

# 해석해를 이용한 유한 요소 해석법

허영우\* · 임장근\*\*

## Finite Element Analysis Using an Analytical Solution

YoungWoo Huh and JangKeun Lim

**Key Words :** 해석해(analytical solution), 유한요소법(finite element method), 가상경계(artificial boundary), 적합성(compatibility), 불연속성(discontinuity), 후리에 급수(Fourier series), 분포외력(traction)

### Abstract

The mechanical structures generally have discontinuous parts such as the cracks, notches and holes owing to various reasons. In this paper, in order to analyze effectively these singularity problems using the finite element method, a mixed analysis method which an analytical solution and finite element solutions are simultaneously used is newly proposed. As the analytical solution is used in the singularity region and the finite element solutions are used in the remaining regions except this singular zone, this analysis method reasonably provides for the numerical solution of a singularity problem. Through various numerical examples, it is shown that the proposed analysis method is very convenient and gives comparatively accurate solution.

### 1. 서론

기계 구조물을 구성하고 있는 부품은 여러 가지 원인에 의해 구멍(hole)이나 노치(notch)와 같은 불연속부(discontinuous part)<sup>(1,2)</sup>를 가지게 되며 이러한 불연속부는 국부적인 응력 집중을 야기하고 구조물의 역학적인 성능의 저하와 파손의 원인이 되기 때문에 이를 정확히 해석하여 그 결과를 설계에 반영하여야 한다.

균열이나 노치 등 특이성을 갖는 영역을 유한 요소법으로 정확하게 해석하는 방법으로는 불연속부 주변의 요소망(mesh)을 아주 세밀하게 분할해서 해석하는 방법과 특이 유한 요소(singular finite element)를 사용하는 방법이 적용되고 있다. 전자의 방법으로 정확한 해를 얻기 위해서는 세밀한 요소 분할에 많은 시간과 노력이 필요하고 후자의 방법은 해의 안정성에 다소 문제가 있다.

따라서 본 논문에서는 이러한 문제들을 해결하기 위하여 특이성을 갖는 영역을 가상의 경계

(artificial boundary)로 나누어 불연속부에서는 해석해(analytical solution)<sup>(3,4)</sup>를 이용하고 나머지 영역은 유한요소로 분할하여 해석하는 혼합해석법을 제안하고자 한다. 즉, 불연속부의 해석해는 선형탄성론에서 구하고 유한요소영역과의 가상 경계에서 역학적인 연속 조건이 만족되도록 이를 연결하여 전체적인 해석을 수행한다. 이와 같은 혼합법<sup>(5,6)</sup>을 사용하면 기존의 세밀한 요소 분할로 인한 많은 절점이 요구되지 않기 때문에 편리하고 정확한 해를 구할 수 있다.

### 2. 평면 문제의 해석해

#### 2.1 Airy 응력함수

Fig. 1 과 같은 기하학적인 형상에서 평면문제의 응력함수는 극좌표계로 다음과 같이 표현된다.<sup>(4)</sup>

$$\phi = a_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\theta + c_n \sin n\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} r^{-n+2} (b_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \quad (1)$$

\* 한양대학교 대학원

\*\* 한양대학교 기계공학부

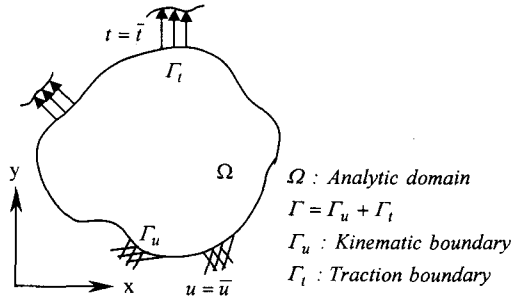


Fig. 1 Analytical domain and boundaries in 2-D plane problem.

