

근사적 가중함수를 이용한 보강된 균열평판의 응력강도계수 계산에 대한 연구

김종호* · 이순복**

A study on the calculation of stress intensity factor for a patched crack using approximate weight function

Jong-Ho Kim*, Soon-Bok Lee**

Key Words : Approximate weight function(근사적 가중함수), Crack bridging model(균열가교 모델), Spring constant(스프링 상수), Stress intensity factor(응력강도계수)

Abstract

A cracked-plate with a patch bonded on one side is treated with a crack-bridging model: assuming continuous distribution of springs acting between crack surfaces. the approximate weight function was introduced to obtain the stress intensity factor of patched crack subjected to residual stress or non-uniform stress. The stress intensity factors for the partially patched crack within finite plate or the patched crack initiated from a notch were successfully obtained by numerical calculation.

기호설명

a	crack length
k	spring constant
S	stiffness ratio ($= E'_R t_R / E'_P t_P$)
t	thickness of specimen
σ_∞	remote applied stress
K	stress intensity factor

1. 서론

항공기는 대형사고를 방지하기 위하여 일정 기간 운행 후에 정기적인 검사를 주기적으로 받는다. 이 때 발견된 결함을 보수(repair)하는 과정은 인명적 및 경제적인 면에서 매우 중요하다. 지금까지 리벳팅(riveting) 또는 볼팅(bolting)을 통한 보수방법이 주로 사용되어 왔으나, 접촉 및 프레팅(fretting)을 야기시키는 문제점을 가지고 있다. 한

편, 최근에는 고강도 섬유의 복합재료와 접착제가 발달함에 따라 보강재를 결함이 존재하는 부분에 접착하는 방법이 대두되고 있다. 보강된 구조물에 대한 피로특성, 잔존수명을 살펴보기 위해서는 파괴역학적 접근 방법이 필요하다. Rose⁽¹⁾는 내부균열(center-cracked)이 내재된 무한체에 있어서 보강재를 접착한 경우 응력강도계수를 균열면에 스프링(spring)이 연속적으로 분포한다고 가정하고 해를 구하였다⁽²⁾. 또한 Wang 그리고 Rose는 복합하중(Mixed loading)을 받는 무한체에 내재된 보강된 균열평판에 대하여 해를 구하였다^(3,4). 이처럼 지금까지 연구는 무한체에 내재된 보강된 관통균열에 대한 해석이 주로 수행되었으나, 유한체에 내재된 관통균열에 대한 해석은 거의 이루어 지지 않았다. 또한 보강재를 접착할 때 발생하는 잔류응력이나 열하중 같은 복잡한 응력을 받는 균열의 응력강도계수에 대한 연구도 수행되지 않았다. 그러나 Bueckner⁽⁵⁾와 Rice⁽⁶⁾에 의해 제안된 가중함수법(weighting function method)을 이용하면 복잡한 하중하에서의 응력강도계수를 쉽게 구할 수 있는 장점

* 한국과학기술원

** 한국과학기술원

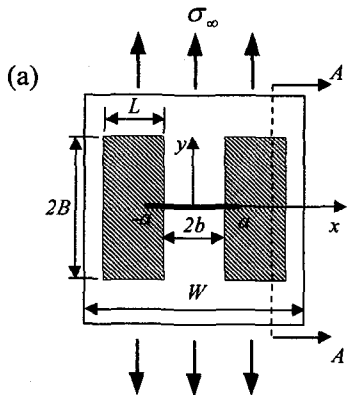
이 있다. 저자들은 가중함수를 이용하여 보강된 균열평판에 대한 응력강도계수를 구한 바 있다. 그래서 본 연구에서는 근사적인 가중함수를 이용하여 기존의 연구를 확장 시켰다. 부분보강(partial patch)했을 때 응력강도계수를 무한체와 유한체에 내재하는 내부균열(center crack)에 대하여 구하였다. 또한 노치에서 발생하는 균열에 대한 응력강도계수 역시 살펴보았다.

