

## 직교 이방성 특이 유한요소의 구성과 그 응용

이완근\* · 임장근\*\*

### Formulation Method of a Singular Finite Element for Orthotropic Materials and its Application

WanKeun Lee and JangKeun Lim

**Key Words :** 혼합형 유한 요소법(hybrid finite element method), 트래프츠 함수(Treffitz function), 해석해(analytical solution), 적합성(compatibility), 분포외력(traction), 특이 유한요소(singular finite element), 불연속부(discontinuous part), 직교이방성(orthotropic)

#### Abstract

In order to analyze effectively the discontinuous parts such as holes or notches included in mechanical structures by the finite element method, a singular finite element for orthotropic materials is proposed. This singular element is formulated by the Trefftz method and the hybrid variational principles, which the displacements and stresses are simultaneously assumed using the Trefftz functions. Through several numerical tests, it is shown that the proposed singular element is very efficient for the accurate stress analysis of the various types of discontinuous parts.

#### 1. 서론

기계구조물에는 여러 가지 형태의 구멍이나 노치(notch)와 같은 불연속부가 존재한다. 이들 불연속부(discontinuous part)는 구조물의 강성을 저하시키고 응력집중(stress concentration)을 초래하여 구조물의 성능과 수명에 지대한 영향을 미친다. 따라서 이들 불연속부를 정확하게 해석하여 이들 부위의 변형과 응력집중 특성을 규명하는 것은 기계구조물의 효과적인 설계를 위하여 매우 중요하다.

유한요소법으로 구조물의 불연속부를 효과적으로 해석하기 위하여 오늘날 여러 가지 방법이 사용되고 있으며 이들 방법은 크게 두 가지로 분류된다. 첫 번째 방법은 일반 유한요소로써 불연속부를 아주 세분하여 요소의 크기에 따른 분할 오차를 최소로 하거나 고차요소(higher order element)를 사용함으로써 정확도를 향상시키는 방법이다. 이 방법은 최근 유한요소해석의 적응해석 기법(adaptive analysis)과 함께 연구되어 널리 사용되고

있다. 두 번째 방법은 전문 유한요소(special purpose finite element)를 사용하는 것이다. 이 전문 유한요소는 불연속부만을 효과적으로 해석하기 위하여 그 형상과 특성에 맞추어 구성되기 때문에 불연속부의 종류에 따라서 균열요소, 구멍요소, 노치요소 등 여러 가지가 있다. 특히 이들 불연속부는 특이성(singularity)을 가지고 있기 때문에 이를 위한 전문 유한요소를 특이 유한요소(singular finite element)라고도 부른다.

특이 유한요소는 요소의 형상과 절점의 개수에 제한을 받지 않는 트래프츠(Treffitz) 유한요소법<sup>(1)</sup>이 제안되면서 활발하게 연구되기 시작하여 많은 연구결과가 보고 되고 있다. 특히 등방성 재료(isotropic material)에 대해서는 최근 여러 가지 형태의 불연속부를 동시에 해석하여 매우 정확한 결과를 얻을 수 있는 연구결과가 보고되었다.<sup>(2)</sup> 복합재료와 같은 이방성재료(anisotropic material)에 대해서는 타원 구멍이 있는 무한평판 문제<sup>(3)</sup>와 대형 원공을 갖는 유한 직교 이방성 복합재판 문제<sup>(4)</sup>, 직교 이방성의 균열판 문제<sup>(3,5)</sup> 등이 연구되었다. 그러나 이들 특이 유한요소는 트래프츠 함수의 선정방법과 항수 그리고 적분 차수 등에 따라서 해

\* 한양대학교 대학원

\*\* 한양대학교 기계공학부

가 불안정해지기 때문에 해석결과의 신뢰성에 문제가 있다.

본 논문에서는 트래프즈 함수의 일관된 선정과 복합 변분법을 수정하여 해의 안정성을 향상시키고 사상함수를 도입함으로써 직교이방성의 복합재판에서 여러 가지 형상의 불연속부를 일괄적으로 해석할 수 있는 특이유한요소를 구성하고자 한다. 또한 직교 이방성판에서 여러 가지 형상의 특이성 문제를 해석하고 그 결과를 검토함으로써 제안한 특이유한요소의 유효성을 보이고자 한다.

