

열-전기-기계 하중 하에서의 고차 지그재그 판이론

조맹효*, 오진호**.

Higher Order Zig-zag Piezoelectric Plate Theory
Under Thermo-electric-mechanical Loads

Maenghyo Cho, Jinho Oh

Key Words : Thermal loading(열하중), Piezoelectric(피에조 전기하중), Composite plates(복합재료), Higher order zig-zag theory(고차 이론)

Abstract

A decoupled thermo-piezoelectric-mechanical model of composite laminates with surface bonded piezoelectric actuators, subjected to externally applied load, temperature change load, electric field load is developed. The governing differential equations are obtained by applying the principle of free energy and variational techniques. A higher order zigzag theory displacement field is employed to accurately capture the transverse shear and normal effects in laminated composite plates of arbitrary thickness.

1. 서론

최근 복합재료와 스마트 구조 재료의 발전으로 진동억제, 소음감소 등의 잠재적인 응용분야에 관심이 더 커지고 있다. 그러므로 복합재료 지능구조물의 해석시 효율적이고 정확한 모델이 요구되고 있다. 복합재 적층 구조물의 해석을 위한 연구가 지난 20년 동안 지속적으로 수행되어 왔고 이 분야의 최근까지의 연구 동향은 review 논문들 [1,2,3]에 잘 나타나 있다. 기계적인 하중을 받는 적층 구조물은 그 구조물의 횡 방향의 전단 강성이 섬유 방향의 면내 강성에 비해 매우 작으므로 횡 전단 변형이 중요하게 되고 금속 구조물의 굽힘 변형에서는 무시되었던 횡 전단 변형 효과의 중요성이 강조된다. 따라서 보다 정확한 응력과 변형의 예측을 위해서는 횡 전단 변형 효과를 추가 고려하는 것이 복합재료 적층 구조물에서는 중요한 요인으로 인식되어 왔다. 횡 전단 변형 효과를 고려하는 이론으로는 두께 방향으로 면내 변위가 매끈하게 변하도록 변위장을 가정하는 이론 [4,5]과 횡 전단 응력의 연속성을 보장하도록 하

는 이론 [6,7,8]과 층층마다 독립적인 변위장을 가정하는 이론 [9,10] 등이 있다. 그러나 복합재료 적층 구조물은 기계하중 하에서만 운용되는 것이 아니라 가혹한 열 환경하에 놓여 있는 경우도 빈번하다. 특히 엔진의 주변 구조물이나 항공기의 날개, 우주 구조물등은 빈번히 고온 환경에 처하게 된다. 그러므로 최근에는 열 하중과 기계 하중이 동시에 작용하는 복합재료 적층 구조물의 응력, 변형 및 강도의 예측은, 적층 구조물의 설계시 고려해야 할 중요한 문제가 되고 있다 [11].

열과 기계하중의 복합 하중하에서 정확도와 효율성을 만족하는 적층 판/셸의 이론 개발은 아직 미흡하다고 판단된다. 특히 반복 인자 연구를 수행해야 되는 초기 설계 단계에서는 적은 수의 종속 변수를 가지는 효율적인 이론이 바람직하다.

두꺼운 적층판의 경우, 기계하중 하에서는 횡 전단 변형 효과를 고려하는 것이 평판의 두께 방향 응력과 변위의 정확도를 높이는데 중요한 요인이었지만 열하중을 받는 경우에는 같은 정도의 두께 비를 가진다면 횡 수직 변형의 효과를 무시할 수 없다. 이 효과는 기계하중이 가해지는 경우에는 내부 변형 에너지에 기여하는 바가 미미하지만 열하중하에서는 그 효과가 두드러지게 나타나므로 횡 전단 변형 에너지와 함께 동일한 정도의 중요도를 가지고 동시에 고려되어야 한다. 이 효과는

* 서울대학교

** 서울대학교

3 차원 탄성체의 예를 통해서도 잘 나타나고 있고 [12,13], 최근 개발된 고차이론을 통해서도 확인할 수 있다[14].