2. 부분적으로 보강된 균열평판

Fig. 1(a)는 균일한 인장응력, σ_∞ 을 받고 있는 평판에 내재된 균열길이 $2a$ 의 내부균열이 부분적으로 보강된 상태를 보여주고 있다. 균열부재, 보강재, 접착제 층을 나타내는 파라미터의 첨자로서 P, R, A 를 사용하였다. 따라서 E_P, E_R 은 균열부재와 보강재의 탄성계수, G_A 는 접착제 층의 전단계수를 나타낸다. 그리고 t_P, t_R, t_A 는 각각의 두께를 나타낸다. 이 해석은 다음과 같은 가정을 가지고 있다. (i) 균열부재와 보강재는 모두 등방성이며 변형은 모두 선형 탄성이다. (ii) 접착에 의한 잔류 열 응력은 없다. (iii) 보강된 균열부재의 두께방향 변화를 무시한다. 그리고 균열길이 a 는 B 에 대하여 상대적으로 작다고 가정한다. 한편, Fig. 1(b)는 보강된 단면으로 균열부재, 접착제 층 그리고 보강재를 보여 주고 있다.

2.1 무한평판에 대한 문제의 정의

부분적으로 보강된 보강재의 폭 L 은 균열길이 a 보다 상대적으로 크다고 가정한다. Rose⁽¹⁾는 균열이 없는 부재에서의 응력 σ_0 를 다음과 같이 구하였다.



$\sigma_0 = \sigma_\infty / (1 + S)$ 여기서 $S = E'_R t_R / E'_P t_P$ 는 부재와 보강재의 강성비를 나타낸다. 탄성계수는 평면변형을 조건과 평면응력 조건에 따라서 각각 $E' = E / (1 - \nu^2)$, $E' = E$ 로 나타내진다. 그리고 Fig. 2 처럼 균열면 사이에 선형거동을 하는 스프링이 부분적으로 분포되어 있다고 가정한다. 경계 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$|x| \leq b$ 에 대하여

$$\sigma_o(x) = \sigma_\infty, \quad \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (1a)$$

$$\sigma_o(x) = k E'_P u_y(x), \quad \text{at } y=0 \quad (1b)$$

$b < |x| \leq a$ 에 대하여

$$\sigma_o(x) = \sigma_\infty, \quad \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (1c)$$

$$\sigma_o(x) = k E'_P u_y(x), \quad \text{at } y=0 \quad (1d)$$

여기서 k 는 스프링 상수로 평면응력 조건에서는 Fig. 3 에 보는 바와 같이 랩 전단조인트(lap shear joint)의 응력-변위 관계에서 구할 수 있다. 1 차원 조인트의 이론을 이용하여 Rose⁽¹⁾는 변위를 다음과 같이 구하였다.

$$u_P = \frac{\sigma_0 t_P t_A \beta}{G_A} \quad (2)$$

그리고 스프링 상수를 $1/\pi A$ 와 같이 정의하였고 식(1d)를 이용하여 다음과 같이 계산하였다.

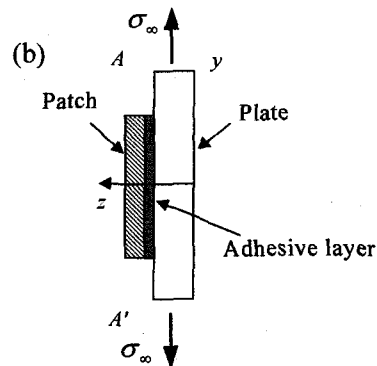


Fig.1 Repair configuration: (a) Partial patched crack with reinforcement, (b) Cross-section along A-A'