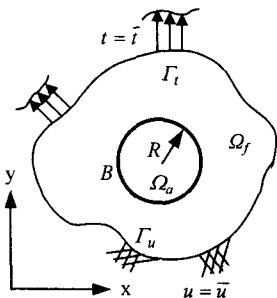
식 (1)에 대한 변위성분은 응력과 변형률의 관계식과 변위와 변형률의 관계식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$u_r = \frac{(1+\nu)}{E} \left\{ -\frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n-1} (a_n \cos n\theta + c_n \sin n\theta) \right\} + \frac{1}{E} \sum_{n=2}^{\infty} (n+2+n\nu-2\nu) r^{-n+1} (b_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \quad (2)$$

$$u_\theta = \frac{(1+\nu)}{E} \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n-1} (a_n \cos n\theta - c_n \sin n\theta) + \frac{1}{E} \sum_{n=2}^{\infty} (n-4+n\nu) r^{-n+1} (b_n \cos n\theta - d_n \sin n\theta) \quad (3)$$

## 2.2 가상 경계에서의 적합방정식

### 2.2.1 가상 경계



B : Artificial boundary,  $\Omega_f$  : Finite element domain,  $\Omega_a$  : Analytic domain

Fig. 2 Artificial boundary in 2-D plane problems.

Fig. 2는 Fig. 1과 같은 평면문제의 해를 구하기 위해서 가상 경계를 구성한 것이다.

가상 경계 B를 도입하여 전체영역을 해석해의 영역  $\Omega_a$ 와 이를 제외한 유한요소영역  $\Omega_f$ 로 분할한다.

영역  $\Omega_a$ 에서 변위와 응력에 대한 해석해를 식 (2), (3)과 같은 미정계수항으로 구한다. 이 때 영역  $\Omega_a$ 의 해석해와 영역  $\Omega_f$ 의 유한요소해는 가상 경계 B 상에서 역학적인 연속성(kinematic continuity)을 만족하여야 하며 이로써 해석해의 미정계수를 결정할 수 있다.

### 2.2.2 가상 경계에서 변위의 연속성

영역  $\Omega_a$ 에서 유도된 변위  $u_r, u_\theta$ 는 가상 경계 B에서 유한요소해의 변위와 연속이 되어야 한다. 따라서 가상 경계 B에서의 변위  $u_r(R, \theta), u_\theta(R, \theta)$ 는 유한요소해로 다음과 같이 Fourier 급수를 이용하여 전개한다.

$$u_r(R, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (4)$$

$$u_\theta(R, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$$

식 (4)의 미계수  $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_n$ 은 Fourier 계수이며 이는 유한요소해의 절점 변위를 다음과 같이 보간하여 결정할 수 있다.

$$u_r(R, \theta) = N_1 u_{r1} + N_2 u_{r2} \quad (5)$$

$$u_\theta(R, \theta) = N_1 u_{\theta1} + N_2 u_{\theta2}$$

$$\text{단, } N_1 = \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_2 - \theta_1}, \quad N_2 = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \quad (6)$$

또한, 식 (2), (3)으로 표현한 영역  $\Omega_a$ 에서의 변위  $u_r, u_\theta$ 에 가상 경계의 반지름  $r=R$ 을 대입하여 가상 경계에서의 변위  $u_r(R, \theta), u_\theta(R, \theta)$ 와의 연속 조건으로부터 미계수  $a_n, b_n, c_n, d_n$ 을 결정할 수 있다.