## 2. 유한 요소 방정식

### 2.1 특성방정식

2 차원 평면문제에서 직교이방성 재료의 응력함수  $F(x, y)$ 는 다음 미분 방정식으로 표현된다.<sup>(6)</sup>

$$S_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2S_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2S_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + S_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서  $S_{ij}$  는 재료의 컴플라이언스 (compliance) 계수이고 이 식은 4 개의 선형 미분 연산자로서 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \quad (2)$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_j \frac{\partial}{\partial x} \quad (3)$$

식 (3)의  $\mu_j$  ( $j=1,4$ )는 다음 특성방정식의 해로써 직교 이방성 재료의  $x, y$  축 방향의 물성치의 비로써 표현된다.<sup>(3)</sup>

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0 \quad (4)$$

재료가 직교 이방성이면  $S_{16} = S_{26} = 0$  가 되어 식 (4)는 다음 식으로 줄어진다.

$$\mu^4 + \left( \frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) \mu^2 + \frac{E_{11}}{E_{22}} = 0 \quad (5)$$

식 (5)에서  $E_{11}, E_{22}$  는 주방향(principal direction)  $x, y$  의 탄성계수이고,  $G_{12}, \nu_{12}$  는  $x, y$  방향의 전단계수와 포아송비를 의미한다. 식 (5)의 특성 방정식은 허근만을 가지며 허수부의 부호가 서로 다

른 두 쌍의 공액근(conjugate root) 중에서 정의 허수부(positive imaginary part)를 가지는 두 개의 근을 택하여  $\mu_1, \mu_2$  로 한다.

### 2.2 사상함수

실제의 복소평면(complex plane)  $z$  에 존재하는 타원 구멍을 Fig. 1 과 같이 사상평면  $\zeta$  에 단위원으로 사상시키기 위하여 다음과 같은 등각 사상함수  $\omega$  를 도입한다.

$$\omega_j(\zeta) = z_j = \frac{(a - i\mu_j b)\zeta}{2} + \frac{(a + i\mu_j b)\zeta^{-1}}{2} \quad (6)$$

식 (6)에서  $a, b$  는  $z$  평면 상에 존재하는 타원의 장축과 단축의 반지름을 의미하고  $z_j$  는 다음과 같이 표현되는 실평면의 복소수 변수이다.

$$z_j = \gamma_j z + \delta_j \bar{z} \quad (j=1,2) \quad (7)$$

$$\text{where, } \gamma_j = (1 - i\mu_j)/2 \\ \delta_j = (1 + i\mu_j)/2$$

한편, 식 (6)을 역변환시키면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\zeta_j = \frac{z_j \pm \sqrt{(z_j)^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}}{(a - i\mu_j b)} \quad (8)$$

식 (8)의 두 개의 근 중에서 절대값이 1 보다 큰 값을 택하여야 한다.

### 2.3 일반해

단위원의 구멍을 갖는 2 차원 평면문제의 일반해를  $\zeta$  평면 상의 복소수 포텐셜 함수  $\phi, \psi$  를 도입하여 응력과 변위를 구하면 다음과 같다.<sup>(4)</sup>

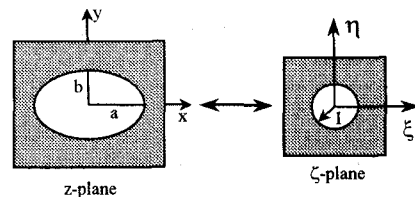


Fig. 1 Conformal mapping

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_x \end{Bmatrix} = 2 \operatorname{Re} \left\{ -\mu_1 \frac{\phi'(\zeta_1) + \psi'(\zeta_2)}{\omega'_1(\zeta_1) + \omega'_2(\zeta_2)} - \mu_2 \frac{\phi'(\zeta_1) - \psi'(\zeta_2)}{\omega'_1(\zeta_1) - \omega'_2(\zeta_2)} \right\} \quad (9)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \begin{matrix} p_1 \phi(\zeta_1) + p_2 \psi(\zeta_2) \\ q_1 \phi(\zeta_1) + q_2 \psi(\zeta_2) \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

