

Newton-GMRES 법을 사용한 혼합격자에서의 압축성 Navier-Stoke 방정식 수치해석

최 환 석*

Numerical Solutions of Compressible Navier-Stokes Equations on Hybrid Meshes Using Newton-GMRES Method

Hwan-Seok Choi*

ABSTRACT

An efficient Newton-GMRES algorithm is presented for computing two-dimensional steady compressible viscous flows on unstructured hybrid meshes. The scheme is designed on cell-centered finite volume method which accepts general polygonal meshes. Steady-state solution is obtained with pseudo-transient continuation strategy. The preconditioned, restarted general minimum residual(GMRES) method is employed in matrix-free form to solve the linear system arising at each Newton iteration. The incomplete LU factorization is employed for the preconditioning of linear system. The Spalart-Allmaras one equation turbulence model is fully coupled with the flow equations to simulate turbulence effect. The accuracy, efficiency and robustness of the presently developed method are demonstrated on various test problems including laminar and turbulent flows over flat plate and airfoils.

1 서 론

근래에 기하학적으로 복잡한 형상 주위의 유동을 효율적으로 해석할 수 있는 Navier-Stokes 방정식 해법과 관련하여 비정렬 격자계에 관한 많은 연구가 이루어졌다. 비정렬 격자계는 일반적인 복잡한 형상에 대하여 효율적인 격자형성이 가능하며 국부적인 유동특성을 고려한 적응격자로의 확장이 용이하여 기하적으로 복잡한 문제를 수반하는 공기역학 문제를 중심으로 많은 발전이 이루어졌다. 유한체적법을 사용한 초기의 비정렬 격자계에서는 이차원의 경우 주로 삼각형 격자만을 사용하여 격자계를 구성하였으나 그 후 경계층 내부와 같이 필요한 곳에는 정렬 사각형 격자를 사용하고 나머지 영역에는 삼각형 격자를 사용하는 혼합 격자가 도입되었다. 혼합격자의 도입으로 비정렬 격자계는 격자형성에 대한 유연성이 더욱 확장되었지만 정렬격자계와 비교될 때 이 방법이 갖는 단점인 단위 격자 당 상대적으로 많은 기억용량과 계산시간으로 인하여 그 적용성에 제한을 받아왔다.

내재적 해법은 외재적 해법에 비하여 높은 CFL 수의 사용으로 빠른 시간 내에 수렴된 해를 구할 수 있어서 정상상태의 해를 구하는데 많이 사용되어 왔다. 내재적 해법 중 근래에 비정렬 격자계와 관련하여 Newton 해법이 관심을 모으고 있는데 이 방법은 이론적으로 이차(quadratic) 수렴성을 제공한다. Newton 선형화 방정식을 Gauss 소거법과 같은 직접 해법을 이용하여 풀이하는 exact Newton method는 해법의 강건성(robustness)은 우수하지만 많은 기억용량과 행렬의 역을 구하는데 소요되는 엄청난 계산시간으로 인하여 대형의 문제에는 적합하지 않다. 이러한

문제를 피하기 위하여 각 Newton 단계에서 선형화 방정식을 반복계산법을 사용하여 근사적으로 풀이하는 inexact Newton법[1]에 대하여 많은 연구가 이루어졌는데 그 중에서도 Krylov 부공간(subspace)을 이용한 Newton-Krylov 해법[2]이 현재까지 가장 성공적인 것으로 판명되고 있다. Newton-Krylov 해법 중에서 일반적인 비대칭 행렬에 대해 적용이 가능하고 다른 해법들에 비하여 안정성 우수한 GMRES(Generalized Minimum RESidual) 법[3]이 현재 전산유체역학 문제에서 많이 사용되고 있다.

본 연구에서는 임의의 다각형 모양의 격자 상에서 공간차분화된 Navier-Stokes 방정식을 유한차분 형태의 GMRES 법을 사용하여 풀이하였다. 난류 모델로는 Spalart와 Allmaras[4]의 단일방정식 난류모델을 사용하였으며 난류방정식을 유동방정식과 완전히 연계하여 풀이하였다. 개발된 해법의 정확성 및 GMRES 법의 유용성을 평가하기 위하여 몇 가지 전형적인 공기역학 문제에 대한 계산을 수행하였다.

