i = 1, 2, \dots, N_0,$$

$$l = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, N_l$$

식(6)에서 $A_{ii}^{(k)}$ 와 $f_{ii}^{(k)}$ 는 식(7)과 식(8)과 같다.

$$A_{ii}^{(k)} = \begin{bmatrix} A1 & A2 & 0 & A3 & A4 & 0 & A5 & A6 & 0 & A13 & 0 & 0 & 0 \\ A7 & A8 & 0 & A9 & A10 & 0 & A11 & A12 & 0 & 0 & A13 & 0 & 0 \\ 0 & A1 & A2 & 0 & A3 & A4 & 0 & A5 & A6 & 0 & 0 & A13 & 0 \\ 0 & A7 & A8 & 0 & A9 & A10 & 0 & A11 & A12 & 0 & 0 & 0 & A13 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A1 &= x_{1l}^{(k)} - x_{1l}^{(0)}, A2 = x_{2l}^{(k)} - x_{2l}^{(0)}, \\ A3 &= -\Omega_l y_{1l}^{(k)} + \Omega_l y_{1l}^{(0)}, A4 = -\Omega_l y_{2l}^{(k)} + \Omega_l y_{2l}^{(0)}, \\ A5 &= -\Omega_l^2 x_{1l}^{(k)} + \Omega_l^2 x_{1l}^{(0)}, A6 = -\Omega_l^2 x_{2l}^{(k)} + \Omega_l^2 x_{2l}^{(0)}, \\ A7 &= y_{1l}^{(k)} - y_{1l}^{(0)}, A8 = y_{2l}^{(k)} - y_{2l}^{(0)}, \\ A9 &= \Omega_l x_{1l}^{(k)} + \Omega_l x_{1l}^{(0)}, A10 = \Omega_l x_{2l}^{(k)} + \Omega_l x_{2l}^{(0)}, \\ A11 &= -\Omega_l^2 y_{1l}^{(k)} + \Omega_l^2 y_{1l}^{(0)}, A12 = -\Omega_l^2 y_{2l}^{(k)} + \Omega_l^2 y_{2l}^{(0)}, \\ A13 &= -\Omega_l^2 + \Omega_l^2 \end{aligned}$$

$$f_{ii}^{(k)} = (\Omega_l^2 T_{1x}^{(k)} \quad \Omega_l^2 T_{1y}^{(k)} \quad \Omega_l^2 T_{2x}^{(k)} \quad \Omega_l^2 T_{2y}^{(k)})^T \quad (8)$$

식(6)을 하나의 식으로 통합하면, 다음과 같다.

$$A_G b = f_G \quad (9)$$

여기서 A_G, f_G 는 각각 $A_{ii}^{(k)}, f_{ii}^{(k)}$ 을 index i, l, k 순서별로 통합한 값이다. 식(9)의 미지수의 개수는 13개이므로 방정식의 개수, $4N_0 N_1 N_l$ 가 적어도 13개 이상이 되도록 N_0, N_1, N_l 을 정해야 한다.

최소자승법에 의해 b 를 구하면

$$b = (A_G^T A_G)^{-1} A_G^T f_G \quad (10)$$

이 된다. 식(10)에서 K_s, M_0, C 및 불평형량 U 의 요소들이 구해졌으므로 식(3) 혹은 식(4)에 대입하면 남은 미지수 E_b 를 얻는다.

불평형량 및 shaft bow의 영향을 동시에 제거할 수 있는 보정량 U_c 의 값은 운전속도에 따라 다

르다. 운전속도 Ω_c 을 기준으로 한 U_c 은 다음과 같이 구한다.

$$\Omega_c^2 U + E_b + \Omega_c^2 U_c = 0 \quad (11)$$

$$U_c = - \left(U + \frac{1}{\Omega_c^2} E_b \right) \quad (12)$$

3. 실험에 의한 측정 오차 분석

3.1 실험장치 구성

제안한 방법의 측정오차에 대한 영향의 정도를 분석하기 위해 다음과 같은 순서로 실험하였다.

- ① 실험용 밸런싱 머신을 제작하였고, 그에 관련된 그림은 Fig2.~Fig4.에 나타내었다.
- ② 매개변수 규명을 위한 측정은 다음과 같이 하였다. (Table1.)
 - 시편에 시도중량을 달지 않은 상태에서 회전속도 500 rpm에서 두 지점의 축의 휘돌림 운동을 측정 (shaft bow)
 - 시편에 시도중량을 달지 않은 상태에서 3800, 4800, 5500 rpm에 대해 측정
 - 시편의 수정면 #1에 시도중량을 달고 3800, 4800, 5500 rpm에 대해 측정
 - 시편의 수정면 #2에 시도중량을 달고 3800, 4500, 5500 rpm에 대해 측정
- ③ 시편을 건 상태에서 회전체 동역학계의 1차 위험속도는 18000rpm이다.



