

# Model Based Compensator를 이용한 다변수 제어 분석

정지현\* · 이우민\* · 유삼현\*\* · 이종원\*\*\*

## Analysis of Multi-Variable Control using Model Based Compensator

Ji-Hyeon Jung, Woo-Min Lee, Sam-Hyeon Yoo and Chong-Won Lee

**Key Words:** MBC(모델기준보상기), Target Filter Loop(목표 필터 루프), Kalman Filter(Kalman 필터), Frequency Domain Equality(주파수 영역 평형), LQR(선형 2차 조정기), Riccati Equation(Riccati 방정식), Cost Function(비용함수), Singular Value(특이값)

### Abstract

Model Based Compensator(MBC) is recently used for the analysis of multi-variable control in frequency domain. Target loop is designed by the demanding requirements such as cross-over frequency, disturbance rejection in low frequency domain, zero steady-state error, identification of maximum and minimum singular values and sensor noise rejection in high frequency domain. Loop transfer recovery will be continued in frequency domain until the plant with MBC comes close to the target loop. In this study, the technique using MBC is applied to the elevator vibration control system. It is found that this technique is very effective to control the vibration system.

### 1. 서론

산업이 발달하고 시스템이 점차 복잡해짐에 따라 단일 입력-출력(SISO)시스템보다는 2개 이상의 입력-출력(MIMO)시스템에 대한 연구가 많이 실시되고 있으며, 보편화된 이론이 참고문헌에 수록되어 있다.<sup>(1,2)</sup> Model Based Compensator(MBC)를 이용한 제어장치 설계는 까다롭지 않은 가정 아래에서 SISO 시스템 뿐만 아니라 MIMO 시스템에 대한 설계 요구 조건을 만족시킨다는 장점이 있다. 본 연구는 MBC설계 기법을 근거로 설계 요구 조건 - 교차 주파수(Cross-over frequency), 정상상태 오차(steady-state error)의 제거, 교란 및

잡음의 제거등 - 을 만족시키는 목표 필터 루프(Target Filter Loop; TFL)  $G_T$ 를 설계한 후 주파수 영역에서 제어 장치를 적용한 루프 전달 회복(Loop Transfer Recovery; LTR)을 목표 필터 루프의 특이값과 일치시키는 방법으로 진행된다. 목표 필터 루프는 Kalman Filter Loop로 설계되며 과정중 Filter Algebraic Riccati Equation(FARE)을 적용하여 필터 게인 행렬  $H$ 를 구할 수 있다. 해석을 지원하는 소프트웨어는 PC-Matlab이 사용되며<sup>(3)</sup>, 이는 FARE에 의한 필터 게인 행렬 및 선형 2차 조정기(Linear Quadratic Regulator)의 해석을 통한 제어 게인 행렬  $K$ 의 계산을 위해 "LQE"와 "LQR"등의 명령어가 사용된다.<sup>(4)</sup> 그리고 설계 요구 조건을 만족하는 제어 장치를 엘리베이터 정지시 발생하는 진동제어 시스템에 적용하여 시간영역에서의 입력과 출력에 대한 과도응답(transient response)을 분석하고, 기본 시스템의 결과와 비교한다.

\* 중앙대학교 대학원  
 \*\* 육군사관학교 무기공학과  
 \*\*\* 중앙대학교 기계공학부

## 2. 다변수 제어 분석

제어장치를 적용한 피드백 시스템은 일반적으로 Fig. 1과 같이 표현되며, 입력과 출력의 관계는 식(1)과 같다.

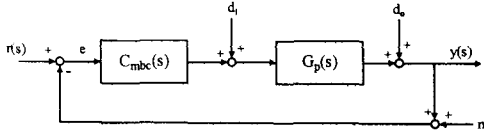


Fig. 1 Feedback system with controller

$$y = \frac{G_p C_{mbc}}{1 + G_p C_{mbc}} r + \frac{1}{1 + G_p C_{mbc}} (G_p d_i + d_o) - \frac{G_p C_{mbc}}{1 + G_p C_{mbc}} n \quad (1)$$