본 연구에서는 복합재료 적층 구조물에 감지거나 작동기로 사용이 가능한 압전 소자 층을 삽입하거나 접합시킨 지능 구조물이 기계, 열, 전기 하중을 받을 때 정상상태의 두께 방향 거동을 정확히 묘사하는 효율적인 판이론을 개발하는 것을 연구 목적으로 한다. 이를 위하여 고차이론의 변위장을 단순화 하였으며 횡진단 변형효과 뿐만 아니라 수직 방향의 변형 효과를 고려 하였다. 개발된 이론은 수치예를 통하여 평가 될 것이다.

2. 정식화

2.1 Total Free Energy 와 구성방정식

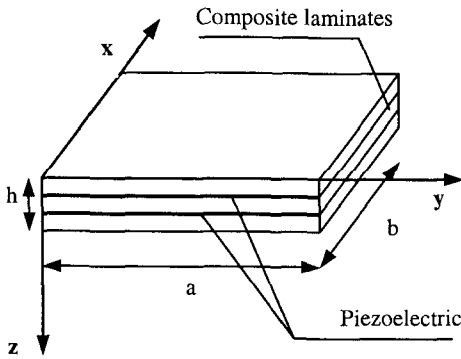


Fig 1. Configuration of the adaptive laminated composite plates

열-기계-전기 하중에 의해 변형되는 구조물의 Free energy 는 다음과 같이 쓰여진다.

$$F(\varepsilon_{ij}, E_i, \theta) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} b_{ij} E_i E_j - k_{ij} \theta \varepsilon_{ij} - d_i E_i \theta - \frac{1}{2} a_T \theta^2 \quad (1)$$

여기서, C_{ijkl} 과 e_{ijk} 은 탄성계수와 piezoelectric 상수이다. 위의 (1)식으로부터, 다음과 같이 구성 방정식들이 유도 될 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - k_{ij} \theta$$

$$D_i = -\frac{\partial F}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + b_{ij} E_j + d_i \theta \quad (2)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = k_{ij} \varepsilon_{ij} + d_i E_i + a_T \theta$$

D_i 와 σ_{ij} 는 응력텐서 구성성분이다.

S 는 엔트로피이고, $\theta = T - T_0$ 는 초기온도 T_0 로 부터 의 온도변화이다. E_i 는 전기장 벡터의 구성성분이다. b_{ij} 는 유전율이고, k_{ij} 와 d_i 는 열-기계 와 열-전기장의 연계 상수이다.

선형에 기초를 둔 Piezoelectricity E_i 는 스칼라 포텐셜 함수 ϕ 로서 표현된다.

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

미소한 변위와 변형을 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

Piezo 층이 있는 결합된 복합재료 적층구조물의 형상은 그림 1 에 도시되어 있다.

2.2 지배 방정식

지배 방정식은 변분 원리를 사용하여 유도되어졌다. 여기서 자중은 무시한다고 가정한다. 1 차 변분을 적용하면, 지배방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \delta \pi_u &= \delta U_d + \delta U_s + \delta F_1 \\ &= -\int_0^{t_0} \int_V (\rho \ddot{u}_i \delta u_i + \gamma \dot{u}_i \delta u_i + \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_S t_i \delta u_i dS dt = 0 \\ \delta \pi_\phi &= \delta E + \delta F_2 \\ &= -\int_0^{t_0} \int_V D_i \delta \phi_{,i} dV dt + \int_0^{t_0} \int_S q_e \delta \phi dS dt = 0 \\ \delta \pi_\theta &= \delta \Theta_k + \delta \Theta_c + \delta F_3 \\ &= -\int_0^{t_0} \int_V (k_{ij} \theta_{,i} \delta \theta_{,j} + S T_0 \delta \theta) dV dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_S q_t \delta \theta dS dt = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$q_t = h_v (\theta + T_0 - T_\infty)$$

() 은 시간에 대한 미분을 나타낸다. V 는 판의 부피를 나타낸다. t 는 동적변형동안의 시간을 나타낸다. 본 논문에서는 정상상태 하에서 온도와 전기장을 외부에서 가해지는 input 으로 고려하므로 위의 지배방정식에서 δU_s 와 식(2)의 첫번째 식만

필요하게 된다. 그러나 온도, 전기, 기계 하중의 완전 연성을 고려할 경우 식(2) 와 (5)의 모든 방정식이 필요하다.

