

증분소성이론에 준한 새 압입이론

이 형 일* · 이 진 행**

A Novel Indentation Theory Based on Incremental Plasticity Theory

Hyungyil Lee and Jin Haeng Lee

Key Words: Spherical Indenter (구형 압입자), Effective Stress-strain Curve (유효응력-변형률 곡선), Optimal Data Acquisition Location (최적자료수집위치), Constraint Factor (구속인자), Strain-hardening Exponent (변형경화지수), Yield Strain (항복변형률), FEM (유한요소 해석), Deformation and Incremental Plasticity Theory (변형 및 증분소성이론)

Abstract

A novel indentation theory is proposed by examining the data from the incremental plasticity theory based finite element analyses. First the optimal data acquisition location is selected, where the strain gradient is the least and the effect of friction is negligible. This data acquisition point increases the strain range by a factor of five. Numerical regressions of obtained data exhibit that strain hardening exponent and yield strain are the two main parameters which govern the subindenter deformation characteristics. The new indentation theory successfully provides the stress-strain curve with an average error less than 3%.

1. 서론

구형압입자를 사용한 압입시험법은 기존 인장 시험법 등이 적용되기 어려운 부위의 물성치 측정에 사용된다. 즉 국부영역에 걸쳐 재료성질이 연속적으로 변하는 용접부, 시편가공이나 인장시험중 균열성장을 제어하기 어려운 취성재료 또는 현재 사용부와 같이 기존 시험법이 적용되기 어려운 부위의 물성치 측정에 압입시험기를 사용한다.

이러한 압입시험기는 압입하중 및 압입깊이의 변화를 연속적으로 측정함으로써 하중-변위 곡선을 얻고, 이 곡선의 해석을 통해 재료의 탄소성 응력-변형률 관계를 얻을 수 있다. 기존 ATC의 압입 시험기⁽¹⁾는 변형소성이론^(2,3) 및 실험식들에 기초하여,

재료물성치 예측을 위해 인장시험 등을 통한 재료 상수들의 결정과정이 필요하다. 또한 하중-해중의 6-7회 반복에서 산출된 데이터를 회귀시켜 응력-변형률 곡선을 얻는다. 이러한 기존 압입시험법은 시험재료에 따라 별도의 실험이 병행되어야 하는 번거로움이 있을 뿐만 아니라, 산출되는 재료상수들의 정확성에 응력-변형률 곡선이 크게 의존하여 오차가 누적되는 단점도 있다. 또한 압입시험에서 얻어지는 데이터 개수가 한정적이기 때문에 정밀 회귀분석이 어렵다. 가장 결정적인 문제는 기존 압입이론에 적용된 변형소성이론과 보다 실제적인 증분소성이론이 압입하부의 변형양상에 상당한 차이를 준다는 것이다.⁽⁴⁾

본 연구에서는 기존 압입이론의 상술된 제반 문제점들을 해결하기 위하여, 증분소성이론에 따른 압입시험의 유한요소해석 (ABAQUS, 1998)⁽⁵⁾들로부터 구축되는 데이터를 분석하여 새로운 압입 이론을 전개한다. 기존의 응력-변형률 산정지점은

* 회원, 서강대학교 기계공학과

E-mail : hylee@ccs.sogang.ac.kr

TEL : (02) 705-8636 FAX : (02) 712-0799

** 서강대학교 대학원 기계공학과

압입접촉 가장자리 지점에서 최대 압입시 0.2까지의 (소성) 변형률을 구할 수 있으나, 이 부근은 변형률의 구배가 심하다.⁽⁴⁾ 본 연구에서는 상대적으로 변형률의 구배가 적으면서 동시에 큰 변형률값을 산출할 수 있으며 마찰계수의 영향도 적은 지점을 선정하여 이를 기준으로 정교한 압입이론식을 도출한다. 이를 위해 항복변형률과 변형경화지수의 변화에 따른 압입변형특성을 조사하여 확장된 새 압입이론을 확립한다.