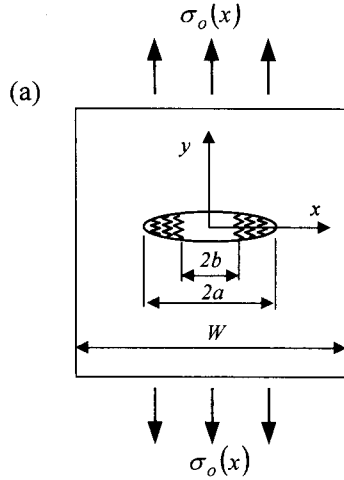


Fig. 2 Distributed springs model for a partial patched crack

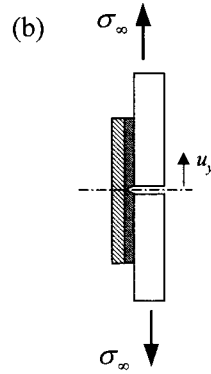


Fig. 3 Cross-section for overlap shear joint

$$k = \frac{1}{\pi A} = \frac{\sigma_0}{E_p u_p} = \frac{G_A}{E_p t p t_A \beta} \quad (3)$$

여기서 β 는 다음과 같이 나타내 진다.

$$\beta = \sqrt{\frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E_p t_p} + \frac{1}{E_R t_R} \right)} = \sqrt{\frac{G_A}{t_p t_A E_p} \left(1 + \frac{1}{S} \right)} \quad (4)$$

2.2 근사적 가중함수를 이용한 응력강도계수

무한체에 작용하는 응력 $\sigma_o(x)$ 에 의한 균열면 변위 $u_o(x)$ 와 균열면 사이에 분포된 스프링에 의한 응력 $\sigma_S(x)$ 에 의한 균열면 변위 $u_S(x)$ 는 가중함수를 이용하여 계산한다⁽⁶⁾. 따라서 최종 균열면 변위 $u_y(x)$ 는 다음과 같다.

$$u_y(x) = u_o(x) - u_S(x) \quad (5a)$$

$$= \frac{1}{E_p} \int_x^a \left[\int_0^a \sigma_o(x) m(x, a) dx \right] m(x, a) da - \frac{1}{E_p} \int_x^a \left[\int_0^a \sigma_S(x) m(x, a) dx \right] m(x, a) da \quad (5b)$$

영향함수(influence function) $g(x_i, x_j)$ 를 도입하여 n 개의 스프링이 균열면에 작용된다고 가정할 경우 균열하중에 의한 x_i 에서의 균열면 변위는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다⁽⁷⁾.

$$u_S(x_i) = \sum_{j=1}^n \sigma_j g(x_i, x_j) \quad (6)$$

여기서 σ_j 는 식(1d)에서 정의된 바와 같이 $E_p k u_y(x_j)$ 를 사용하면 식(5b)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_y(x_i) &= u_o(x_i) - \sum_{j=1}^n \sigma_j g(x_i, x_j) \\ &= u_o(x_i) - \sum_{j=1}^n E_p k u_y(x_j) g(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (7)$$

영향함수 $g(x_i, x_j)$ 을 g_{ij} 와 같이 나타내면 식(7)에 대한 선형대수식에 대한 수치적인 해는 Newman⁽⁸⁾에 의해 제안된 Gauss-Seidel iterative 방법을 이용하여 구할 수 있다. 균열면 변위를 식(7)에서 구하여 보강된 균열부재의 응력강도계수 $K_r(a)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} K_r(a) &= \int_0^a \sigma_o(x) m(x, a) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{x_i-w}^{x_i+w} E_p k u_y(x_i) m(x, a) dx \end{aligned} \quad (8)$$

무한체의 내부균열에 대한 가중함수 $m(x, a)$ 는 다음과 같이 주어진다⁽⁶⁾.

$$m(x, a) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (9)$$

2.3 유한평판에 대한 문제의 정의

Fig. 1(a)에서 균열평판의 폭(W)이 유한하고 보강제가 균열평판의 폭까지 보강되었을 때 응력강도계

수의 계산은 앞 절에서 언급한 방법과 같다. 다만 다음과 같은 근사적인 균열면 변위를 이용한 가중 함수가 필요하다⁽⁹⁾.

$$u_r(x, a) = \sqrt{8} \frac{\sigma_r}{E'} a f_r(a) \sum_{i=0}^n C_i \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{i+(1/2)} \quad (10)$$

여기에서 x 는 균열면의 좌표이고, σ_r 는 특성 응력(characteristic stress)이다. $f_r(a)$ 는 무차원 기준 응력강도계수(reference dimensionless stress intensity factor)이다. 즉 균열면에 응력 σ_r 가 작용할 경우 형상계수를 의미한다. 그리고 변수 C_i 는 경계조건을 사용하여 얻어지며, 근사적인 가중함수는 식(10)을 균열길이 a 에 대하여 미분을 하면 구해진다.