2.3 변위장

효율적인 모델링을 하기 위해서 고차 지그재그 이론을 사용하였다. 면내 변위장은 기계 하중이 작용할 때 두께 방향으로 전체적으로 매끈하게 변하는 3 차의 변위장에 층마다 1 차 지그재그로 변하는 변위장을 중첩하여 변위장을 얻는다. 이때 층마다 지그재그 형상으로 변하는 변위장은 층마다 주 종속 변수를 가지므로 종속 변수의 수는 적층 수에 비례하여 늘어나게 된다.

이를 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$u_{\alpha}(x_{\beta}, z) = u_{\alpha}^0(x_{\beta}) + \psi_{\alpha}(x_{\beta})z + \xi_{\alpha}(x_{\beta})z^2 + \varphi_{\alpha}(x_{\beta})z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k(x_{\beta})(z - z_k)H(z - z_k) \quad (6)$$

여기서, $H(z - z_k)$ 은 단위 계단함수 이다.

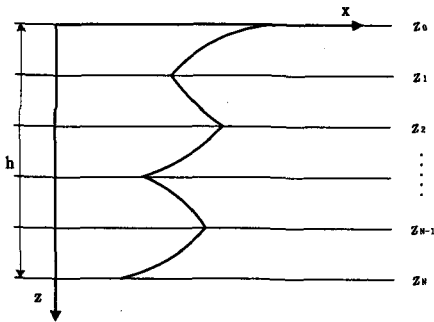


Fig 2. general lamination layup and in-plane displacement field configurations

층마다 정의되는 선형 지그재그 함수는 층의 계마다 횡전단 응력의 연속 조건을 만족시키기 위해서 도입된다. 기계적 하중이 작용할 때 횡 수직 방향의 변형에너지는 무시할 만큼 작으므로 이전 이론에서는 무시되었다. 그러면 u_3 값은 두께방향 z 의 함수가 아니다. 그러나 열하중을 받게 되는 적층구조물은 두께 방향의 횡 수직 변형에 의한 효과를 무시할 수 없기 때문에 본 연구에서는 횡 수직 변형 효과를 고려하기 위해서 수직 방향의 변위를 두께에 대한 2 차 다항식으로 가정하여 그 효과를 고려하였다. 2 차식으로 가정한 이유는 면내 변위를 3 차식으로 가정하였기 때문에 횡전단 변형과 굽힘 변형에서 면내 변위와 상응하는 변형

을 횡수직 변형에서 가정하기 위해서이다.

가정된 횡수직 방향의 변위는 아래와 같다.

$$u_3(x_{\alpha}, z) = w(x_{\alpha}) + r_1(x_{\alpha})z + r_2(x_{\alpha})z^2 \quad (7)$$

위의 변위장에 상, 하면에서의 횡 전단 구속 조건을 대입한다. 즉,

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} |_{z=0} &= \psi_{\alpha} + w_{,\alpha} = 0 \\ \gamma_{\alpha 3} |_{z=h} &= \psi_{\alpha} + w_{,\alpha} + 2\xi_{\alpha}h + 3\varphi_{\alpha}h^2 \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k + w_{,\alpha} + r_{1,\alpha}h + r_{2,\alpha}h^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

위의 식을 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha} &= -w_{,\alpha} \\ \xi_{\alpha} &= -\frac{1}{2h} \left\{ 3\varphi_{\alpha}h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k + r_{1,\alpha}h + r_{2,\alpha}h^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

횡 전단 변형률을 표현하면,

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} &= - \left\{ 3\varphi_{\alpha}h + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_{\alpha}^k}{h} + r_{1,\alpha} + r_{2,\alpha}h \right\} z \\ &+ 3\varphi_{\alpha}z^2 + \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k H(z - z_k) + r_{1,\alpha}z + r_{2,\alpha}z^2 \end{aligned} \quad (10)$$

횡 전단 응력 연속조건을 복합재 층의 경계마다 고려하면, 층 사이의 기울기변화 S_{α}^k 가 결정된다.

$$S_{\alpha}^k = a_{\alpha\gamma}^k \varphi_{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma} \quad (11)$$

여기서 $a_{\alpha\gamma}^k, b_{\alpha\gamma}^k$ 의 자세한 표현식은 생략한다.