2. 압입시험의 유한요소 모델링

Fig. 1은 구형압입자에 의한 재료 압입시험을 나타내는 유한요소모델이다. J_2 증분소성이론을 따르는 등방성 탄소성 재료를 사용하여 대변형 유한요소해석을 한다. 하중과 형상이 모두 축대칭임을 고려하여 4절점 축대칭요소 CAX4 (ABAQUS 라이브러리, 1998)⁽⁵⁾를 사용한다. 8절점 CAX8 요소는 중간절점에서의 유효변형률이 불연속적인 문제가 있어⁽⁴⁾ 본 연구에서는 이 문제가 없는 4절점 요소를 채택한다. 이때 보간함수가 한 차수 낮은 것을 보완하며 미세변형까지 충분히 감지할 수 있도록 압입하부 표면에 압입자직경의 0.25% 크기의 미세 요소를 배치한다. 요소크기가 바뀌는 경계에는 대개 MPC (Multi-Point Constraints, ABAQUS Library, 1998)⁽⁵⁾가 간편하게 사용되나, 이 경우 MPC 절점상의 응력과 변형률이 균일하지 않은 단점이 있다. 이 때문에 압입접촉부 근처의 요소크기 천이영역에는 사다리형 요소를 사용하였으며, 접촉부에서 충분히 떨어진 위치에서만 MPC 모델링을 하였다. 모재와 압입자의 최종 유한요소모델은 각각 약 2300개와 630개의 사각형 4절점 축대칭요소들로 구성된다. 압입자와 모재의 접촉면에는 압입자와 모재쪽 모두 접촉요소면 (Contact Surface, ABAQUS Library, 1998)⁽⁵⁾을 배치한다. 압입자와 모재의 대칭 축상 절점들은 대칭축에 수직방향 변위성분을 구속하여 축대칭 조건을 만족시키고, 모재 밑면은 완전 구속시킨 후, 압입자를 하강시킨다. 압입자는 직경 $D=2\text{mm}$, 영률 $E=2 \times 10^4 \text{GPa}$ 의 준강체로 모델링 하였다. Table 1은 해석에 사용된 대표적 모재 물성치들 및 그 값들을 나타내고 있다. 설정된 값들은 일반 금속재의 물성치 범위를 포괄적으로 포함하고 있음을 주목할 필요가 있다.

3. 압입변형특성

3.1 유효변형률 관측지점

본 연구에서는 이형일과 이진행⁽⁴⁾의 연구를 바탕으로 접촉영향이 적으면서 압입표면에 가까운, 압입 표면으로부터 압입자 직경의 1% 되는 곳을 응력-변형률 관측지점으로 선택하였다. 또한 i) 마찰계수의 변형률에 대한 영향이 적고 ii) 변형률의 기울기도 작으며, iii) 같은 압입에 대해 Tabor의 변형률 예측 지점보다 5배 정도 큰 변형률이 측정되는, 압입 중심으로부터 0.4 d 만큼 떨어진 점을 변형률 측정점으로 선택하였다. 이와 같이 유효응력-소성변형률 관측지점을 임의로 선택할 수 있는 이유는 어느 지점의 유효응력과 유효변형률도 단축 응력-변형률 곡선상에 놓여야 하기 때문이다. Fig. 2는 압입직경이 변화할 때 0.4 d 지점에서 변형률 변화 추이를 본 곡선으로, 마찰계수는 0.1, 재료의 항복강도와 영률은 각각 400MPa, 200GPa로 설정하였다. Tabor⁽⁶⁾가 제안한 변형률식에서 최대 유효소성변형률은 반구가 재료에 완전히 접촉한 상태에서 0.2이다. 이에 비해 새 압입이론은 같은 압입깊이에서 기존이론보다 약 5배 정도의 유효소성변형률을 구할 수 있다.

3.2 새 압입이론

Fig. 2의 곡선 형태를 근거로 새로운 압입이론을 전개하였다. 강체압입자를 사용한 압입시 pile-up과 sink-in을 고려한 실제 접촉압입직경은 구의 기하형상으로부터 다음과 같이 구해진다.

Table 1. 해석 모델의 대표 물성치 값들

모재 물성	사용 값
영률	100, 200, 400 GPa
항복강도	200, 400, 800 MPa
변형경화지수	3, 5, 7, 10, 13, ∞

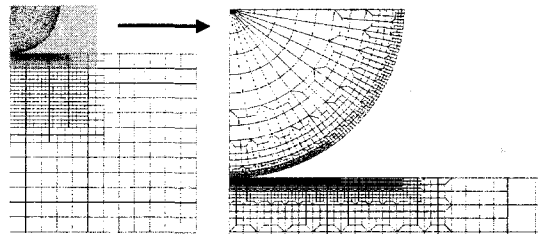


Fig. 1 The FE mesh for indentation analysis.

$$d = 2\sqrt{hD - h^2} = 2\sqrt{c^2 h_i D - (c^2 h_i)^2} \quad (1)$$

여기서 h 는 압입시 실제 접촉압입깊이, h_i 는 기준 표면으로부터 압입된 깊이를 의미하며, c^2 는 다음과 같이 정의된다.

$$c^2 \equiv h/h_i \quad (2)$$

항복강도와 영률을 고정시킨 상태에서 유효소성 변형률은 Fig. 2로부터 다음과 같은 형태로 근사화될 수 있다.

$$\varepsilon_{eq}' = f_1(n) \left(\frac{d}{D} \right)^{f_2(n)} \quad (3)$$

압입하중 P 가 가해질 때 압입자와 시험재료간의 평균접촉압력 p_m 은 $p_m \equiv 4P/(\pi d^2)$ 로 정의된다. 압입시 평균접촉압력 p_m 과 변형역에서의 대표유효 응력 σ 값으로 나눈 것을 구속인자 (constraint factor) ψ 로 정의하며, ψ 는 유효변형률의 함수이다.⁽⁷⁾

$$\psi(\varepsilon_p) \equiv p_m/\sigma \quad (4)$$

따라서 유효응력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = 4P/(\pi d^2 \psi) \quad (5)$$

변형률과 응력 사이의 관계를 다음과 같이 Rice와 Rosengren⁽⁸⁾이 제안한 piecewise power law 형태로 모델링하면 다음과 같다.