여기서  $G_p$ ,  $C_{mbc}$ ,  $d_i$ ,  $d_o$ ,  $n$ 은 각각 시스템의 전달함수, 제어장치, 시스템 입구와 출구에서의 교란, 그리고 잡음을 나타내고 있다. 이상적인 시스템의 표현은 입력에 따른 정확하고 빠른 출력을 나타내야 하고, 교란 및 잡음의 제거를 위해 제어장치를 적용할 경우 아래와 같은 결과를 나타내야 한다.

$$\frac{G_p C_{mbc}}{1 + G_p C_{mbc}} \approx 1 ; \text{정확한 출력} \quad (2)$$

$$\frac{G_p C_{mbc}}{1 + G_p C_{mbc}} \approx 0 ; \text{센서 잡음 제거} \quad (3)$$

$$\frac{1}{1 + G_p C_{mbc}} \approx 0 ; \text{교란 제거} \quad (4)$$

### 2.1 목표 필터 루프 설계

시스템의 상태방정식을 표현하면 식(5)가 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (5)$$

만일 입력으로 임의의 상수가 적용되었다면, 정상상태 오차를 0으로 하기 위해서는 Fig. 2와

같이 적분기(integrator)가 필요하다.

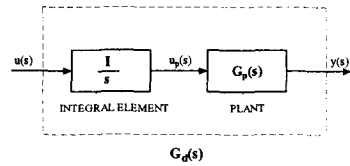


Fig. 2 System with free integrator

이 경우 새로운 시스템을 이용하여 제어장치를 설계하면 식(6)으로 표현되며,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  그리고  $x$ 는 각각 식(7)로 나타내어진다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_p]$$

$$x = [u_p \quad x_p]^T \quad (7)$$

Kalman Filter를 적용하여 목표 필터 루프를 설계할 경우 식(8)과 같이 표현되며, 블록선도를 Fig. 3에서 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} G_{KF}(s) &= C\Phi(s)H = G_T(s) \\ \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

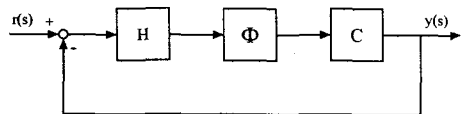


Fig. 3 Structure of Target Filter Loop

$H$ 는 필터 게인 행렬로서 식(9)로 설계할 수 있다.

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C^T \quad (9)$$

여기서  $\mu$ 는 설계상수,  $\Sigma$ 는 식(10)의 FARE로부터 구할 수 있다.

$$A\Sigma + \Sigma A^T + LL^T - \frac{1}{\mu} \Sigma CC^T\Sigma = 0 \quad (10)$$

또한 주파수 영역 평형(Frequency Domain Equality; FDE)식으로부터 설계행렬,  $L$ 을 구할 수 있으며 FDE는 식(11)과 같이 표현된다.

$$\sigma_i[I + G_{KF}(j\omega)] = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} \sigma_i^2[C_p(j\omega I - A_p)^{-1}L]} \quad (11)$$

여기서  $\sigma_i$ 는 주파수 영역에서의 특이값을 나타낸다.

먼저 저 주파수 영역에서 식(12)가 성립하므로 식(11)은 식(13)으로 전환될 수 있다.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (j\omega I - A_p)^{-1} \cong -A_p^{-1} \quad (12)$$

$$\sigma_i[G_{KF}(0)] \cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i(-C_p A_p^{-1} L_{low}) \quad (13)$$

그러므로 저 주파수 영역에서 최대 및 최소 특이값이 일치하기 위해서는 식(14)를 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} -C_p A_p^{-1} L_{low} &= I \\ L_{low} &= -C_p (C_p A_p^{-1} C_p^T)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

또한 고 주파수 영역에서 식(15)와 같이 표현되므로 식(11)로부터 식(16)을 얻을 수 있다.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (j\omega I - A_p)^{-1} \cong \frac{1}{j\omega} \quad (15)$$

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \cong \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} \sigma_i[C_p L_{high}] \quad (16)$$

여기서 최대 및 최소 특이값이 일치하기 위해서는 식(17)을 만족해야 한다.

$$L_{high} = C_p (C_p C_p^T)^{-1} \quad (17)$$

식(10)을 만족하는 설계행렬  $L$ 은 식(18)과 같다.

$$L = [L_{high} \quad L_{low}]^T \quad (18)$$

식(9)와 식(10)으로부터 필터 게인 행렬  $H$ 를 구할 수 있으며, PC-Matlab 명령어 "LQE"를 이용하여 구할 수도 있다.