결국, 식(9), (10)을 식(6), (7)에 대입하여, 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x_{\beta}, z, t) &= u_{\alpha}^0(x_{\beta}, t) - w_{,\alpha}(x_{\beta}, t)z \\ &- \frac{1}{2h} \left\{ 3\varphi_{\alpha}h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma}) + r_{1,\alpha}(x_{\beta}, t)h + r_{2,\alpha}(x_{\beta}, t)h^2 \right\} z^2 + \varphi_{\alpha}(x_{\beta}, t)z^3 \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma})(z - z_k)H(z - z_k) \\ u_3(x_{\alpha}, z, t) &= w(x_{\alpha}, t) + r_1(x_{\alpha}, t)z + r_2(x_{\alpha}, t)z^2 \end{aligned} \quad (12)$$

변위장에서의 변수는 기준면의 변수만으로 정의된다.

주요 변수는 $u_{\alpha}^0, w, \varphi_{\alpha}, r_1, r_2$ 이다. 그 결과, 주요변수의 수는 층의 수에 관계없이 7개로 일정하다.

위의 변위장을 가지고, 가상일의 원리에 적용하여 변분적으로 일치하는 평형 방정식과 경계 조건

을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta u_{\alpha}^0 : N_{\alpha\beta, \beta\alpha} &= 0 \\ \delta w : M_{\alpha\beta, \beta\alpha} + p &= 0 \\ \delta \varphi_{\alpha} : R_{\alpha\beta, \beta} - V_{\alpha} &= 0 \\ \delta r_1 : N_3 - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta, \beta\alpha}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\delta r_2 : 2M_3 + J_{\alpha\beta, \beta\alpha} + I_{\alpha\alpha} = 0$$

여기서, 결과력의 정의는 지면 관계상 생략한다.

3. 수치해와 결과

개발된 이론의 성능을 검증하기 위해서 정상상태의 응력과 변위를 해석하였다. 기계하중, 온도하중, 전기하중을 각각 고려하였고 완전 연계된 전기-기계-온도 하중을 고려하지 않고 decouple 된 이론을 바탕을 두고 해석을 수행 하였다. 온도-기계-전기 하중의 효과도 단지 구성방정식에서만 고려된다. 해석을 위하여 [0/90/0]과 [0/90/0/90/0] 직교 적층 배열, [90/0/90/0/0/90/0/90/Piezo] 적층배열등 3

Material property	Material property
[90/0/90/0/0/90/0/90/Piezo]	[90/0/90/0/0/90/0/90/Piezo]
PZT-5A layer	Graphite-epoxy layer
$E_1=61 \times 10^9$	$E_L=181 \times 10^9$
$E_3=E_2=53.2 \times 10^9$	$E_T=10.3 \times 10^9$
$G_{12}=22.6 \times 10^9$	$G_{LT}=7.17 \times 10^9$
$G_{13}=G_{23}=21.1 \times 10^9$	$G_{TT}=2.87 \times 10^9$
$\nu_{12}=0.35$	$\nu_{LT}=0.28$
$\nu_{13}=\nu_{23}=0.38$	$\nu_{TT}=0.33$
$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1.5 \times 10^{-6}$	$\alpha_{TT}=22.5 \times 10^{-6}$
$\alpha_{33}=2.0 \times 10^{-6}$	$\alpha_{LL}=0.02 \times 10^{-6}$
$d_{31}=-171 \times 10^{-12}$	
$d_{32}=-171 \times 10^{-12}$	
$d_{33}=374 \times 10^{-12}$	
$d_{24}=584 \times 10^{-12}$	
$d_{15}=584 \times 10^{-12}$	
Material property	가지 적층 배열을 고려하였다. 삼차원 해석 결과는 참고 문헌 [12,15]에서 얻었다. 수치예의 계산에 사용된 물성치는 다음과 같다.
[0/90/0/90/0/0] [0/90/0]	
$E_L=25 \times 10^6$	
$E_T=1 \times 10^6$	
$G_{LT}=0.5 \times 10^6$	
$G_{TT}=0.2 \times 10^6$	
$\nu_{LT}=0.25$	
$\nu_{TT}=0.25$	
$\alpha_{LL}=1 \times 10^{-8}$	
$\alpha_{TT}=1123 \times 10^{-6}$	