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_o} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma_o} & \text{for } \sigma \leq \sigma_o \\ \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n & \text{for } \sigma > \sigma_o; 1 < n < \infty \end{cases} \quad (6)$$

여기서 σ_o 는 인장항복강도, $\varepsilon_o = \sigma_o/E$ 는 항복변형률 이고 n 은 변형경화지수이다. 총변형률 ε_t 는 탄성 변형률과 소성변형률로 분해된다 ($\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p$).

한편 Haggag 등⁽¹⁾이 제안한 항복강도 계산수식은 별도의 실험을 통한 재료상수 결정과정이 필요한데, 이러한 문제점을 해결하기 위하여 물성치 상호간의 연관성으로부터 항복강도를 계산한다. piecewise power law식 (6)은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\sigma = \sigma_o \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_o} \right)^{1/n} = K \varepsilon_t^{1/n} \quad (7)$$

이 식은 $\sigma = \sigma_o$ 일 때에도 성립해야 하므로,

$$\sigma_o = K \varepsilon_o^{1/n} = E \varepsilon_o \quad (8)$$

식 (8)로부터 다음과 같은 결과식이 유도된다.

$$\sigma_o = \left(\frac{K^n}{E} \right)^{\frac{1}{n-1}} = E \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (9)$$

따라서 변형률 예측식을 적용하여 각 압입깊이에 따른 정확한 응력을 예측할 수 있다면 변형률과 응력의 관계로부터 항복강도 σ_o 를 계산할 수 있다.

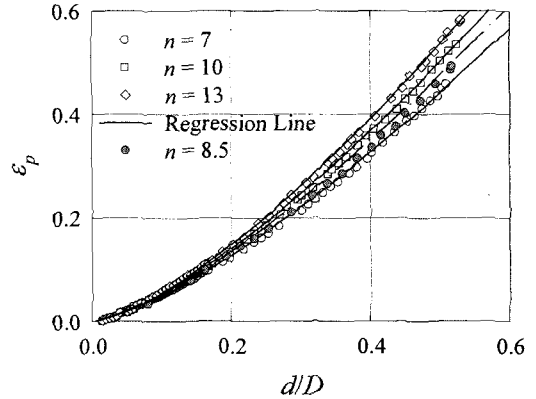


Fig. 2 Equivalent plastic strain distribution with respect to contact diameter.

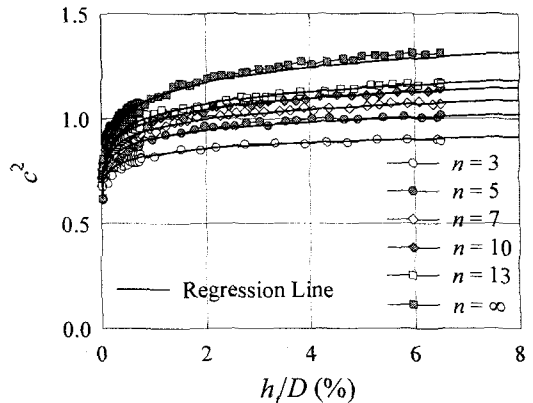


Fig. 3 Regression curves of c^2 vs indentation depth for various values of strain hardening exponent n .

3.3 변형경화지수에 따른 압입이론

위의 관계식들을 검증하기 위하여 항복변형률을 고정시킨 상태에서 변형경화지수를 변화시키면서 유한요소해석을 수행하였다. 마찰계수 $f = 0.1$ 일 때 압입깊이의 변화에 따른 c^2 변화추이를 Fig. 3에 나타내었다. 여기서 얇은 압입에 대해 변형경화지수가 일정한 경우 c^2 이 불변량이라는 Matthews⁽²⁾와 Hill⁽³⁾의 기존이론과 달리 압입깊이의 함수임을 확인할 수 있다. 이는 압입초기영역은 탄성변형이 지배적인 영역이므로 이론값 0.5⁽⁵⁾에 수렴하며, 압입깊이가 증가할수록 탄소성 천이영역을 지나 완전소성영역으로 접어들면서 c^2 의 값이 증가하기 때문이다. 따라서 c^2 은 압입깊이의 함수로 나타내어야 한다. (10)은 c^2 을 변형경화지수와 압입깊이의 함수로 나타낸 것이다.