3. 노치에서 발생한 균열에 대한 보강

홀과 같은 노치에서는 균열이 쉽게 발생하므로 보강재를 사용한 보수방법을 특히 항공기 구조물에서는 많이 볼 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 Fig.4(a)와 (b)에 보이는 노치에 존재하는 균열이 있을 때 보강재의 효과를 살펴보았다.

먼저 균열길이 a 는 보강재의 폭(W)과 높이(L)에 비해서 상당히 작다고 가정한다. 보강재에 대한 응력강도계수를 구하기 위해 식(10)을 이용한 근사적인 가중함수를 구할 필요가 있다. Fig.4(a)에 대한 무차원 기준 응력과 무차원 기준 응력강도계수는 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$\frac{\sigma_r(x/\rho)}{\sigma_\infty} = 1 + 0.5 \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-2} + 1.5 \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-4} \quad (11)$$

$$f_r\left(\frac{a}{\rho}\right) = \frac{K}{\sigma_\infty \sqrt{\pi a}} = 1.683 f \left[\left(1 + 2 \frac{a}{\rho}\right)^{-0.5} + \left(1 + 2 \frac{a}{\rho}\right)^{-1.5} \right] \quad (12)$$

한편, Fig.4(b)에 대한 무차원 기준 응력과 무차원 기준 응력강도계수는 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$\frac{\sigma_r(\xi)}{\sigma_\infty} = 3.1635 - 6.9765\xi + 14.1306\xi^2 - 19.217\xi^3 + 16.85\xi^4 - 8.9712\xi^5 + 2.614\xi^6 - 0.318\xi^7 \quad (13)$$

$$f_r(\alpha) = 3.5479 - 7.2009\alpha + 15.7223\alpha^2 - 22.466\alpha^3 + 20.0387\alpha^4 - 10.529\alpha^5 + 2.96\alpha^6 - 0.342\alpha^7 \quad (14)$$

여기에서 $\xi = x/\rho$, $\alpha = a/\rho$ 로 정의되며, 적용범위는 $\alpha < 1.5$ 정도이다.

보강된 균열평판에 대한 응력강도계수를 구하기 위한 최종모델은 Fig.2와 비슷하게 균열면이 스프링이 전체적으로 분포되어 있고 $\sigma_0(x) = \sigma_\infty / (1+S)$ 이 평판에 작용하는 경우의 해를 구하면 된다. 여기서 $S = E_R' t_R / E_P' t_P$ 는 부재와 보강재의 강성비를 나타낸다.

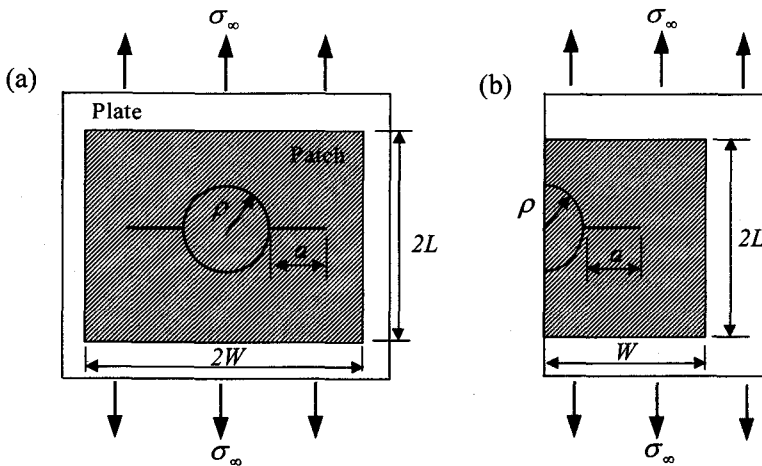


Fig.4 Schematic of patched cracks initiated from a notch : (a) two cracks from a hole; (b) one crack from a single edge notch

4. 결과분석 및 토의

계산에 사용된 균열평판, 보강재 그리고 접착재의 물성치와 치수는 Wang 등⁽⁹⁾이 사용한 값으로 Table 1에 나타내었다.