II. 공간차분화

2.1 유한체적법

임의의 다각형 모양의 경계 $\partial\Omega_i$ 를 가지는 격자 셀(cell) Ω_i 에 대하여 이차원 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같은 적분형태로 표현될 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} U d\Omega_i + \oint_{\partial\Omega_i} (F - G) \cdot n d(\partial\Omega_i) = 0 \quad (1)$$

여기서 $U = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$ 는 보존변수 벡터이고, F 와 G 는 각각 비점성 플럭스와 점성 플럭스 벡터이며



\mathbf{n} 은 $\partial\Omega_i$ 에서의 외향 단위수직벡터이다. 공간차분화는 체적중심 유한체적법을 사용하였으며 유동변수는 격자 셀의 무게중심에 정의된다.

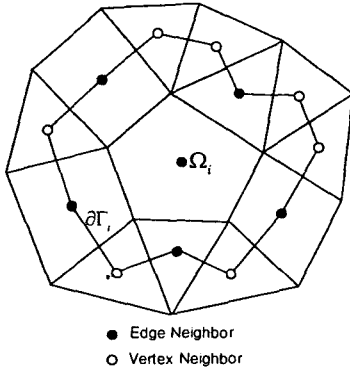


Fig. 1 Control volume for general polygonal mesh

시간에 대하여 고정된 격자계에서 (1)식을 준 차분화하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻는다.

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k=1}^{N_i} [(F - G) \cdot \mathbf{n}_k] l_{\partial\Omega_i} = 0 \quad (2)$$

여기서 N_i 는 Ω_i 의 격자면의 갯수이며 $l_{\partial\Omega_i}$ 는 Ω_i 의 k 번째 격자면의 길이, \mathbf{n}_k 는 이 면에서의 단위 수직 벡터이다. 비점성 플럭스의 계산에는 Roe의 해법이 사용되었다.

2.2 셀의 재구성 (Cell Reconstruction)

고차의 공간 정밀도를 얻기 위해서는 격자 내에서 선형 또는 이보다 고차의 정확도를 가지는 함수를 사용하여 격자면 양쪽의 상태를 재구성하여야 한다. 본 연구에서는 격자 중심에 대한 Taylor 급수진개를 이용하여 격자 내의 임의의 지점에서의 유동변수를 다음과 같이 선형 재구성하였다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i \cdot \Delta \mathbf{r} + O(\Delta \mathbf{r}^2) \quad (3)$$

여기서 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ 이며 \mathbf{r}_i 는 위치벡터이다. $\nabla \mathbf{u}_i$ 는 격자 중심에서 변수의 구배이며 Green-Gauss 법칙을 사용하여 다음과 같이 구하였다.

$$\nabla \mathbf{u}_i = \frac{1}{\Gamma_i} \oint_{\partial\Gamma_i} \mathbf{u} \mathbf{n} d\Gamma \quad (4)$$

여기서 $\partial\Gamma_i$ 는 변수의 구배를 계산하기 위한 적분경로이며 Γ_i 는 이 경로에 의하여 둘러싸인 면적이다(Fig. 1). (4)식의 경계적분은 trapezoidal 공식을 이용하여 구하였다. 본 연구에서는 Fig. 1에 보인 바와 같이 격자 i 의 모서리-이웃 격자(edge neighbors)와 절점-이웃 격자(vertex neighbors)들을 모두 포함하는 확장된 stencil을 사용하였다. 체적중심 유한 체적법의 경우

모서리-이웃만으로도 선형 재구성이 가능하며 이런 경우 Jacobian 행렬의 폭이 감소되어 내재적 해법의 적용에 더 유리하지만 확장된 stencil을 사용할 경우 균일한 사각형 격자계나 정삼각형 격자계에서 (4)식에 따라 구해진 $\nabla \mathbf{u}_i$ 는 이차의 정확도를 가진다는 장점이 있다[5]. 또한 점성항의 계산에 필요한 격자면에서의 미분값을 diamond-path stencil을 사용하여 구할 경우 셀의 절점 이웃들이 결국 stencil에 포함되게 되므로 확장된 stencil를 사용하는데 따른 내재적 해법에서의 추가적인 CPU의 사용은 크지 않다.