$$c^2 = f_o(n) + f_1(n) \ln(100 h_i/D) \quad (10)$$

$f = 0.1$ 일 때 재료표면 하단으로 $l/D = 1\%$, 압입 중심으로부터 $0.4d$ 지점에서 압입깊이와 유효소성 변형률의 관계를 변형경화지수에 따라 회귀한 곡선들을 Fig. 3에 나타내었으며, 식 (11)은 해당 회귀 결과식이다. 식 (11)에 $n = 8.5$ 를 대입하여 얻어지는 회귀곡선과 유한요소해석 데이터를 Fig. 5에 비교하여 나타내었으며, 이로부터 회귀식 (11)이 변형경화지수에 따른 특성을 잘 나타냄을 알 수 있다.

$$\varepsilon_p = f_1(n) \left(\frac{d}{D} \right)^{f_2(n)} \quad (11)$$

Fig. 4는 n 의 변화에 따른 구속인자 ψ 의 변화를 나타낸 그림이다. 압입초기영역은 비선형적으로 증가하다가 일정영역을 지나면서 선형적인 관계를 유지한다. $d/D \geq 0.15$ 인 구간에 대해서 ψ 를 선형 회귀한 식은 다음과 같으며, 이를 Fig. 5에 나타내었다.

$$\psi = f_o(n) + f_1(n) \left(\frac{d}{D} \right), \quad (d/D \geq 0.15) \quad (12)$$

3.4 항복변형률 변화에 따른 압입이론

Fig. 6는 항복변형률에 따른 c^2 vs h_i/D 곡선들의 변화를 보여준다. 그림에서 항복강도와 영률의 절대값은 다를지라도 그 상대비인 항복변형률이

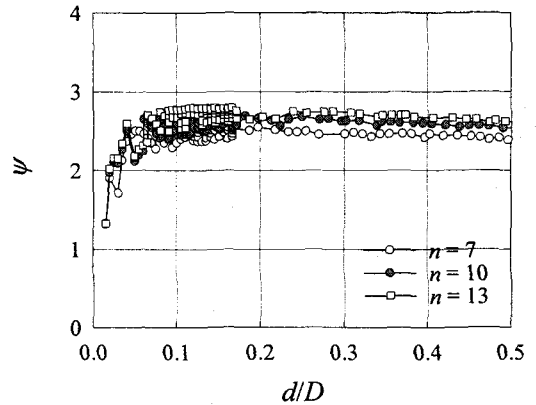


Fig. 4 The constraint factor ψ vs contact diameter curve with respect to strain hardening exponent n .

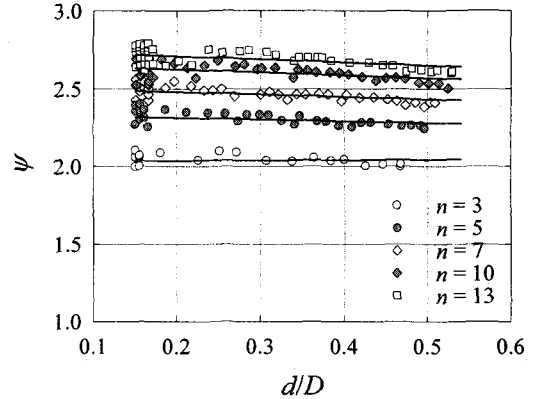


Fig. 5 The regression lines of constraint factor ψ vs indentation depth with respect to n .

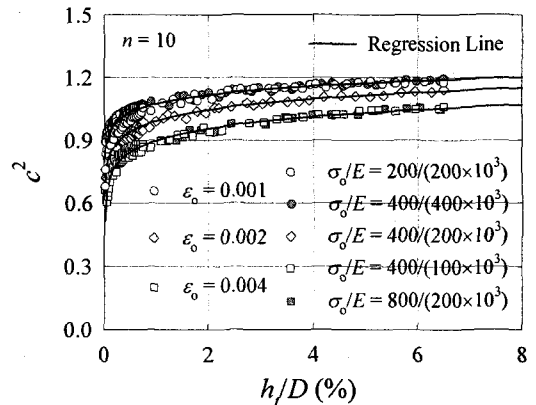


Fig. 6 The regression curves of c^2 vs indentation depth for various values of ε_0 .

같으면 c^2 곡선이 거의 같다. 특히 항복변형률은 c^2 vs h_i/D 곡선의 초기높이를 결정해 주고 천이 영역 이후의 곡선형태에는 큰 영향을 주지 않는다. 따라서 항복변형률이 압입변형의 초기특성을 결정해주는 주요변수임을 알 수 있다. 항복변형률은 항복변형이 시작되는 지점을 나타내고 변형경화지수는 항복 이후의 재료거동을 나타내는 재료상수이다. 따라서 본 연구에서는 압입초기의 변형특성 지배변수인 항복변형률과 완전소성역에서의 변형특성 지배변수인 변형경화지수를 두 개의 서로 독립된 변수로 설정하여 변수분리에 의한 압입이론을 전개하였다. 이러한 관찰에 기초하여 식 (10)의 c^2 은 아래식 (13)과 같이 변형경화지수와 항복변형률의 통합함수로 회귀되며, 이러한 회귀곡선들이 Fig. 6에 실선으로 나타나 있다.