### 2.2.3 가상 경계에서의 트랙션

가상 경계에서의 응력과 트랙션은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} t_r &= n_r \sigma_{rr} + n_\theta \tau_{r\theta} \\ t_\theta &= n_r \tau_{r\theta} + n_\theta \sigma_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

한편 식 (2), (3)과 가상 경계가 반지름 R 인 원 호임을 고려하면  $n_r = 1, n_\theta = 0$  이 되어 다음 식이 성립한다.

$$t_r = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( u_{r,r} + \frac{\nu}{r} u_{\theta,\theta} + \frac{\nu}{r} u_r \right) \quad (8)$$

$$t_\theta = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_\theta \right) \quad (9)$$

식 (2), (3)에서 유도된 변위  $u_r, u_\theta$  를 대입하면 가상 경계 B 에서의 변위와 트랙션의 관계식이 유도된다.

$$\begin{Bmatrix} t_r \\ t_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & 0 & \hat{m}_{13} & 0 \\ 0 & \hat{m}_{22} & 0 & \hat{m}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{\theta 1} \\ u_{r2} \\ u_{\theta 2} \end{Bmatrix} \quad (10a)$$

or

$$\{t\}_{r\theta} = [\hat{m}]_{r\theta} \{d_2\}_{r\theta} \quad (10b)$$

식 (10-b)에서 변위와 트랙션의 관계식은 극좌표계이므로 직교좌표계로 변환시키면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} t_r \\ t_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{\theta 1} \\ u_{r2} \\ u_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = [T_4] \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

or

$$\{t\} = [m] \{d_2\} \quad (13b)$$

$$[m] = [T_2]^{-1} [\hat{m}]_{r\theta} [T_4] \quad (14)$$

## 2.2.4 계의 방정식

해석해를 이용한 계의 방정식은 가상 경계 B 에서 구한 변위와 트랙션의 관계식, 식 (14)에 의한  $[m]$ 행렬을 이용한 강성 행렬  $[K_B]$ 와 나머지 영역인 유한요소영역에서의 강성 행렬  $[K_A]$ 의 합으로 구성된다.

$$[K] = [K_A] + [K_B] \quad (15)$$

식 (15)로부터 계의 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[K] \{d\} = \{f\} \quad (16)$$

이 때 식 (15)의 강성 행렬은 다음과 같다.

$$[K_A] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (17)$$

$$[K_B] = \int_B [N_B]^T [m] dB \quad (18)$$

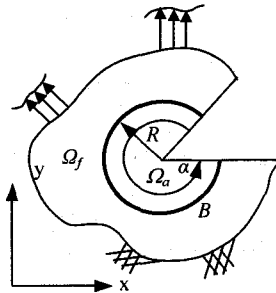
단,  $[N_B]$ 는 식 (6)의 보간 함수이다.

## 3. 수치 해석 및 검토

### 3.1 불연속부를 갖는 평면 문제

#### 3.1.1 일반해

Fig. 3 은 국부적인 응력 집중 현상이 발생하는 불연속부를 갖는 평면 문제를 보인다. 가상의 경계 B 로써 특이성을 갖는 영역  $\Omega_a$ 와 유한 요소 영역  $\Omega_f$ 로 분할되고 영역  $\Omega_a$ 는 해석해로서 해석된다.



B : Artificial boundary,  $\Omega_f$  : Finite element domain,  $\Omega_a$  : Analytic domain

Fig. 3 Two dimensional analytic domain with singularity.

불연속부가 균열이나 노치인 경우에는 가상 경계 구간이  $[0, \alpha]$ 가 되므로 식 (1)에서  $n \rightarrow \frac{n\pi}{\alpha}$ 로 바꾸어 주면 불연속부에서의 일반해가 얻어진다. 불연속부에서의 일반해는 다음의 경계 조건을 만족해야 한다.<sup>(6)</sup>

$$\sigma_{rr} = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{at } \theta = 0, \alpha \quad (19)$$

따라서 식 (19)를 만족하는 불연속부의 일반해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{n=2}^{\infty} r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \left( a_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} + c_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\frac{n\pi}{\alpha} + 1}{\frac{n\pi}{\alpha} - 1} \right) r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \left( \frac{\frac{n\pi}{\alpha}}{\frac{n\pi}{\alpha} + 2} a_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} + c_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)에서 변위  $u_r, u_\theta$ 는 변형률과 응력의 관계식과 변위와 변형률의 관계식으로부터 유도되며 변위  $u_r, u_\theta$ 의 미계수  $a_n, c_n$ 을 구하기 위하여 가상 경계 B에서의 변위  $u_r(R, \theta), u_\theta(R, \theta)$ 를 Fourier 급수로 전개한다.