2.3 점성항의 계산

Navier-Stokes 방정식의 점성 플럭스는 각 격자면의 중심에서 계산되며 이를 위하여 격자면 중심에서의 원시변수와 이들의 구배를 구하여야 한다. 격자면 중심 P에서 원시변수는 다음과 같이 구하였다.

$$\mathbf{u}_P = (1 - \alpha)\mathbf{u}_L + \alpha\mathbf{u}_R \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\Delta \mathbf{r}_{L,P} \cdot \Delta \mathbf{r}_{L,R}}{\|\Delta \mathbf{r}_{L,R}\|^2} \quad (6)$$

여기서 $\Delta \mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ 을 의미한다. 격자면 중심에서의 원시변수의 구배는 Fig. 2에 보인 것과 같이 격자면을 구성하는 두 절점과 격자면 양쪽의 두 격자 중심으로 이루어지는 다이아몬드 형태의 경로에 Green-Gauss 공식을 적용하여 구하였다.

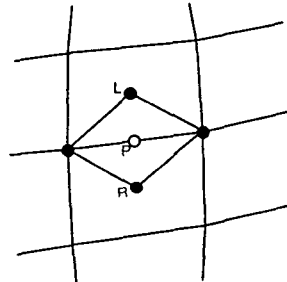


Fig. 2 Diamond-path stencil

다이아몬드 경로에 대한 Green-Gauss 적분을 수행하기 위해서는 절점에서의 변수값이 필요한데 이것은 절점 주변에 있는 격자 셀 중심에서의 값들을 가중 평균하여 구하였다. 가중치는 Holmes와 Connell[6]의 pseudo-Laplacian 방법을 사용하여 구하였다.

III. 시간적분법

3.1 Newton's method

단일 방정식 난류모델과 연계된 레이놀즈 평균 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같은 형태의 비선형 방정식으로 표현된다.

$$f(\mathbf{u}) = 0 \quad (7)$$

여기서 \mathbf{u} 는 상태변수 벡터를 의미한다. Newton 법으로 (7)식을 풀이하기 위해서는 먼저 초기 해 \mathbf{u}^0 를 가정하고 비선형 잔류량의 norm, $\|f(\mathbf{u}^n)\|$ 이 충분히 작아질 때까지 다음과 같이 해를 반복적으로 교정한다.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^n, n=0, 1, \dots \quad (8)$$

여기서 $\Delta \mathbf{u}^n$ 다음 식으로 표현되는 선형방정식의 해이다

$$J(\mathbf{u}^n)\Delta \mathbf{u}^n = -f(\mathbf{u}^n) \quad (9)$$

여기서 $J(\mathbf{u}) = \partial f / \partial \mathbf{u}$ 는 Jacobian 행렬로서 일반적으로 sparse하며 ill-conditioned이다. Newton 법은 초기가정 \mathbf{u}^0 가 최종 해에 충분히 가까운 경우 이차수렴성(quadratic convergence)을 보여준다.

3.2 Inexact Newton method

Newton 법에서는 각 Newton 단계에서 (9)식의 해를 구하여야 하는데 이 선형방정식은 Gauss 소거법과 같은 직접계산법으로 풀이될 수 있으나 대용량의 문제에서는 계산시간이나 기억용량이 면에서 엄청난 양의 계산자원을 요구한다. 또한 계산의 초기단계와 같이 \mathbf{u}^n 이 최종 해에서 먼 경우 선형 근사화한 (9)식은 정확하지 않기 때문에 이 식을 정확하게 풀이하는 것은 불필요하며 또한 충분히 정확한 해를 구하여도 일반적으로 이것은 비선형 방정식의 잔류량 $\|f(\mathbf{u})\|$ 을 감소시키는 데는 별다른 기여를 하지 못한다. 이러한 맥락에서 반복계산법을 사용하여 (9)식의 근사해를 구하는 것이 inexact Newton법이다. Inexact Newton법에서 각 Newton 단계에서의 교정량 $\Delta \mathbf{u}^n$ 은 다음과 같은 내부(inner) 수렴조건을 만족시키도록 구해진다.