$$c^2 = f_0(n)f_2(\epsilon_0) + f_1(n)f_3(\epsilon_0) \ln(100h_i/D) \quad (13)$$

Fig. 7은 항복변형률의 비가 유효소성변형률에 주는 영향을 나타낸다. 여기에서도 항복변형률의 증가에 따라 소성변형률이 감소함을 볼 수 있는데, 항복변형률이 증가할수록 초기탄성역이 증가하여 상대적으로 소성역을 감소시키는 역할을 하기 때문이다. 식 (14)는 소성변형률을 변형경화지수로 나타낸 식 (11)을 항복변형률의 함수로 확장하여 회귀한 것이다.

$$\epsilon_p = f_0(n)f_2(\epsilon_0) \left(\frac{d}{D}\right)^{f_1(n)f_3(\epsilon_0)} \quad (14)$$

Fig. 8은 항복변형률이 구속인자 ψ 에 미치는 영향을 보여준다. Fig. 8(a)는 압입초기 ($d/D \leq 0.15$) 영역, (b)는 완전소성역을 나타내는 것으로, 압입 초기에는 항복변형률의 영향이 크지만 완전소성 영역에서는 항복변형률이 ψ 에 전혀 영향을 미치지 못한다. 초기역에서는 탄성역의 영향이 상대적으로 크기 때문에 항복변형률이 클수록 ψ 값이 완만한 증가를 하며 완전소성역에서는 변형경화지수가 지배적인 변수이기 때문에 항복변형률이 영향을 미치지 못하는 것으로 풀이된다. 식 (12)의 ψ 는 아래식 (15)와 같이 $d/D \geq 0.15$ 인 영역에서 변형경화지수와 항복변형률의 통합함수로 회귀된다.

$$\psi = f_0(n)f_2(\epsilon_0) + f_1(n)f_3(\epsilon_0) \left(\frac{d}{D}\right) \quad (15)$$

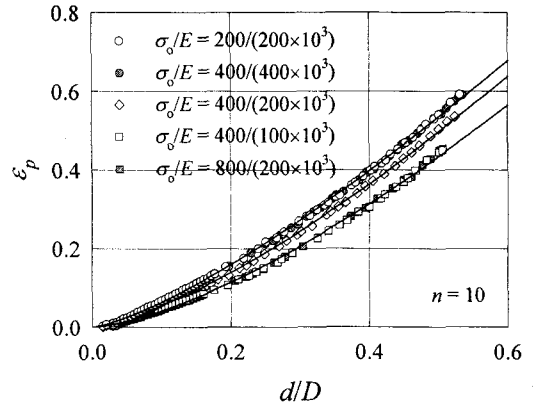


Fig. 7 The regression curves of equivalent plastic strain vs indentation diameter for various values of ϵ_0 .

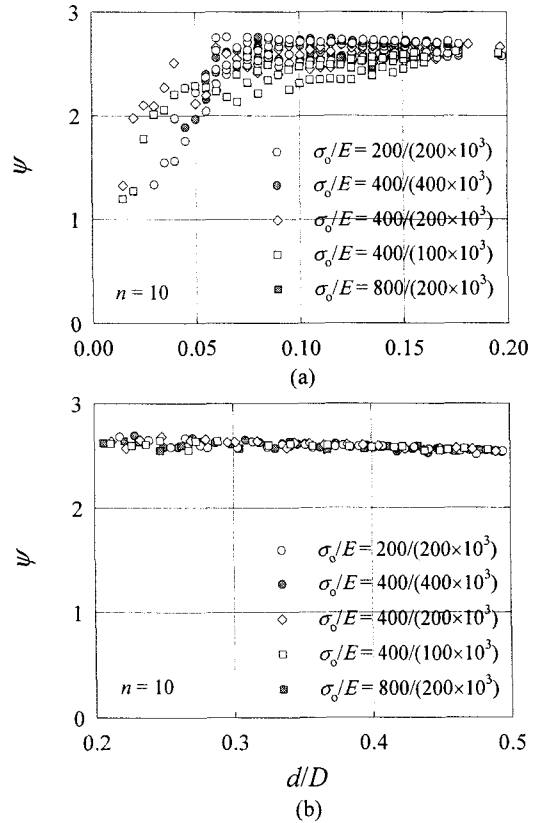


Fig. 8 The effect of yield strain to constraint factor ψ vs indentation diameter curve for (a) $d/D < 0.15$ and (b) $d/D \geq 0.15$.