식 (10)에서 적분상수 항은 강제운동을 나타내기 때문에 생략하였고 상수  $p_j, q_j$  ( $j=1,2$ )는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} p_1 &= S_{11}\mu_1^2 + S_{12} - S_{16}\mu_1 \\ p_2 &= S_{11}\mu_2^2 + S_{12} - S_{16}\mu_2 \\ q_1 &= S_{12}\mu_1 + \frac{S_{22}}{\mu_1} - S_{26} \\ q_2 &= S_{12}\mu_2 + \frac{S_{22}}{\mu_2} - S_{26} \end{aligned} \quad (11)$$

### 3. 특이 유한요소

#### 3.1 포텐셜 함수

2 차원의  $\zeta$  평면 상에서 포텐셜 함수  $\phi$  와  $\psi$  는 다음과 같이 가정한다.<sup>(4)</sup>

$$\phi(\zeta_1) = \sum_{k=-m}^m a_k \zeta_1^k \quad (k \neq 0) \quad (12)$$

$$\psi(\zeta_2) = \sum_{k=-m}^m \overline{a_k} B \zeta_2^{-k} + a_k C \zeta_2^k \quad (k \neq 0) \quad (13)$$

식 (12), (13)에서  $k=0$  일 때는 강제운동을 나타내기 때문에 생략하였고 식 (12), (13)에서  $a_k = b_k + ic_k$  이다. 특이 유한요소 내의 수치 계산 과정에 있어서  $x$  축에 대한 대칭성은 식 (12), (13)에서 오직  $a_k$  의 실수부만을 사용한다는 것을 암시하고, 식 (13)의 계수  $B, C$  는 다음과 같이 표현된다.

$$B = \frac{\overline{\mu_2 - \mu_1}}{\mu_2 - \mu_2}, \quad C = \frac{\overline{\mu_2 - \mu_1}}{\mu_2 - \mu_2} \quad (14)$$

단위원의 구멍을 갖는 특이 유한요소의 변위와 응력에 포텐셜 함수를 도입하여 행렬로 나타내면

다음과 같다.

즉, 식 (9), (10)에 식 (12), (13)을 대입하고 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\{u\} = [U]\{\beta\}, \quad \{\sigma\} = [S]\{\beta\} \quad (15)$$

식 (15)에서  $[U], [S]$  는 부록과 같이 표현되고,  $\{\beta\}$  는 다음과 같다.

$$\{\beta\}^T = \{b_{-m}, c_{-m}, \dots, b_m, c_m\} \quad (16)$$

#### 3.2 요소방정식

특이 유한요소 영역 내에서 전체포텐셜에너지를 혼합형으로 표현하고<sup>(3)</sup> 적분정리로서 경계적분으로 변환하면 다음과 같은 범함수(functional)을 얻는다.

$$\pi = \int_{\Gamma} \{t\}^T \left( \{\bar{u}\} - \frac{1}{2} \{u\} \right) ds - \int_{\Gamma_i} \{\bar{t}\}^T \{\bar{u}\} ds \quad (17)$$

식 (17)에서  $\Gamma$  는 특이유한요소의 경계를 의미하지만 실제로는 트랙션 벡터  $\{t\}$  와 변위 벡터  $\{u\}$  가 동시에 존재하는 일반 유한요소와 연결되는 경계를 의미한다.  $\Gamma_i$  는 특이요소의 경계 중에서 분포하중 벡터  $\{\bar{t}\}$  가 작용하는 경계를 의미한다.

일반유한요소와 접하는 경계에서 변위 벡터  $\{\bar{u}\}$  는 일반 유한요소의 절점 변위 벡터  $\{q\}$  와 다음과 같이 보간 된다.

$$\{\bar{u}\} = [N]\{q\} \quad (18)$$

한편, 트랙션 벡터  $\{t\}$  는 경계에서 외향 수직 방향 여현벡터  $[n]$  과 응력 벡터  $\{\sigma\}$  로 다음과 같이 표현된다.

$$\{t\} = [n]\{\sigma\} = [n][S]\{\beta\} = [R]\{\beta\} \quad (19)$$

식 (15), (18), (19)를 식 (17)에 대입하여 정리하면,

$$\pi = -\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H]\{\beta\} + \{\beta\}^T [G]\{q\} - \{\beta\}^T \{F\} \quad (20)$$

$$[H] = \int_{\Gamma} [R]^T [U] ds \quad (21)$$

$$[G] = \int_{\Gamma} [R]^T [N] ds \quad (22)$$

$$\{F\} = \int_{\Gamma} [U]^T \{t\} ds \quad (23)$$

로 표현된다.