3.1 기계하중하의 변위, 응력분포

Sinusoidal 하중을 윗면에 가했을 때의 결과를 Fig3 에 도시하였다. Fig3 에서 보여지듯이 면내 응력과 횡방향 응력이 3 차원 탄성해와 비교해서 매우 정확히 얻어지는점을 알 수 있다.

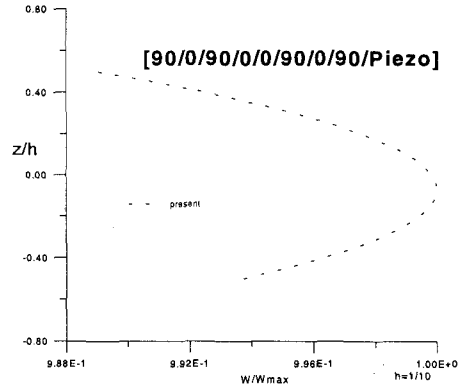


Figure 3(a) out-of plane-displacement w

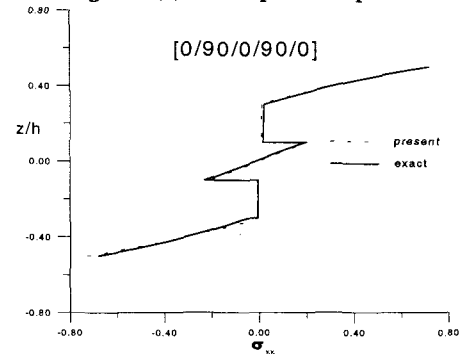


Figure 3(b) in-plane stress σ_{xx} $h=1/4$

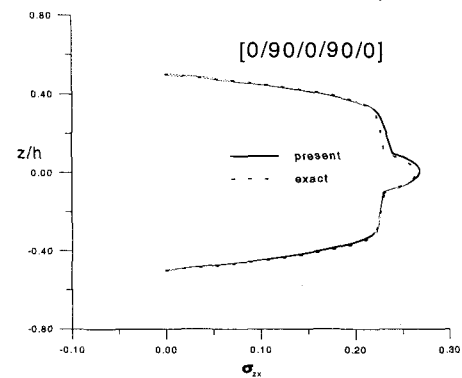


Figure 3(c) out-of-plane stress σ_{zx} $h=1/4$

3.2 온도하중하의 변위, 응력분포

두께 방향으로 선형으로 변하는 온도하중을 가했을때의 응력과 처짐 결과를 Fig4 에 도시하였다. 두께 방향의 변형이 기계하중에 비해 심하게 나타남을 알 수 있고 본 이론의 결과는 삼차원 탄성해의 결과와 비교할 만큼 정확히 응력을 예측할 수 있다.