4. 새 압입이론에 준한 물성치 계산

이상의 사항들을 종합하여 압입시험에 의해 물성치산정 프로그램을 작성하였다. 전체 흐름도는 Fig. 9과 같으며, 압입시험을 통해 측정되는 하중-변위 관계에 기초하여 최종적으로 재료물성치인 영률, 항복강도, 변형경화지수 등을 구하게 된다. 구형압입자에 의한 영률계산에는 Sneddon⁽¹²⁻¹⁴⁾, Pharr⁽¹⁵⁾, 그리고 Francis⁽⁷⁾의 수식 등이 사용된다. 본 연구에서는 Francis의 식을 수정하여 6% 압입에 대한 계수를 유한요소해석을 통해 결정하여 사용하였다.

본 장의 유한요소해석에서는 압입자 직경의 6%에 해당하는 깊이만큼 1회 압입한 후 해중하여 하중-변위 곡선들을 생성하였다. 이어 생성된 하중-변위 곡선을 Fig. 9의 재료물성치산정 프로그램에 입력자료로 대입하여 해당 물성치들을 측정하였다. Table 2에는 이렇게 측정된 물성치값들이 실제 재료물성치와 비교되어 있다. Table 2에서 보는 바와 같이 영률과 항복강도의 경우 평균 2%, 변형경화지수의 경우 평균 3% 정도의 오차를 나타내었다. 영률과 항복강도가 고정된 상태에서는 변형경화지수가 증가할수록 전체 물성치의 오차가 감소하고, 영률과 변형경화지수가 고정된 상태에서는 항복강도가 증가할수록 오차 감소함을 볼 수 있다. 항복강도와 변형경화지수가 고정된 상태에서는 영률이 감소할수록 오차가 감소함을 보였다.

Fig. 10과 Fig. 11은 실제 재료물성치와 계산된 응력-변형률 곡선을 비교하여 나타내는 것이다. 여기서 실선은 유한요소해석에 사용된 재료물성치이며, 각 점들은 물성치 예측프로그램으로부터 계산되어 나오는 응력-변형률 곡선상의 응력-변형률 예측지점을 나타낸다. Fig. 10은 변형경화지수가 변화할 때를 보여준다. 영률과 항복강도가 고정된 상태에서는 변형경화지수가 증가할수록 오차가 감소함을 볼 수 있다. Fig. 11은 항복변형률의 변화에 따른 응력-변형률 곡선을 나타낸다. 변형경화지수가 고정된 상태에서는 항복변형률이 클수록 전체 물성치의 오차가 감소함을 볼 수 있다. 이상으로부터, 본 연구의 새 압입이론을 적용하면, (압입시험기를 통한) 한번의 하중과 해중과정에서 얻어지는 압입하중-변위 데이터로부터 매우 정확한 응력-변형률 관계가 도출됨을 알 수 있다.

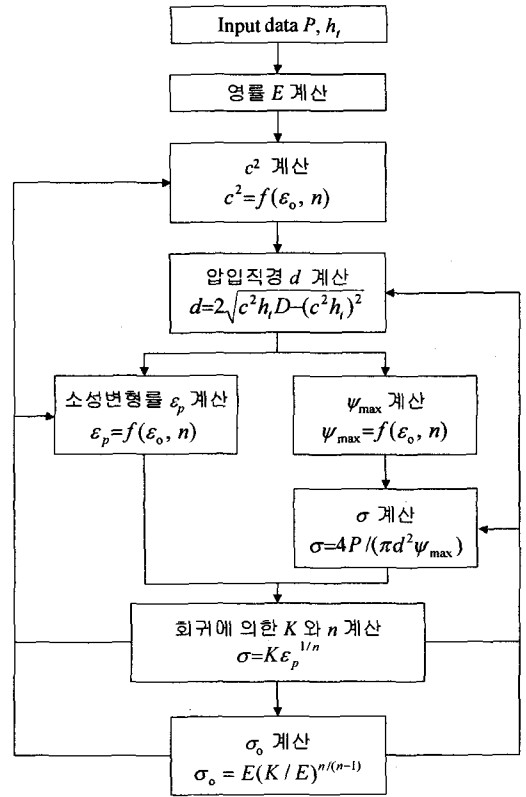


Fig. 9 Flow chart for determination of E , σ_0 and n .

Table 2. Comparison of computed material property values to those given.