식 (20)에서 미계수 벡터  $\{\beta\}$ 에 대하여 1 차 변분을 취하여 정유조건(stationary condition)을 잡으면 절점변위  $\{q\}$ 와 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\{\beta\} = [H]^{-1} ([G]\{q\} - \{F\}) \quad (24)$$

식 (24)를 식 (20)에 대입하여 정리하면 범함수  $\pi$ 는 절점변위벡터  $\{q\}$ 만의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \{q\}^T [G]^T [H]^{-1} [G] \{q\} \\ & - \{q\}^T [G]^T [H]^{-1} \{F\} \\ & + \frac{1}{2} \{F\}^T [H]^{-1} \{F\} \end{aligned} \quad (25)$$

이제, 식 (25)를  $\{q\}$ 에 대하여 변분하고 정유조건을 취하면 다음과 같은 특이 유한요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$[k_s] \{q\} = \{f_s\} \quad (26)$$

$$[k_s] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (27)$$

$$\{f_s\} = [G]^T [H]^{-1} \{F\} \quad (28)$$

식 (27)의  $[k_s]$ 는 특이 유한요소의 강성행렬이고 식 (28)의  $\{f_s\}$ 는 특이 유한요소 경계에 작용하는 분포하중의 등가절점하중벡터가 된다.

#### 4. 수치 해석 및 검토

제안한 특이 유한요소의 정확도와 수렴 특성을 규명하기 위하여 Table 1 과 같은 직교 이방성 재료로 구성된 몇 가지 특이성 문제를 해석하고 그 결과를 검토하고자 한다.

Table 1 Elastic properties of Orthotropic materials.

	(unit : GPa)		
	Yellow-poplar (Ye-Po)	Glass-Epoxy (Gl-Ep)	Graphite-Aluminum (Gr-Al)
$E_{11}$	10.34	53.78	124.11
$E_{22}$	0.951	17.93	24.82
$G_{12}$	0.776	8.96	22.06
$\nu_{12}$	0.318	0.25	0.3

#### 4.1 타원 구멍을 갖는 인장판

Fig. 2 는 타원 구멍을 갖는 인장판을 특이 유한요소 1 개와 일반 유한요소 8 개로 분할한 유한요소 해석 모델이다. Fig. 3 은 특이 유한요소의 포텐셜 함수  $\phi$ ,  $\psi$  의 항수  $m$  에 따라서 해의 수렴성을 보인다.

분할한 요소의 개수가 많아지면 항수가 많아져도 해의 안정성이 좋아짐을 알 수 있으며 반대로 요소의 개수가 작아지면 경계에서 역학적인 적합성이 떨어지기 때문에 해가 불안정해지는 것을 알 수 있다.

Table 2 는 직교 이방성인 yellow poplar, Gl-Ep, Gr-Al 과 등방성 재료인 경우에 타원의 반지름 비 ( $b/a$ )에 따른 응력 집중 계수를 보인다.

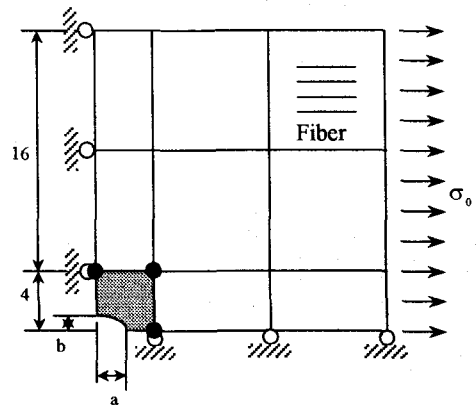


Fig. 2 Orthotropic tensile plate with an elliptical hole. ( $a = 0.25$ )

Table 2 Comparison on the stress concentration factors of orthotropic and isotropic materials according to the ratio of elliptic hole radius.

b/a	Ye-Po	Gl-Ep	Gr-Al	isotropic
1	5.3955	3.9960	4.0838	4.8355
0.5	3.1967	2.49752	2.5414	2.9172
0	1.0018	1.0012	1.0012	1.0015