이 때 Fourier 계수는 식 (5)를 이용하여 구할 수 있다. 따라서 Fourier 급수로부터 얻어진 가상 경계의 변위  $u_r(R, \theta), u_\theta(R, \theta)$ 와 식 (20)으로 표현되는 영역  $\Omega_a$ 에서의 변위  $u_r, u_\theta$ 는 가상 경계의 반지름  $r=R$ 에서 연속 조건을 만족해야 하므로 변위  $u_r, u_\theta$ 의 미계수  $a_n, c_n$ 을 결정할 수 있다.

### 3.1.2 코너(corner) 문제

해의 수렴성 평가를 위하여 Fig. 4와 같은 원형 평면에 접선 방향으로 집중하중을 받고 있는 평면 문제를 수치실험하였다.

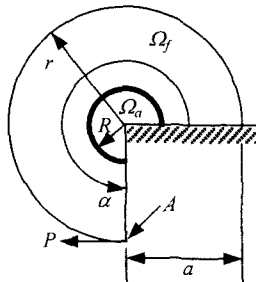


Fig. 4 A circular plate under the concentrated load.

Table 1 Convergence for change of artificial boundary B.

R/r	0.025	0.0025	0.00025
u/u <sub>e</sub>	0.8761	0.988	0.9961

Table 2 Convergence for change of degree alpha.

alpha	270	300	330	359
U/u <sub>e</sub>	0.9961	0.9958	0.9961	0.9959

Table 1, 2는 해석해를 이용한 유한요소해석 결과를 유한요소법의 상용 프로그램인 ANSYS의 결과로 무차원화한 것이다. 이 때 ANSYS의 결과는 국부적인 응력 집중이 생기는 불연속부 주변의 요소망을 아주 세밀하게 분할해서 얻은 수치이다.

Table 내의 변위는 Fig. 4에서 A점의 변위이며  $u_e$ 는 엄밀해이다.

Table 1은 가상 경계의 반지름을 작게 함으로써 해의 수렴성을 평가한 것이다. 반지름 R은 가상 경계의 반지름이고 요소망의 개수는 동일하다.

Table 2는 각도가 커짐에 따라 해의 수렴성을 평가한 것이며 요소망의 개수는 동일하다.

### 3.1.3 집중하중을 받는 균열 문제

Fig. 5는 인장력을 받고 있는 균열판이며 응력 확대계수를 구하기 위한 식은 다음과 같다.<sup>(7)</sup>

$$K_{Ie} = \frac{P}{B\sqrt{b}} F(a/b) \quad B: \text{thickness} \quad (21)$$

$$F(a/b) = \sqrt{\frac{2 \tan \frac{\pi a}{2b}}{\cos \frac{\pi a}{2b}}} \left[ 0.752 + 2.02 \left( \frac{a}{b} \right) + 0.37 \left( 1 - \sin \frac{\pi a}{2b} \right)^3 \right] \quad (22)$$

Table 3은 식 (21)을 이용한 엄밀해와 본 논문에서 제시한 해석해를 이용한 유한요소법으로 구한 수치해를 무차원화한 것이며 반지름 R은 가상 경계의 반지름이다.

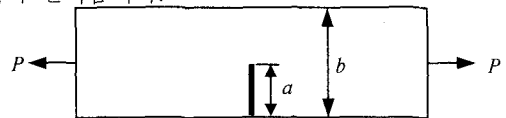


Fig. 5 A edge cracked Plate under tension load.

Table 3 Stress intensity factors due to the artificial boundary radius in the cracked plate.