σ_0/E ($\times 10^{-3}$)	n	계산된 σ_0/E ($\times 10^{-3}$)	Error (%)	계산된 n	Error (%)
400/200	7	414/195	3.4/2.6	7.47	6.7
	10	404/202	1.1/0.8	10.4	4.0
	13	400/200	0.1/0.1	13.1	0.8
200/200	10	192/213	4.3/6.6	9.4	6.0
		387/422	3.2/5.5	9.63	3.7
		402/100	0.5/0.3	10.2	2.0
		798/202	0.3/0.8	9.92	0.8

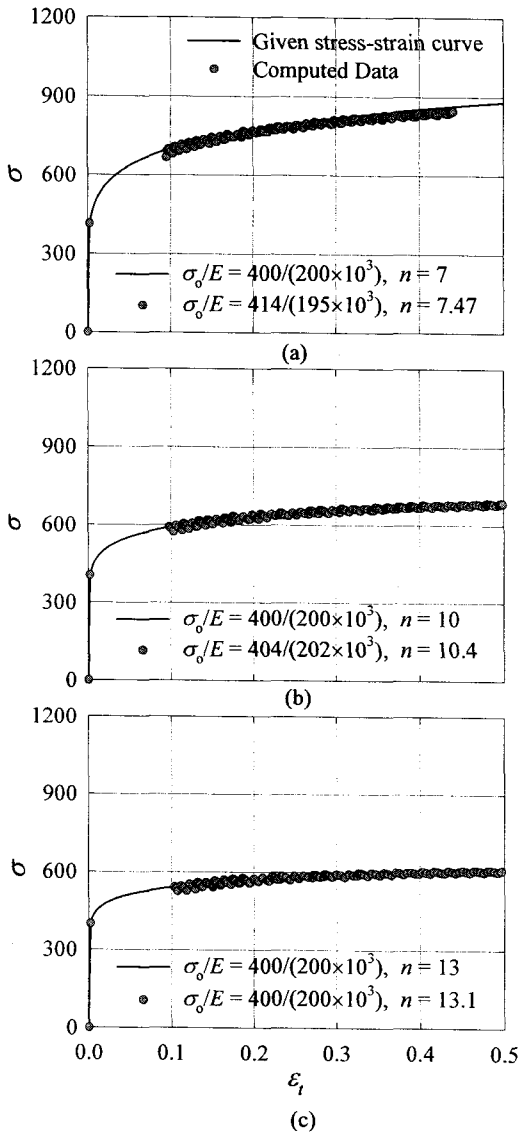


Fig. 10 Comparison of computed stress-strain curves to those given for [(a) $n = 7$, (b) $n = 10$ and (c) $n = 13$].

5. 결론

본 연구에서는 압입시험의 유한요소해석 전산 모사를 통하여 얻은 재료물성치 상호간의 연관성으로부터 재료물성치의 정밀 계측에 필요한 수식들을 도출하였다. 여기서 얻어진 결론들은 다음과 같다.

(1) 압입 판측 지점에 따른 소성변형률의 변화와 마찰계수의 영향이 적으면서도 같은 압입깊이에

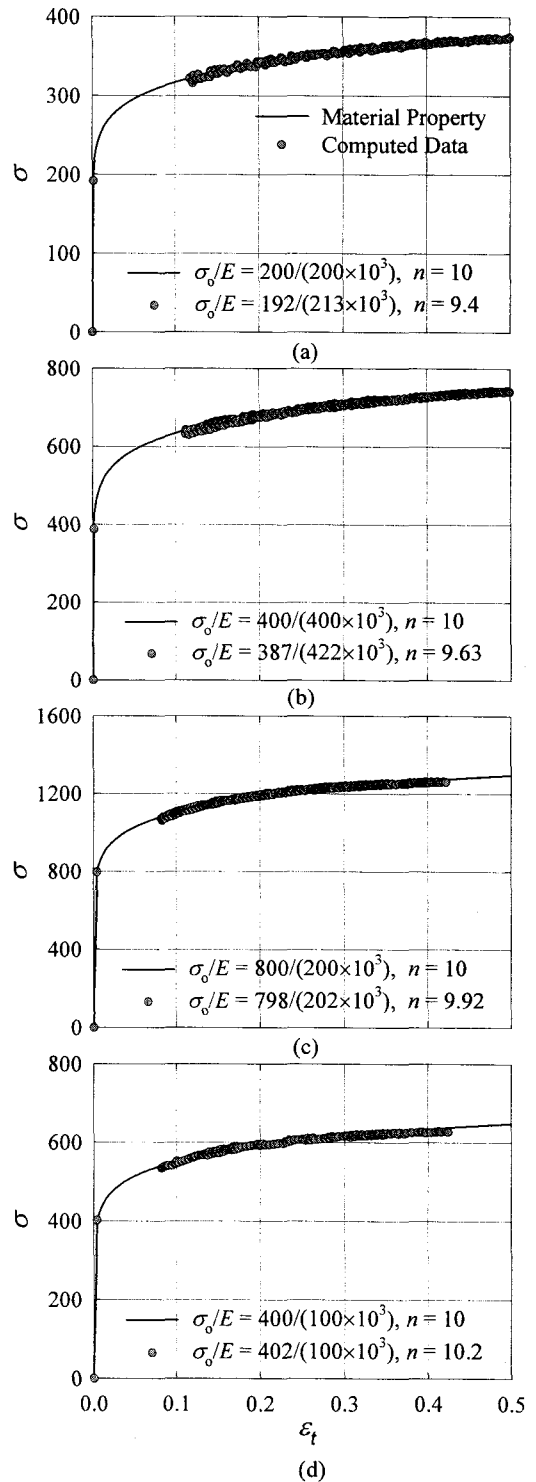


Fig. 11 Comparison of computed stress-strain curves to those given for $\epsilon_o = 0.001$ [(a), (b)] and $\epsilon_o = 0.004$ [(c), (d)].