## 2.2 제어장치의 설계

제어장치를 설계하는 근본적인 목적은 설계된 제어장치를 시스템에 적용하였을 경우 입력에 대한 희망하는 출력을 얻는 것이다.

MBC 기술을 적용한 시스템의 블록선도를 Fig. 4에서 보여주고 있으며, 제어 장치와 입력에 대한 표현은 식(19)와 같다.

$$\begin{aligned} u(s) &= C_{mbc}(s) e(s) \\ C_{mbc}(s) &= K(sI - A + BK + HC)^{-1} H \\ \Phi &= (sI - A)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

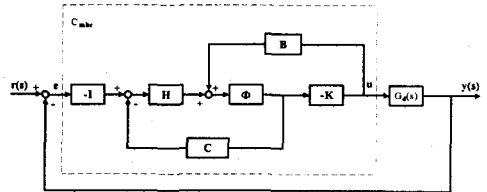


Fig. 4 Block diagram of feedback system with a compensator

여기서 필터 게인 행렬  $H$ 와 제어 게인 행렬  $K$ 를 설계하는 것이 궁극적인 목표인데, 필터 게인 행렬은 Kalman Filter를 이용하여 이미 설계되었으므로 여기서는 제어 게인 행렬에 대해서 알아본다.

제어 게인 행렬은 비용함수(cost function:  $J$ )의 최소화로부터 유도할 수 있으며 식(20)과 같이 표현된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Q x + u R u] dt \quad (20)$$

여기서  $Q = C^T C = Q^T \geq 0$ 이며  $R$ 은 임의의 상수 행렬이다. 식(20)에 대한 해는 선형 2차 조정기(LQR)의 최적제어(cheap control:  $\rho \rightarrow 0$ )로부터 식(21)과 같이 구할 수 있으며 행렬  $S$ 는 식(22)의 Control Algebraic Riccati Equation (CARE)으로 구할 수 있다.

$$K = \frac{1}{\rho} B^T S \quad (21)$$

$$0 = -SA - A^T S - C^T C + \frac{1}{\rho} S B B^T S \quad (22)$$

PC-Matlab 명령어 "LQR"로 제어 게인 행렬  $K$ 를 구할 수 있다.

식(19)의  $C_{mbc}(s)$ 를 적용할 경우 상태함수는 식(23)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_k z + B_k e \\ u &= C_k \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $A_k$ ,  $B_k$  그리고  $C_k$ 는 식(24)와 같다.

$$\begin{aligned} A_k &= A - BK - HC, \quad B_k = -H, \\ C_k &= -K \end{aligned} \quad (24)$$

### 3. 진동 제어 장치 설계

고속 엘리베이터에 있어서 안락한 승차감과 신속한 이동은 필수적이다. 주로 로프의 탄성에 의해 생기는 수직 진동은 엘리베이터가 정지하는 순간에도 남아 있다. 본 연구에서는 층간 이동시간을 줄이기 위해서 엘리베이터 정지시 남아있는 잔류진동을 억제시키고자 한다. 시스템의 선형적인 요소만을 고려하여 Fig. 5와 같은 엘리베이터 모델을 사용한다.

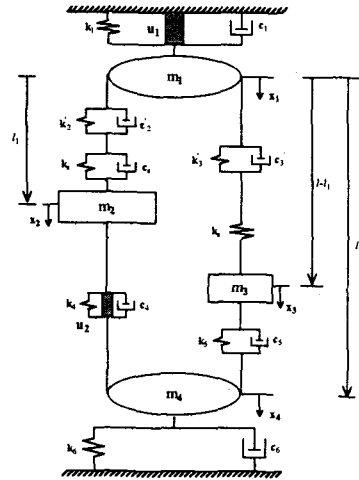


Fig. 5 Model of elevator

Fig. 5에서  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$ 는 각각의 권상기, 카, 균형무게, 보상로우프 풀리의 질량에로우프 질량을 보상하여 나타낸 값이며,  $k$ 와  $c$ 는 로우프의 강성과 감쇠를 나타낸다. 본 연구에 적용된 시스템 사양은 Table 1과 같이 설정하였다.<sup>(5)</sup> 그리고 뉴턴의 2법칙을 Fig. 5에 적용할 경우 운동방정식은 식(25)와 같이 표현된다.