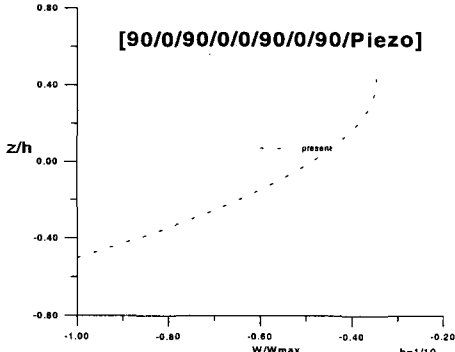


Figure 4(a) out-of plane-displacement w

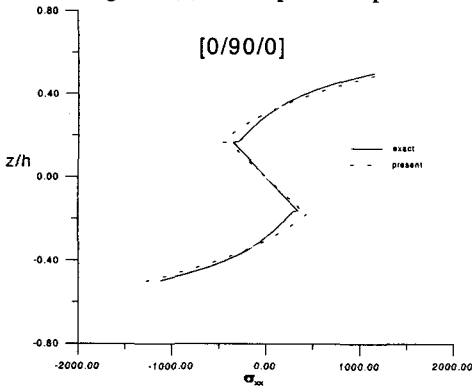


Figure 4(b) in-plane stress σ_{xx} $h=1/4$

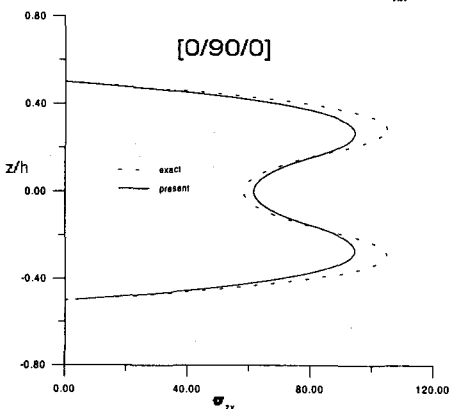


Figure 4(c) out-of-plane stress σ_{zx} $h=1/4$

3.3 전기하중하의 변위, 응력분포

평판의 윗면에 Piezo 층을 부착해서 전기하중을 가했을때의 응력분포를 해석하였다. Fig5 에서 보

여지듯이 면내 응력과 전단응력이 정확히 예측됨을 알 수 있다. 특히 횡 전단 응력의 변화가 두께 방향으로 심하게 나타나는데 본 이론의 해는 탄성해와 잘 일치하는 횡전단응력을 제공하므로 본 방법의 신뢰도를 확인할 수 있었다.

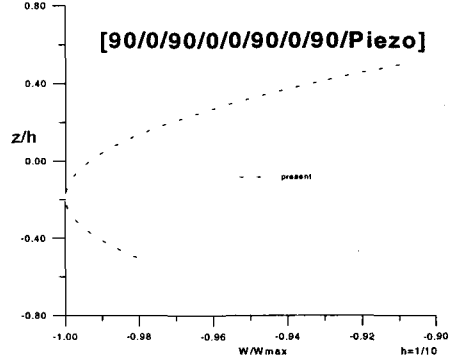


Figure 5(a) out-of plane-displacement w

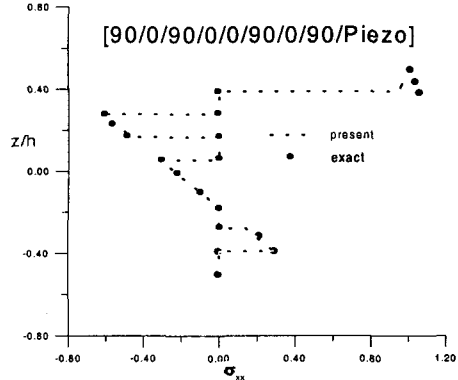


Figure 5(b) in-plane stress σ_{xx} $h=1/10$

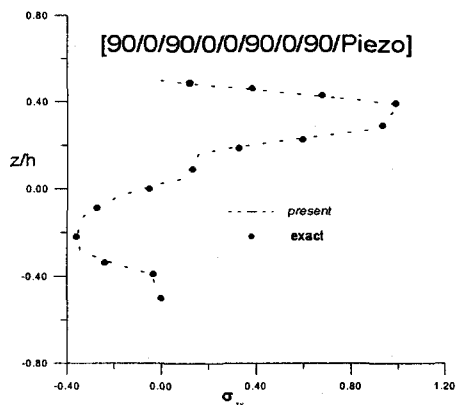


Figure 5(c) out-of-plane stress σ_{zx} $h=1/10$

3.4 세가지 하중에 대한 처짐 비교

세 가지 하중 즉 기계, 전기, 열 하중이 가해질때의 두께 방향의 처짐을 Fig 6.에 비교하였다. 기계하중의 경우 두께를 통해 처짐이 거의 일정하게 나타나지만, 열하중의 경우는 두께의 변화가 심하

게 나타났고 전기하중의 경우도 무시할 수 없을 정도의 두께 방향 변형이 나타났다. 그러므로 횡수직 방향의 변형을 고려하는 것이 중요하다는 것을 확인할 수 있었다.