$$\|f(\mathbf{u}^n) + J(\mathbf{u}^n)\Delta \mathbf{u}^n\| \leq \eta_n \|f(\mathbf{u}^n)\| \quad (10)$$

여기서 η_n 은 각 Newton 단계에서의 local convergence를 판단하여 선형방정식에 대한 내부 반복계산을 종료하기 위한 기준이 된다. $\eta_n = 0$ 이면 완전한 Newton 법으로 복귀된다. 각 Newton 단계에서의 순차적인 η_n 의 값을 결정하는 방법은 여러 사람에게 의하여 제시되었는데 본 연구에서는 Geuzaine[7]의 방법에 따라 다음과 같이 구하였다.

$$\eta_n = \begin{cases} \eta_0 & \text{if } n=0 \\ \min(\eta_0, \tilde{\eta}_n) & \text{if } n>0, \gamma\eta_{n-1}^{\alpha} \leq \delta \\ \min(\eta_0, \max(\tilde{\eta}_n, \gamma\eta_{n-1}^{\alpha})) & \text{if } n>0, \gamma\eta_{n-1}^{\alpha} > \delta \end{cases}$$

$$\tilde{\eta}_n = \gamma \left(\frac{\|f(\mathbf{u}^n)\|}{\|f(\mathbf{u}^{n-1})\|} \right)^{\alpha}$$

각 상수들은 참고문헌 [7]에 따라 다음의 값들을 사용하였다.

$$\gamma=0.9, \alpha=2, \eta_0=0.05, \delta=0.1$$

3.3 Pseudo-transient continuation

Newton 해법의 단점은 초기 가정이 최종 해와 거리가 멀 경우 수렴초기 단계에서 발산할 수 있다는 것이다. 이러한 문제를 피하기 위하여 본 연구에서는 pseudo-transient continuation[8]을 사용하였다. 이 방법에서는 (7)식을 풀기 위하여 여기에 인위적인 시간 미분항을 도입하여 다음과 같은 비정상 방정식을 \mathbf{u}^{n+1} 에 대하여 순차적으로 풀이한다.

$$\hat{f}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^n}{\Delta t^n} + f(\mathbf{u}) = 0, n=0, 1, \dots \quad (11)$$

본 연구에서 \mathbf{u}^{n+1} 은 다음과 같이 계산하였다.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \hat{J}(\mathbf{u}^n)^{-1} f(\mathbf{u}^n) \quad (12)$$

여기서 $\hat{J}(\mathbf{u}^n) = \partial \hat{f} / \partial \mathbf{u} = I / \Delta t^n + J(\mathbf{u}^n)$ 이다. (12)식은 (11)식에 후방 Euler 시간적분을 적용한 후 한 번의 Newton 교정단계를 적용한 것과 같다. 해가 정상상태로 접근해 감에 따라 점차 완전한 Newton법으로 회복되도록 하기 위하여 $f(\mathbf{u}^n)$ 이 영에 접근함에 따라 Δt^n 을 증가시켰다. 본 연구에서는 Muller와 van Leer[9]의 switched evolution relaxation(SER)법에 따라 Δt^n 을 다음과 같이 변화시켰다.

$$\Delta t^n = \Delta t^{n-1} \phi \left(\frac{\|f(\mathbf{u}^{n-1})\|_{\infty}}{\|f(\mathbf{u}^n)\|_{\infty}} \right) \quad (13)$$

본 연구에서 함수 $\phi(\xi) = \xi^p$ 를 사용하였으며 p 는 일반적으로 0.5~1.5 사이의 값을 사용하였다.