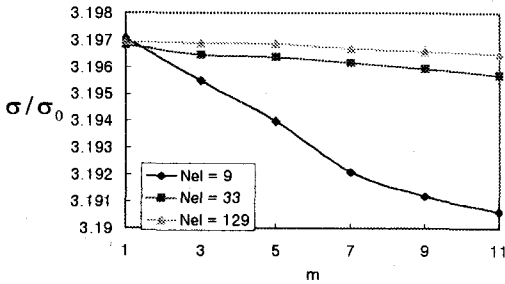


Fig. 3 Stress concentration factors according to the potential function orders.

#### 4.2 보조홀의 영향

Fig. 4 와 같이 중앙홀의 반지름을  $c$ , 보조홀의 반지름을  $0.3c$  로 하여 보조홀이 있는 경우와 없는 경우에 대해 해석하고 그 결과를 비교하였다.

재료는 Gl-Ep 와 Gr-Al 에 대하여 각각 계산하였고 최대 응력 집중 계수의 결과는 Table 3 과 같다.

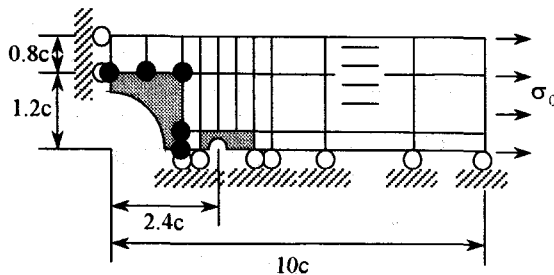


Fig. 4 Analysis model of a orthotropic tensile plate with three holes.

Table 3 Stress concentration factors of the tensile plate with three holes.

(ANSYS results)

	with an adjacent hole	without an adjacent hole	stress reduction
Gl-Ep	3.93955 (4.1768)	5.28569 (5.0963)	25.47 % (18.04 %)
Gr-Al	4.06998 (4.2989)	5.37921 (5.1625)	24.34 % (16.73 %)

수치 실험 결과 보조홀을 이용하여 최대응력집중계수의 값을 각각 25.47%(Gl-Ep), 24.34%(Gr-Al) 감소 시킬 수 있음을 알 수 있었다. ANSYS 의 결과로는 18.04%(Gl-Ep), 16.73%(Gr-Al)의 감소 현상을 볼 수 있었다. ANSYS 의 요소망을 더 잘게 나눌수록 응력집중이 크게 나타나는 현상을 볼 수 있는데, 요소망의 크기에는 제한이 따른다.

이 수치실험을 통하여 구조적 불연속부가 복잡할 때 전형적인 유한요소를 이용한 요소망 형성의 한계를 극복하고, 해석 시간과 정확도 면에서의 유효함을 알 수 있다.

#### 4.3 다공판

모니터 브라운관의 shadow mask 같은 다공판에서 구멍 사이의 간섭현상을 고려하기 위하여 요소를 세밀하게 나눌 필요가 있다. 이 때 요소의 개수가 많아질수록 해석에 오랜 시간을 필요로 하게 된다. 이 수치 실험에서는 특히 유한요소의 사용으로 모델링의 편리함과 해석 시간의 단축을 보이고자 한다.

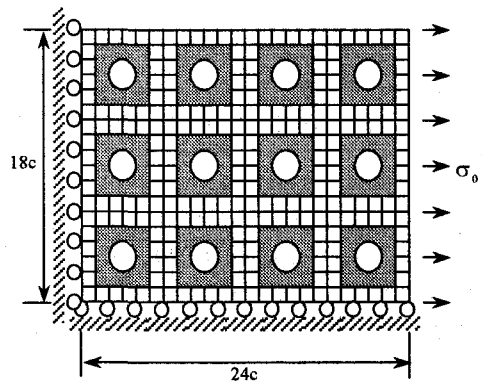


Fig. 5 Analysis model of a tension plate with multi-holes.

Table 4 Stress concentration factors of the multi-holed plate.

	nodes	stress concentration factor	time (sec)
Present	367	4.65747 (GI-Ep)	3
		4.84664 (Gr-Al)	
ANSYS	10560	4.4328 (GI-Ep)	60
		4.5368 (Gr-Al)	

Fig. 5 는 반지름의 크기가  $c$  인 다공판을 해석하기 위한 모델이다. 재료는 GI-Ep 와 Gr-Al 을 사용하였고, 홀의 반지름을  $c$  로 하였다.