Fig2. 실험대상물 사진

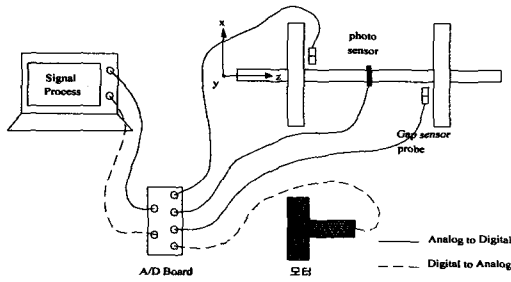


Fig3. 실험시 센서 구성도

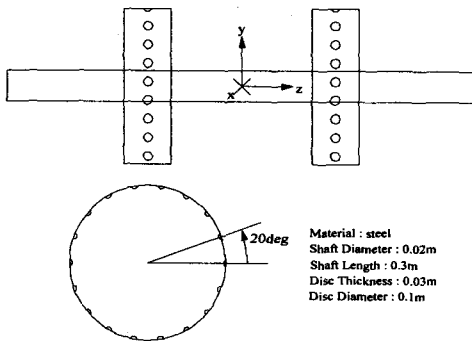


Fig4. 실험 모델

Table1. 측정데이터 산출 방법

OP.*	Q**	500	3800	4800	5500	trial weight	remarks
1	○	×	×	×	×	zero	$N_0=1$ eq.(3)
2	×	○	○	○	○	zero	$N_1=2$
3	×	○	○	○	○	non-zero	$N_t=3$
4	×	○	○	○	○	non-zero	eq.(4)

* : operations , ** : speed(rpm)

제안한 방법으로 매개변수를 규명하려면 Table1.에서 샘플링 스피드를 두 개씩 선택하였다.($N=2$)

3.2 복소수 응답값과 측정값과의 관계

식(1)의 휘돌림 응답을 $z = Ze^{i\omega t}$ 로 나타낼 때, 시간의 원점($t=0$)은 key phase 가 광센서를 막 통과할 때로 가정하였다. Z 의 실수부는 high spot 운동의 x 축 성분이고 허수부는 high spot의

y축 성분이다. Z 의 위상은 캡센서의 설치 위치 각에서 오실로스코프 상의 휘돌림 운동 파형에서 관찰된 위상각 θ 을 뺀 값이 된다.(Fig5.참조) 여기서 θ 는 광센서에서 검출된 timing mark에서 캡센서에서 검출된 운동의 negative peak까지의 위상각으로 정의된다.

보정량 U_c 의 위상은 key phase에 대한 위상각에 광센서의 설치위치각을 더한 값이 된다. 그러므로 key phase에 대한 불평형량의 위치각 α 는 식(12)에서 산출된 U_c 의 위상각에 광센서의 설치각을 뺀 값이 된다.

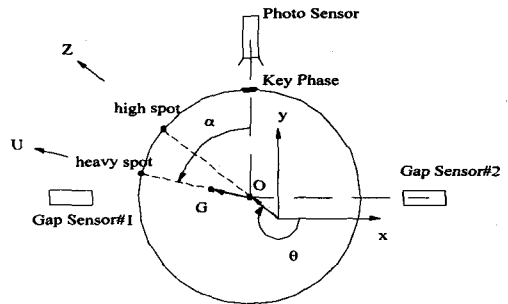
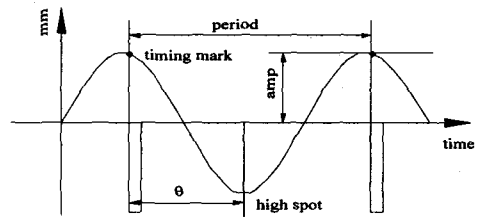


Fig5. 실험에서의 센서 위치 및 위상관계

3.3 보정량의 측정오차에 대한 영향 비교 분석

측정값에 대한 오차는 피할 수 없는데 기존의 영향계수법과 제안한 방법의 측정오차에 대한 영향의 정도를 비교하였다. 이를 위하여 동일 조건 하에 실험을 3회 반복하여 실시하였고 캡센서로 측정된 응답의 크기와 위상이 Table2.(부록 참조)와 같다.

기존의 영향계수법은 Table2.의 데이터에서 샘플링 속도 한 개에 대한 데이터 군(group)이 필요하고 제안한 방법을 이용할 경우에는 두 개의 샘플링

플링 속도에 대한 데이터 군이 필요하다. Table1. 을 근거로 데이터를 조합하여 각각의 밸런싱 기법에 적용한 수 얻어진 결과를 도시한 그림이 Fig6.(부록 참조)에 나타내었다. Fig6.의 결과를 평균한 보정량 U_c 및 key phase에 대한 불평형량의 위상각 α 를 Table3.에 나타내었다.