Table 1. System parameters of elevator

System parameters	Unit	Data
Traction Machine	kg	6,500
Car	kg	4,650
Counter Balance	kg	5,310
Compensation Rope Pulley	kg	1,058
Young's Modulus of Rope	N/m <sup>2</sup>	8.5e10
Range of Rope Length	m	100
Traction Machine Rubber	N/m	3.14e7
Timble Rod Spring	N/m	3.53e6
Compensation Pulley Spring	N/m	9.8e4
Area of Rope	m <sup>2</sup>	7.49e-4

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 \\ + (k_1 + k_2 + k_3) x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 = u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_4) \dot{x}_2 - c_4 \dot{x}_4 \\
& - k_2 x_1 + (k_2 + k_4) x_2 - k_4 x_4 = -u_2 \\
& m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_1 + (c_3 + c_5) \dot{x}_3 - c_5 \dot{x}_4 \\
& - k_3 x_1 + (k_3 + k_5) x_3 - k_5 x_4 = 0 \\
& m_4 \ddot{x}_4 - c_4 \dot{x}_2 - c_5 \dot{x}_3 + (c_4 + c_5 + c_6) \dot{x}_4 \\
& - k_4 x_2 - k_5 x_3 + (k_4 + k_5 + k_6) x_4 = u_2 \quad (25)
\end{aligned}$$

### 3.1 시스템 해석

시스템을 식(5)와 같이 상태 방정식으로 표현할 경우 입력벡터  $u_p$ 와 출력벡터  $y_p$ 는 각각 식(26)과 식(27)로 나타낸다.

$$u_p = [u_1 \ u_2]^T \quad (26)$$

$$y_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 제어입력의  $u_1$ 은 권상기,  $u_2$ 는 카와 보상플리 사이에 제어가 위치하고 있으며, 출력으로  $x_1$ 은 권상기의 변위,  $x_2$ 는 카의 변위를 나타낸다.

### 3.2 목표 필터 루프 설계

목표 필터 루프는 설계 요구 조건을 만족하는 Kalman Filter로 설계되며, 설계 요구 조건은 다음과 같다. 임의의 상수 입력에 대한 정상오차는 0이며, 교차주파수는 약 10rad/s, 저 주파수 영역과 고 주파수 영역에서의 최대 및 최소 특이값이 거의 일치하고, 저 주파수 영역에서의 교란 제거 효과는 0.02 rad/s이내에서 4%이내이며, 고주파수 영역에서의 센서 잡음 제거 효과는 800 rad/s이상에서 7% 이내이어야 한다. 이러한 설계 요구조건을 만족하는 목표 필터 루프를 설계하기 위해서 식(9)에서 얻은 필터 게인 행렬  $H$ 는 식(28)과 같다.

$$H = [H_1 \ H_2]^T \times 10^8 \quad (28)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 3.3720 & 0.1049 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1867 & -0.1066 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.0 & 0 & 0 & 0 & -0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.3 제어장치의 설계

본 연구의 설계 목적은 루프 전달함수가 목표 필터 루프에 접근하도록 제어 장치를 설계하는 것이다.

설계상수  $\rho$ 를  $10^{-15}$ 으로 선정하고 식(21)과 식(22)로부터 제어 게인 행렬  $K$ 를 구하면 식(29)와 같이 나타난다.

$$K = [K_1 \ K_2] \times 10^5 \quad (29)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.0 & -4.812 & -2.17 & 2.808 \\ -0.0 & 0.0 & -16.492 & 70.209 & -75.521 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.06 & 0.43 & -0.15 & 0.05 \\ -5.48 & -0.97 & -14.50 & -4.01 & -1.60 \end{bmatrix}$$

Fig. 6은 목표 필터 루프와 루트 전달 함수의 특성을 주파수 영역에서 나타낸 그림이다.