R/a	0.05	0.005	0.0005
K <sub>I</sub> /K <sub>Ie</sub>	1.124	1.039	1.007

### 3.1.4 V-notch 가 있는 평면 문제

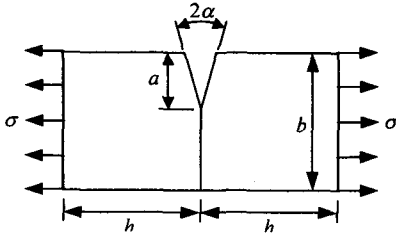


Fig. 6 A plate with V-notch under uniformly distributed loads.

Table 4 Stress intensity factors due to the artificial boundary radius in the notched plate.

R/a	0.025	0.0025	0.00025
$K_I/K_{Ic}$	0.9014	0.966	0.9736

Fig. 6 은 분포하중을 받고 있는 V-notch 평판이며 응력확대계수를 엄밀해( $K_{Ic}$ )<sup>(2)</sup>와 비교하여 Table 4 에 제시하였다. V-notch 의 각은 10 도이며 반지름 R 은 가상 경계의 반지름이다.

### 3.2 원공이 있는 평면 문제

#### 3.2.1 응력함수

Fig. 7 은 원공의 반지름이 a, 가상 경계 B 의 반지름이 R 인 평면을 일반화한 것이다.

가상 경계에 의해 분할된 영역  $\Omega_a$  는  $[a, R]$  의 구간을 갖는 영역이며 가상 경계 구간은  $[0, 2\pi]$  가 된다. 반지름이 a 인 원공이 있는 평면 문제에서는 다음의 경계 조건을 만족해야 한다.<sup>(1)</sup>

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (23)$$

따라서 식 (23)을 만족하는 원공이 있는 평면 문제에서의 응력함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi = a_0 \log r + r^{-1}(a_1 \cos \theta + c_1 \sin \theta) \quad (24)$$

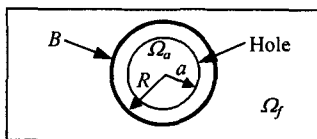


Fig. 7 Geometry of a plane with circular hole.

식 (24)로부터 표현되는 영역  $\Omega_a$  에서의 변위  $u_r, u_\theta$  와 Fourier 급수를 이용하여 전개한 가상 경계 B 에서의 변위  $u_r(R, \theta), u_\theta(R, \theta)$  는 연속 조건을 만족해야 하므로 변위  $u_r, u_\theta$  의 미계수  $a_0, a_1, c_1$  을 결정할 수 있다.

#### 3.2.2 가상 경계 R 의 영향

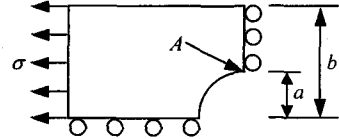


Fig. 8 A plate with a circular hole.

Table 5 Displacements for change of artificial boundary.

R/a	0.1	0.01	0.001
$u/u_c$	0.9084	0.916	0.9237

Fig. 8 은 원공이 있는 평면 문제를 4 분의 1 만을 해석한 것이며 Table 5 는 가상 경계 반지름의 변화에 따른 해의 수렴성을 평가한 것이다.

Table 내의 변위는 Fig. 8 에서 A 점의 변위이다.  $u_c$  는 엄밀해<sup>(1)</sup>이며 이를 이용하여 무차원화한 것이다.

### 3.3 쐐기(Wedge)

#### 3.3.1 응력함수

Fig. 9 는 해석해 영역  $\Omega_a$  가  $[R, \infty]$  의 구간인 쐐기이며 가상 경계 구간은  $[0, \alpha]$  가 되므로 식 (1)에서  $n \rightarrow \frac{n\pi}{\alpha}$  로 바꾸어 주면 쐐기에서의 일반 해는 표현된다.