또한 Table3.에 값들을 이용해 실제 밸런싱 작업을 수행 한 후 그 때의 휘돌림 진폭을 Table4.에 나타내었다.

4. 결론

본 연구에서는 운동방정식에 근거한 양면 밸런싱 기술을 개발하였고 갠센서를 이용한 휘돌림 운동을 측정량으로 사용하였다. 이를 이용해 흠어짐 오차와 쏠림 오차등의 면에서 기존에 사용되고 있는 영향계수법보다 우월함을 입증하였다. 이는 제안한 방법은 측정 데이터에서 샘플링 속도에 대한 데이터 군을 한 개 이상을 매개변수 규명에 사용할 수 있기 때문에 그만큼 측정오차에 대한 영향을 줄일 수 있었던 것으로 사료된다

Table3. 불평형량 크기 및 위치

		plane #1		plane #2	
		$\frac{U_{1c}}{(g-m)/(\cdot)} \alpha (\cdot)$	$\alpha (\cdot)$	$\frac{U_{2c}}{(g-m)/(\cdot)} \alpha (\cdot)$	$\alpha (\cdot)$
Old Method	3800rpm	0.326 ∠ 222	132	0.388 ∠ 240	150
	4800rpm	0.168 ∠ 235	145	0.280 ∠ 158	168
	5500rpm	0.276 ∠ 293	203	0.423 ∠ 235	145
New Method	3800rpm ⁽¹⁾	0.419 ∠ 249	159	0.266 ∠ 240	150
	4800rpm ⁽²⁾	0.302 ∠ 252	162	0.170 ∠ 239	149
	5500rpm ⁽³⁾	0.251 ∠ 254	164	0.140 ∠ 248	158

⁽¹⁾ 3800rpm과 4800rpm의 데이터를 이용

⁽²⁾ 3800rpm과 4800rpm의 데이터를 이용

⁽³⁾ 4800rpm과 5500rpm의 데이터를 이용

Table4. Comparison of the magnitude of whirl motion before/after Balancing (Unit : μ m)

		3800rpm	4800rpm	5500rpm
Before Balancing	plane#1	34.2	40.4	46.4
	plane#2	31.2	36.0	41.8
Old Method	plane#1	10.8	3.3	30.1
	plane#2	10.9	2.2	29.8
New Method	plane#1	2.7	3.8	6.1
	plane#2	4.7	4.0	6.9

5. 참고 문헌

1. Thearle, E.L.,1934, "Dynamic Balancing of Rotating Machinery in the Field," Transactions of AS 746-753
2. 김영일, Rotor Dynamics의 현황과 문제점, 한국소음진동공학회 추계학술대회 논문집, 1997, 11-19.
3. R.E.D. Bishop and A. G. Parkinson, ON THE ISOLATION OF MODES IN THE BALANCING FLEXIBLE SHAFTS, Proc Instn Mech Engrs, Bol 177, No 16, 1963, 407-423.
4. W. H. Choi, B. S. Yang and H. J. Joo, Optimum Balancing of Rotating Machinery Using G Algorithm, Proceeding of the 6th International symposium on Transports Phenomena and Dynamics of Machinery, Vol. 1, 1996, 106-112
5. 임준용, "Shaft bow를 고려한 Jeffcott Rotor의 매개변수 규명에 관한 연구" 부산대학교 일반대학원 기계설계공학과 석사 학위 논문, 2000.2.
6. Erwin Kramer, "Dynamics of Rotors and Foundations"

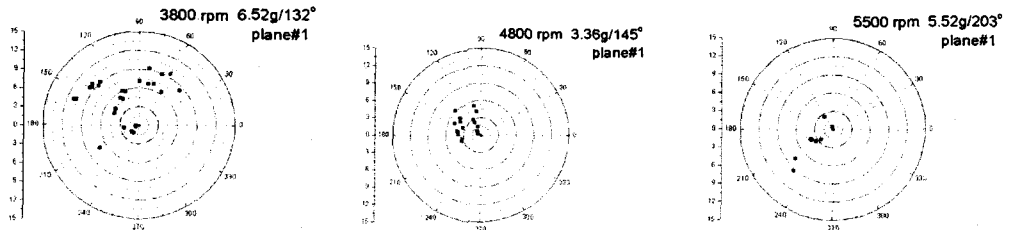
부록

Table2. Gap Sensor Response

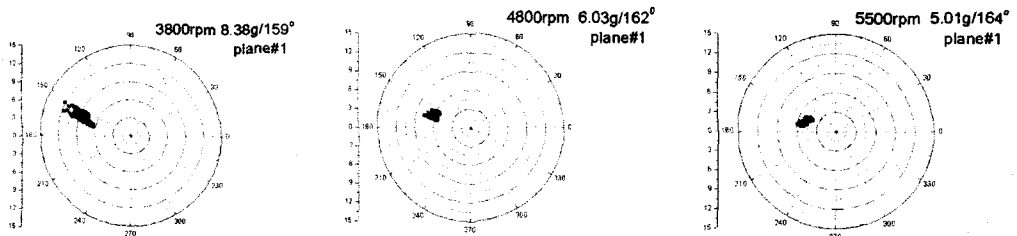
(Unit : rpm, μm)