Table 1. Physical dimensions and material properties of a typical repair

Layer	E(GPa)	ν	Thickness(mm)
Plate	71	0.3	3.0
Reinforcement	207	0.3	1.02
Adhesive	0.7*	0.33	0.203

* Adhesive's shear modulus G_A

Fig.5는 부분적으로 보강된 균열평판에 대한 응력강도계수를 보여준다. 먼저 유한평판의 경우 보강재에 의해 단지 감소된 응력 $\sigma_0(x)$ 에 대한 응력강도계수 $K_{o, finite}$ 그리고 식(8)을 이용한 $K_{r, finite}$ 을 볼 수 있다. 여기서 Fig.1(a)에서 정의된 보강재료 접착된 영역은 $b=30\text{mm}$, $L=30\text{mm}$ 그리고 균열평판의 폭(W)은 120mm 로 하였다. 한편, 무한평판의 경우 감소된 응력 $\sigma_0(x)$ 에 대한 응력강도계수 $K_{o, infinite}$ 그리고 $K_{r, infinite}$ 을 유한평판과 비교하기 위하여 나타내었다. 예측할 수 있듯이 유한평판의 응력강도계수가 무한평판보다 더 큰 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 부분적으로 보강되었을 때 응력강도계수는 균열이 증가함에 따라 감소하여 무한평판이 보강되었을 때 내재된 내부균열 상한해⁽¹⁾ $K_c = \sigma_0 \sqrt{\pi\Lambda}$ 에 접근하는 것을 볼 수 있다.

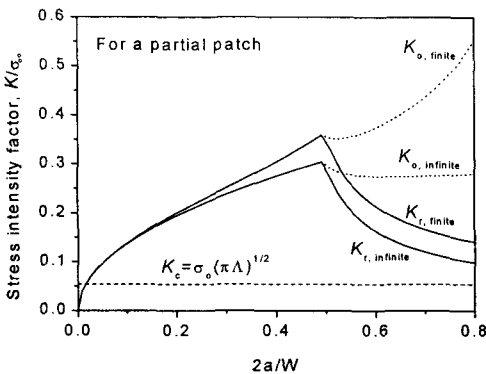


Fig.5 Stress intensity factor for a partial patched center crack.

한편, Fig.6은 무한평판에 내재된 홀에서 발생된

균열의 응력강도계수를 보여 주고 있다. 여기서 사용된 곡률반경 ρ 는 10mm 이다. K_∞ 는 보강을 하지 않았을 때 응력강도계수 값을 의미하고, 보강재에 의한 단지 감소된 응력 σ_0 에 대한 응력강도계수는 K_o 이다. 식(8)을 이용한 보강재에 의한 응력강도계수는 K_r 이며 균열길이가 작은 영역에서는 K_o 와 유사하였다. 그러나 균열길이가 증가함에 따라 감소하여 상한해⁽¹⁾ $K_c = \sigma_0 \sqrt{\pi\Lambda}$ 에 접근하는 것을 볼 수 있다.

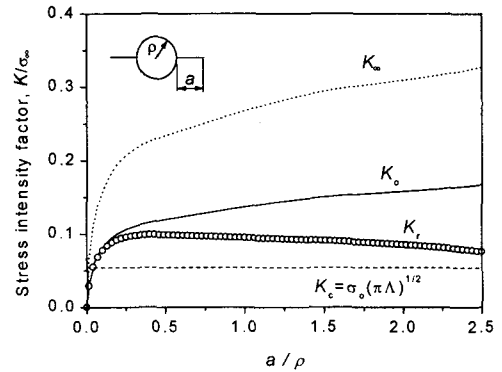


Fig.6 Stress intensity factor for fully patched cracks initiated from a hole.