m 차원 Krylov 부공간을 사용할 경우 GMRES법에서는 부공간을 span하는 m 개의 search direction을 저장하여야 한다. 선형방정식의 미지수의 갯수를 n 이라 하면 여기에 필요한 기억용량은 $O(mn)$ 에 비례하여 증가하여 또한 연산량은 $O(m^2, n)$ 에 비례하여 증가한다. 유체역학 문제와 같이 n 이 큰 경우에는 이러한 기억용량과 연산량의 증가 문제로 인하여 m 의 크기를 제한할 필요가 있다. 이러한 목적으로 Saad와 Schultz[3]는 GMRES에서 얻어진 m 번째 근사해가 충분히 정확하지 않을 경우 가장 최근에 얻어진 근사해를 초기해로 치환하고 GMRES 해법을 다시 시작하는 restarted GMRES법을 제시하였다. 만약 k 개의 탐색방향이 저장된다면 이러한 경우를 일반적으로 GMRES(k)로 표시한다.

3.4 유한차분 GMRES법

다른 Krylov 부공간 해법들과 마찬가지로 GMRES 법에서도 Jacobian 행렬 $\hat{J}(\mathbf{u})$ 는 $\hat{J}(\mathbf{u})\mathbf{v}$ 와 같이 행렬-벡터 곱의 형태로만 나타난다. 따라서 Jacobian 행렬을 명시적으로 계산할 필요 없이 이 행렬-벡터 곱을 다음과 같은 유한차분 공식을 이용하여 구할 수 있다.

$$J(u)v \approx \frac{f(u+\epsilon v) - f(u)}{\epsilon} \quad (14)$$

ϵ 의 값은 일반적으로 $f(u+\epsilon v) - f(u)$ 가 $f(u)$ 의 마지막 유효숫자의 1/2이 되도록 한다. 본 연구에서는 Knoll 등[10]이 사용한 방법을 따랐다.

Krylov 부공간 해법의 대부분은 강건성과 수렴 효율을 높이기 위한 예조건화(preconditioning)를 필요로 하며 이를 위해서는 Jacobian 행렬을 계산하여 기억하여야 한다. 이 경우에 Jacobian은 단지 예조건화를 위해 사용되는 것이기 때문에 계산시간 면이나 기억용량 면에서 경제적인 근사적인 Jacobian을 사용할 수 있다.

3.5 예조건화(Preconditioning)

예조건화의 목적은 원래의 선형방정식과 같은 해를 가지면서 반복계산법으로 풀이하기에 더 용이한 새로운 시스템으로 변환하여 해를 구하기 위한 것이다. 본 연구에서는 Newton 선형화 방정식에 대하여 다음 식으로 표현되는 Right preconditioning을 적용하였다.

$$\hat{J}P^{-1}P\Delta u = -f(u) \quad (15)$$

여기서 P 는 예조건자를 의미한다. 효율적인 예조건화를 위해서 P 는 \hat{J} 를 근사화하면서 상대적으로 그 역을 쉽게 구할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 LU 분해 과정 중에 지정된 k 레벨의 부가적인 fill 만이 허용되는 불완전 LU 분해 (ILU(k))를 사용하였다. 예조건화에는 격자면-이웃과 절점-이웃의 Jacobian 을 모두 포함하는 엄밀한 Jacobian 행렬을 사용하였다. LU 분해 과정에서 일어나는 fill in을 줄여서 양질의 ILU 분해를 얻기 위하여 reverse Cuthill-McKee[11] 재배열을 적용하여 셀을 재배열하였다.

4. 계산결과

본 연구에서 수행된 모든 계산은 250MHz의 클럭 속도를 가지는 Silicon Graphics사의 Origin-2000 서버를 사용하여 계산되었다. 모든 계산에서 초기 조건으로는 균일류 조건을 사용하였다.