		3800			4800			5500		
		p-p ⁽⁴⁾	θ	Z	p-p ⁽⁴⁾	θ	Z	p-p ⁽⁴⁾	θ	Z
operation #2 ⁽¹⁾	plane #1	69.6	275.6 °	34.8 \angle 264.4 °	79.8	262.6	39.9 \angle 277.4 °	94.2	247.2	47.1 \angle 292.8 °
		64.8	270.4 °	32.4 \angle 269.6 °	79.4	260.4	39.7 \angle 279.6 °	86.8	258.0	43.4 \angle 282.0 °
		70.8	273.5 °	35.4 \angle 266.5 °	83.2	264.9	41.6 \angle 275.1 °	97.2	254.8	48.6 \angle 285.2 °
	plane #2	61.8	98.4 °	30.9 \angle 261.6 °	72.6	88.7	36.3 \angle 271.3 °	90.4	73.8	45.2 \angle 286.2 °
		63.0	97.4 °	31.5 \angle 262.6 °	70.8	82.7	35.4 \angle 277.3 °	80.0	78.3	40.0 \angle 271.7 °
		62.4	96.0 °	31.2 \angle 264.0 °	72.4	86.1	36.2 \angle 273.9 °	80.2	79.6	40.1 \angle 280.4 °
operation #3 ⁽²⁾	plane #1	49.6	304.7 °	24.8 \angle 235.3 °	38.8	307.1	19.4 \angle 232.9 °	51.8	307.9	25.9 \angle 232.1 °
		52.2	300.6 °	26.1 \angle 239.4 °	49.6	306.0	24.8 \angle 234.0 °	51.2	293.5	25.6 \angle 246.5 °
		51.2	292.9 °	25.6 \angle 247.1 °	46.6	297.1	23.3 \angle 242.9 °	56.0	295.7	28.0 \angle 244.3 °
	plane #2	43.2	109.7 °	21.6 \angle 250.3 °	36.6	110.9	18.3 \angle 249.1 °	38.2	131.1	19.1 \angle 228.9 °
		43.0	108.6 °	21.5 \angle 241.4 °	42.0	145.0	21.0 \angle 215.0 °	39.8	125.8	19.9 \angle 234.2 °
		48.8	115.6 °	24.4 \angle 244.4 °	39.8	109.3	19.9 \angle 250.7 °	43.4	108.5	21.7 \angle 251.5 °
operation #4 ⁽³⁾	plane #1	95.8	261.5 °	47.9 \angle 278.5 °	138.0	257.4	69.0 \angle 282.6 °	153.2	248.4	76.6 \angle 291.6 °
		96.8	257.8 °	48.4 \angle 282.2 °	121.8	259.4	60.9 \angle 280.6 °	155.2	246.7	77.6 \angle 293.3 °
		95.0	262.9 °	47.5 \angle 277.1 °	127.2	255.8	63.6 \angle 284.2 °	153.2	247.4	76.6 \angle 292.6 °
	plane #2	92.6	88.0 °	46.3 \angle 272.0 °	124.0	79.5	62.0 \angle 280.5 °	144.2	76.2	72.1 \angle 287.9 °
		91.4	84.5 °	45.7 \angle 275.5 °	115.8	80.0	57.9 \angle 280.0 °	141.6	66.8	70.8 \angle 293.2 °
		93.2	82.6 °	46.6 \angle 277.4 °	115.0	78.1	57.5 \angle 281.9 °	146.2	73.1	73.2 \angle 286.9 °

- (1) : "as is" 상태로 부가질량을 달지 않은 상태의 응답
- (2) : "trial weight1"의 경우로 1단면에 5.2g/0° 만큼의 부가 질량을 단 상태의 응답
- (3) : "trial weight2"의 경우로 2단면에 5.2g/180° 만큼의 부가 질량을 단 상태의 응답
- (4) : 오실로스코프상에서 검출된 peak-to-peak값(변위로 변환)



(a)



(b)

Fig6. 불평형량 위치 분포도 (a)영향계수법, (b)제한한 방법