Table 4 에서 알 수 있듯이 다공판과 같이 불연속부가 많아서 특이 요소를 여러 개 동시에 사용할 경우에는 그 정확도와 해석 시간 면에서 특이 요소의 유효성이 더욱 명백하게 나타난다.

## 5. 결론

직교 이방성 재료의 2 차원 평면에 존재하는 여러가지 형태의 불연속부를 효과적으로 해석하기 위하여 특이 유한요소를 구성하였다. 트래프즈 유한요소법에 따라서 혼합형 변분 원리를 적용하였으며 경계적분 만으로 요소방정식을 얻을 수 있었다. 제안한 특이유한요소의 수렴특성과 정확도를 규명하기 위하여 여러 가지 구멍을 갖는 2 차원 평면 문제를 해석하고 그 결과를 기존 해석 방법에 의한 결과와 비교 검토 하였다. 연구 결과로 다음 결론을 얻었다.

(1) 특이 유한요소에 의한 해석 결과는 다항식의 항수와 분할 요소의 개수에 따라서 다소 불안정성을 보이거나 비교적 정확한 값을 준다.

(2) 특이 유한요소를 사용하면 요소 분할과 계산 시간 면에서 매우 효과적이다.

## 참고문헌

- (1) Westergaard H. M., 1939, "Bearing pressures and Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, Series A, Vol. 66, pp. 49.
- (2) 김명식, 임장근, 1998, "특이 유한 요소의 구성과 응용", *대한기계학회논문집 A 권*, 제 23 권 제 6 호, pp.1018-1025.
- (3) Gerhardt T. D., 1984, "A hybrid-finite element

approach for stress analysis of notched anisotropic materials", *Transaction of the ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 804-810.

- (4) Rhee J. and Rowlands R. E., 1996, "Stresses around Extremely Large or Interacting Multiple Holes in Orthotropic Composites", *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 5, pp. 935-950.
- (5) Lin J. K. and Ueng C. E. S., 1987, "Stresses in a laminated composite with two elliptical holes", *Compos. Struct.* 7, pp. 1-20.
- (6) Lekhnitskii S. G., 1968, *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach, NewYork.

부록

$$U(1, j) = 2 \operatorname{Re} \left[ p_1 \zeta_1^k + p_2 (C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k}) \right],$$

$$U(1, j+1) = 2 \operatorname{Im} \left[ -p_1 \zeta_1^k + p_2 (-C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k}) \right],$$

$$U(2, j) = 2 \operatorname{Re} \left[ q_1 \zeta_1^k + q_2 (C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k}) \right],$$

$$U(2, j+1) = 2 \operatorname{Im} \left[ -q_1 \zeta_1^k + q_2 (-C \zeta_2^k + B \zeta_2^{-k}) \right]$$

$$V(i, j) = (-1)^{i-1} (2k) \operatorname{Re} \left\{ \left[ \begin{aligned} & \left( \mu_1^{i-1} \right) \frac{\zeta_1^{k-1}}{\omega_1'(\zeta_1)} \\ & + \left( \mu_2^{i-1} \right) \frac{(-B \zeta_2^{-k-1} + C \zeta_2^{k-1})}{\omega_2'(\zeta_2)} \end{aligned} \right] \right\},$$

$$V(i, j+1) = (-1)^{i-1} (2k) \operatorname{Im} \left\{ \left[ \begin{aligned} & \left( -\mu_1^{i-1} \right) \frac{\zeta_1^{k-1}}{\omega_1'(\zeta_1)} \\ & + \left( \mu_2^{i-1} \right) \frac{(-B \zeta_2^{-k-1} - C \zeta_2^{k-1})}{\omega_2'(\zeta_2)} \end{aligned} \right] \right\}$$

$i = 1(\sigma_y), 2(\tau_{xy}), 3(\sigma_x)$  를 의미하고,  $k < 0$  일 때,  $j = 2(k+m)+1$  이고,  $k > 0$  일 때,  $j = 2(k+m)-1$  이다.