Fig.7은 반 무한 평판에 존재하는 노치로부터 발생한 균열에 대한 응력강도계수, K_∞ , K_o 그리고 K_r 를 보여 주고 있다. 노치의 곡률반경 ρ 는 10mm 이며, 근사적인 가중함수는 식(13)과 식(14)를 이용하여 구하였다. Fig.6의 결과처럼 균열길이가 작은 영역에서는 K_o 와 유사하나, 균열길이가 증가함에 따라 감소하는 경향을 보여 주고 있다.

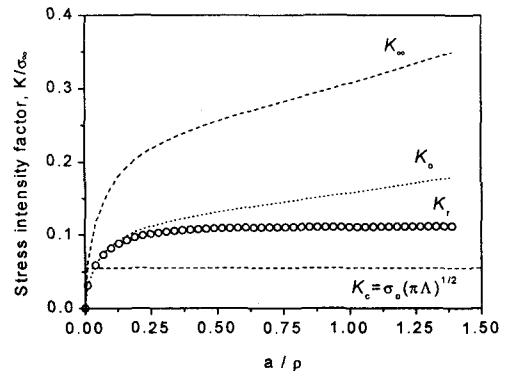


Fig.7 Stress intensity factor for fully patched cracks initiated from a single semi-circle hole.

5. 결 론

잔류응력이나, 열하중 같은 불균일한 하중을 받고 있는 유한체에 내재된 균열이 보강되었을 때 응력강도계수를 근사적인 가중함수로 계산할 수 있는 방법을 제안하였다. 그 예로 부분적으로 보강된 균열 그리고 노치에서 발생된 보강된 균열에 대한 응력강도계수를 구하였고 균열이 증가함에 따라 무한평판에 내재된 보강된 내부균열의 상한 해에 접근하는 것을 볼 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 산하 한국과학기술원 국가지정연구실(NRL-CARE)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) L.R.F. Rose, 1988, "Theoretical analysis of crack patching", A.A. Baker and R.Jones, editors, Bonded Repair of Aircraft Structures, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp.77-106.
- (2) L.R.F. Rose, 1987, "Crack reinforcement by distributed spring", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, No.4, pp. 383-405
- (3) C.H. Wang and L.R.F. Rose, 1998, "Bonded repair of cracks under mixed mode loading", Int. J. Solids Structures, Vol.35, No. 21, pp. 2749-2773.
- (4) C.H. Wang and L.R.F. Rose, 1999, "A crack bridging model for bonded plates subjected to tension and bending", Int. J. Solids Structures, Vol.36, pp. 1985-2014.
- (5) H.F. Bueckner, 1970, "A novel principle for the computation of stress intensity factors", Z. Angew. Math. Mech., Vol.50, pp.529-546.
- (6) J.R. Rice, 1972, "Some remarks on elastic crack-tip stress fields", Int. J. Solids Struct. Vol.8, pp.751-758.
- (7) J.H. Kim, K.W. Lee, D.C. Seo and S.B. Lee, 2000, "Calculation of stress intensity factor using weight function method for a patched crack", Key Engng, Vol. 183-187, pp. 103-108.
- (8) J.C. Jr. Newman, 1982, "Prediction of fatigue crack growth under variable-amplitude and spectrum loading using a closure model", ASTM STP 761, pp.255-277.
- (9) G.S. Wang, 1991, "Crack surface displacement for mode I one-dimensional cracks in general two-dimensional geometry", Engng Fract. Mech. Vol. 40, No.4, pp. 535-548.
- (10) D. Kujawski, 1991, "Estimation of stress intensity factors for small cracks at notches", Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. Vol. 14. No. 10, pp. 953-965.
- (11) J.C. Jr. Newman, X.R. Wu, S.L. Venneri and C.G. Li,

1994, "Small-crack effects in high-strength aluminum alloys", NASA/CAE Cooperative Program. NASA RP1309.