대해 최대 변형률을 얻을 수 있는 지점으로 압입 중심으로부터 $0.4d$ 만큼 떨어진 지점 표면하부에서 응력과 변형률을 관측하였다. 이를 통해 기존 압입 시험법의 반 정도에 해당하는 압입자 직경의 약 6% 압입으로 변형률 영역을 5배 내외로 증가시킬 수 있다.

(2) 압입시험의 전산모사를 통하여 c^2 , ϵ_p , ψ 세 변수를 회귀하였으며, 이를 통해 압입시험의 변수는 크게 변형경화지수와 항복변형률임을 알 수 있었다.

(3) c^2 이 압입깊이와 관계없이 n 에 따라 결정되는 불변량이라는 기존이론은 얇은 압입에조차 적용이 안되며, c^2 은 전체적으로 압입깊이의 함수임을 보였다. 이는 압입시 초기 탄성영역과 탄소성 천이영역의 영향으로 발생하는 현상으로 추측된다.

(4) 압입지점 $0.4d$ 에 대한 압입변수들의 회귀를 통해 재료 물성치 예측 프로그램을 작성하였다. 유한요소해석을 사용하여 압입자 직경의 6% 압입을 1회 실시하고 해중간 경우 응률과 항복강도는 평균 2%, 변형경화지수는 평균 3% 정도의 오차범위에서 물성치가 구해진다.

(5) 변형소성이론에 기초한 기존 압입이론에서는 재료종류에 따른 재료상수가 별도로 필요하였고, 반복적인 하중-해중과정을 통해 응력-변형률 관계가 구해졌다. 이에 반해 증분소성 유한요소해를 기초로 제시한 본 연구의 새 압입이론에서는 재료상수를 구할 필요 없이 한번의 하중과 해중과정을 통해 얻어지는 하중-변위 데이터로부터 매우 정확한 응력-변형률관계가 구해진다.

후 기

본 연구는 1997년도 한국학술진흥재단 중점 연구소 지원 (1997-005-E00107)에 의해 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Haggag, F. M., Nanstad, R. K., Hutton, J. T., Thomas, D. L., and Swain, R. L., 1990, "Use of Automated Ball Indentation Testing to Measure Flow Properties and Estimate Fracture Toughness in Metallic Materials," *Applications of Automation Technology to Fatigue and Fracture Testing*, ASTM STP 1092, pp. 188~208.

(2) Matthews, J. R., 1980, "Indentation Hardness and Hot Pressing," *Acta Metallurgica*, Vol. 28, pp. 311~318.

(3) Hill, R., Storakers, B. and Zdunek, A. B., 1989, "A Theoretical Study of the Brinell Hardness Test," *Proceedings of the Royal Society of London*, A423, pp. 301~330.

(4) 이진행, 이형일, 2000, "구형 압입이론에 관한 고찰," 대한기계학회 논문집 기고.

(5) ABAQUS *User's Manual*, 1998, Version 5.8, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, RI.

(6) Tabor, D., 1948, "A Simple Theory of Static and Dynamic Hardness," *Proceedings of the Royal Society of London*, 192A, pp. 247~274.

(7) Francis, H. A., 1976, "Phenomenological Analysis of Plastic Spherical Indentation," *Transactions of the ASME*, pp. 272~281.

(8) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., 1968, "Plane Strain Deformation Near a Crack-tip in a Power Law Hardening Material," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 1~12.

(9) Meyer, E., 1908, *Z. Ver. Dtsch. Ing.* Vol. 52, pp. 645, 740 and 835.

(10) Norbury, A. L. and Samuel, T., 1928, "The Recovery and Sinking-in or Piling-up of Material in the Brinell Test, and the Effects of These Factors on the Correlation of the Brinell with Certain Other Hardness Tests," *Journal of the Iron and Steel Institute*, Vol. 117, pp. 673.

(11) Tirupataiah, Y., 1991, "On the Constraint Factor Associated with the Indentation of Work-hardening materials with a Spherical Ball," *Metallurgical Transactions A*, 22A, pp. 2375~2384.

(12) Sneddon, I. N., 1946, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42, pp. 29.

(13) Sneddon, I. N., 1948, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44, pp. 429.

(14) Sneddon, I. N., 1965, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 3, pp. 47~57.

(15) Pharr, G. M., Oliver, W. C. and Brotzen, F. R., 1992, "On the Generality of the Relationship among Contact Stiffness, Contact Area, and Elastic Modulus during Indentation," *Journal of Materials Research*, Vol. 7, pp. 613~617.