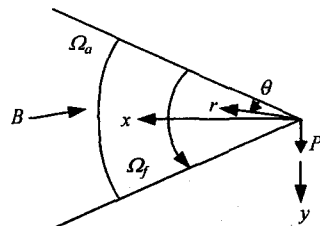


Fig. 9 Geometry of a wedge.

썩기에서는 식 (24)와 같은 경계 조건을 만족해야 한다.<sup>(1)</sup>

$$\sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{r\theta} = 0 \text{ at } \theta = 0, \alpha \quad (25)$$

따라서 식 (25)를 만족하는 조건에서 썩기의 응력함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi = \sum_{n=2}^{\infty} r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \left( a_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} + c_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\frac{n\pi}{\alpha} + 1}{\frac{n\pi}{\alpha} - 1} \right) r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \left( \frac{\frac{n\pi}{\alpha}}{\frac{n\pi}{\alpha} - 2} a_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} + c_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) \quad (26)$$

$u_r, u_\theta$ 의 미계수  $a_n, c_n$ 은 식 (26)의 해석해의 영역  $\Omega_0$ 의 변위  $u_r, u_\theta$ 와 Fourier 급수를 이용하여 전개한 가상 경계  $B$ 에서의 변위  $u_r(R, \theta), u_\theta(R, \theta)$ 로부터 구할 수 있다.

### 3.3.2 해석 결과

Fig. 9는 굽힘이 발생하는 썩기 문제에 대한 모델이며 Fig. 10은 썩기에서의 해석해 영역이  $(R, \infty)$  구간일 때 가상 경계 반지름의 변화에 따른 해의 수렴성을 도시한 것이다. Fig. 10의 수치는 썩기 끝단에서의 수치이며 엄밀해<sup>(1)</sup>를 이용하여 무차원화한 것이다.

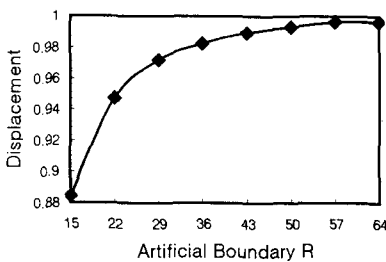


Fig. 10 Displacements for change of artificial boundary.

## 4. 결론

균열이나 노치 등의 불연속부를 효과적으로 해석하기 위하여 해석해를 이용한 유한요소해석법을 제안하였다.

불연속부를 갖는 영역을 임의의 가상 경계로

나누어 해석해 영역과 유한요소영역으로 구분하고 경계에서 역학적 조건을 만족하도록 해석하는 방법이다. 제안한 해석법의 유효성을 보이기 위하여 여러 가지 수치 예제를 해석하고 그 결과를 검토하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 균열이나 노치 등 불연속부 주변에서 세밀한 요소 분할을 하지 않으므로 적은 수의 요소만으로도 정확한 해를 얻을 수 있었기 때문에 많은 해석 시간과 노력이 요구되지 않는다.

(2) 불연속부를 갖는 영역은 형상에 따라 다양한 해석 방법이 필요하지만, 본 논문에서 제안한 해석해를 이용한 유한요소법은 형상에 상관없이 가상 경계의 구성으로 정확한 해석이 가능하다.

## 참고문헌

- (1) Timoshenko S. P. and Goodier J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Singapore, pp109-113.
- (2) Lin K. Y. and Tong P., 1980, 'Singular Finite Element for the Fracture Analysis of V-notched Plate', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1343-1354.
- (3) Givoli D. and Keller J. B., 1988, 'A Finite Element Methods for Large Domain Problems', *Thesis*, Stanford University.
- (4) Givoli D. and Keller J. B., 1992, 'A Finite Element Methods for Domains with Corners', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp1329-1345.
- (5) Givoli D., 1992, *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier, pp103-217.
- (6) Barber J. R., 1992, *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, pp83-106.
- (7) Dowling N. E., 1999, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall, pp295-300.