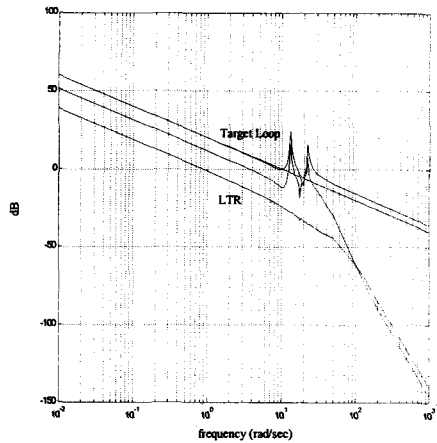


Fig. 6 Singular values of target loop vs. loop transfer function

### 3.4 적용 및 시뮬레이션

제어장치를 적용하지 않은 시스템의 진동을 분석하기 위해  $x_1$ ,  $x_2$ 의 초기 위치를 각각 0.2m,

0.1m로 설정하고 가진 시켰을 경우의 자유진동을 Fig. 7에서 보여주고 있다.  $x_1$ 은 미세한 잔류진동만 남아있으나,  $x_2$ 의 경우는 5초가 경과한 후에도 진동이 억제되지 않고 있음을 보여주고 있다.

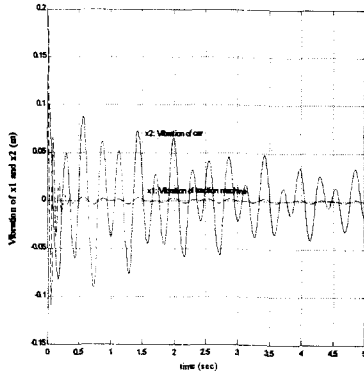


Fig. 7 Free vibration of elevator system

설계된 제어장치를 시스템에 적용하여 동일한 초기위치에서의  $x_1$ 과  $x_2$ 의 진동을 Fig. 8에서 나타내고 있다.

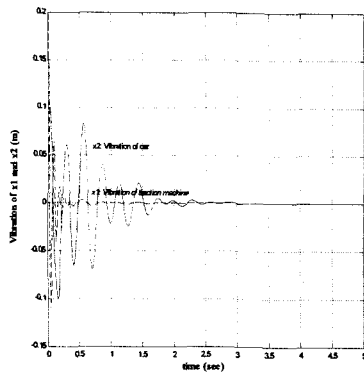


Fig. 8 Vibration by applying MBC control

Fig. 8에서 진동이 발생한 후 3초가 경과되면  $x_2$ 의 잔류진동은 완전히 억제되어 시스템이 안정화됨을 보여주고 있다. 또한 엘리베이터 시스템의 진동 잔류시간과 진동 폭이 감소함에 따라 층간 이동시간을 줄일 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

제어장치를 설계하는 궁극적인 목적은 설계된 제어장치를 시스템에 적용하였을 경우 설계 요구 조건을 만족하는 범위내에서 기준입력에 대한 출력을 얻는데 있다. MBC 제어 기법을 이용한 주파수 영역에서의 다변수 제어장치는 루프 전달 함수의 특성을 분석하여 교차 주파수의 설계, 교란 및 센서 잡음 제거, 임의의 상수 입력에 대한 0-정상상태 오차 등의 설계 요구 조건을 만족하는 제어장치를 설계 할수 있다는 장점을 보여주고 있다. 또한 MBC 기술을 적용한 엘리베이터 시스템은 시간 영역에서의 시뮬레이션을 통해 출력의 안정성과 정확성 그리고 빠른 반응을 제공하고 있음을 알수 있다. 그러나 실제 모델의 비선형 요소를 고려할 경우 제어장치의 복잡성이 증대되어 적합하지 않으며, 높은 차수의 형태로 표현이 되기 때문에 원하는 결과와 비용을 고려하여 안정성과 정확성을 보장하는 범위내에서 차수를 감소시키는 연구가 병행되어야 한다.

#### 참고 문헌

- (1) K. Ogata, 1997, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall International, Inc.
- (2) Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, 1998, "Modern Control Systems", Addison-Wesley.
- (3) Delores M. Etter, 1997, "Engineering Problem Solving with MATLAB", Prentice-Hall International, Inc.
- (4) 유삼현, 이종원, 1998, "주파수 영역에서 다변수 제어 분석", 중앙대학교, 생산공학연구소, 제7권 제1호 pp.81~96.
- (5) 허정완, 1998, "시변특성을 가진 기어시스템과 엘리베이터 시스템의 진동특성해석", 부산대학교 대학원 석사 학위논문.