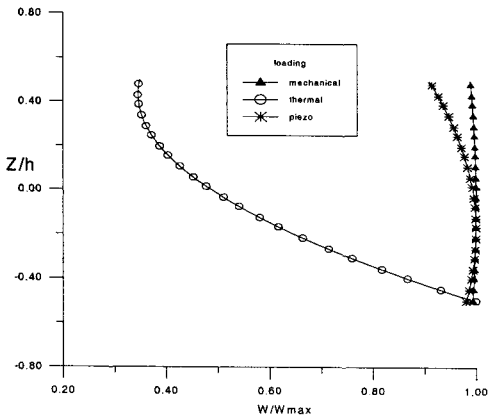


Figure 6 out-of plane-displacement $w_{h=1/10}$

4. 결론

본 연구는 고차 지그재그 이론을 사용하여, 기계, 전기, 열 하중이 작용할 때, 복합 적층 구조물의 변형과 응력에 대해 해석하였다. 그 결과, 복합재료가 열하중과 전기하중을 받을 때, 두께 방향으로 큰 변형이 야기되는 것을 확인할 수 있었다. 그러므로 열 하중과 기계, 전기하중이 동시에 작용할 때는 수직 응력과 수직 변형에 대한 효과를 고려하는 것이 신뢰성 있는 해석을 위해서 바람직한 것을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 기계분야 BK-21 사업의 지원하에 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Reissner, E., 1985, "Reflection on the Theory of Elastic Plates," *App Mech Rev*, Vol. 38, No. 11, pp. 1453-1464.
- (2) Kapania, R. K. and Raciti, S., 1989, "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates, Part I: Shear Effects and Buckling," *AIAA J*, Vol. 27, No. 7, pp. 923-934.
- (3) Noor, A. K. and Burton, W. S., 1989, "Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates," *Appl. Mech. Review*, Vol. 42, No. 1, pp. 1-12.
- (4) Nelson, R. B. and Lorch, D. R., 1974, "A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 41, No. 1, pp. 177-183.
- (5) Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M., 1977, "A Higher-Order Theory of Plate Deformation, Part I : Homogeneous Plates, Part II : Laminated Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 663-676.
- (6) Toledano, A. and Murakami, H., 1987, "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 181-189.
- (7) DiSciuva, M., 1987, "An Improved Shear-deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells & Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 589-596.
- (8) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1992, "Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Compos Struc.*, Vol. 20, pp. 113-123.
- (9) Seide, P., 1980, "An Improved Approximate Theory for the Bending of Laminated Plates," *Mechanics Today*, Vol. 5, pp. 451-465.
- (10) Reddy, J. N., 1987, "A Generalization of Two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates," *Comm. Appl. Numerical Method*, Vol. 3, pp. 173-180.
- (11) Thornton, E.A. Thermal structures for Aerospace Applications, AIAA Education Series, AIAA, 1996.
- (12) Savoia, M. and Reddy, J. N. (1995) Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 32, 593-608
- (13) Cho, M. & Park, H.S Comments on " Three-dimensional Thermal Analysis of Laminated Composite Plates" *Int. J. Solids Structures*. Vol. 34, Nos. 35-36, pp. 4633-4651 (1997)
- (14) Ali, J.S.M. Bhaskar, K. Varadan, T.K. "A new theory for accurate thermal/mechanical flexural analysis of symmetric laminated plates," *Composite Structures*, 45, (1999) pp. 227-232
- (15) Noor, A.K and XU, K " Assessment of computational models for termoelectroelastic multilayered plates." *Computer and Structures* Vol. 61, No. 5, (1996) pp 915-933