4.1 평판 층류 경계층 유동

평판 층류 경계층 유동은 엄밀해가 알려져 있으므로 점성유동 수치해법의 기본적인 검증에 매우 유용하다. 계산조건은 $M_\infty = 0.2$ 이며 단위길이에 기초한 레이놀즈수는 1×10^4 이다. 121×41 의 정렬 사각형 격자를 비정렬 격자구조로 변환하여 사용하였으며 평판 위에는 100개의 셀을 두었다. 평판과 첫 번째 격자 사이의 수직거리는 1×10^{-4} 로 하였다. 계산은 GMRES(50)을 사용하여 최대 2회의 재시작을 허용하였으며 초기 CFL 수는 100으로 하였다. 예조건자로 ILU(0)를 사용하였으며 p 값을 0.5, 1.0, 1.5로 변화시켜 수렴특성을 관찰하였다. Fig. 3에는 연속방정식의 L_2 -norm 잔류량 수렴선도를 나타내었다. 연속방정식의 잔류량이 초기 잔류량에 대비하여 12차수 이하로 감소하는데 필요한 반복계산 횟수 및 CPU 시간, 그리고 최종 Newton

단계에서 사용된 CFL 수를 Table 1에 나타내었다.

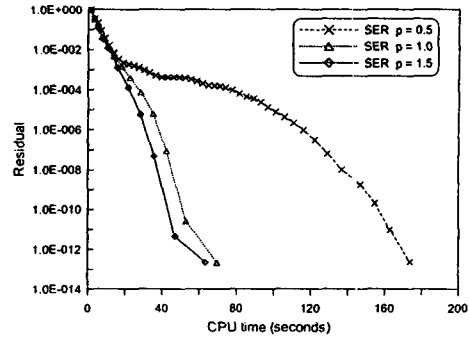


Fig. 3 Convergence history - CPU time

p 의 값이 0.5에서 1.0으로 증가됨에 따라 약 60%의 CPU 시간이 절감되었다. 하지만 p 가 1.0에서 1.5로 증가되는 경우에는 앞의 경우처럼 두드러진 수렴성의 향상은 보이지 않았다.

Table 1. Convergence characteristics with p-variation

p	Niter	CPU time (sec)	CFL number at last step
0.5	44	174	3.23×10^7
1.0	13	70	3.97×10^{12}
1.5	11	64	1.05×10^{19}

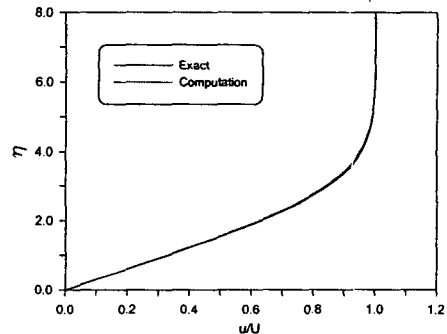


Fig. 4 u/U_∞ profile at $Re_x = 3 \times 10^4$

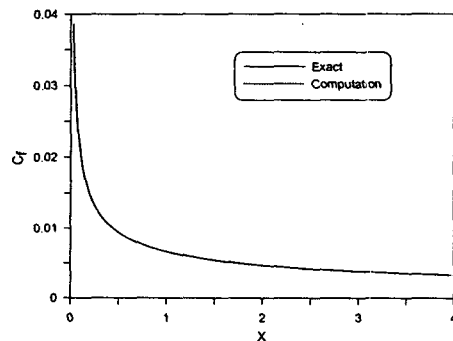


Fig. 5 Skin friction distribution over flat plate

계산결과는 Re_c 가 3×10^4 가 되는 지점에서 검토하였다. Fig. 4에 u/U_∞ 의 형상을 Blasius의 해와 비교하여 나타내었는데 두 결과가 아주 잘 일치함을 알 수 있다. 그리고 Fig. 5에 나타낸 표면마찰계수 분포도 이론값과 훌륭한 일치를 보여주었다.

4.2 NACA 0012 익형 주위 층류유동

계산에 이용된 유동조건은 $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0$, $Re_\infty = 5000$ 이다. 계산에 사용된 혼합형 격자를 Fig. 6에 나타내었는데 총 7812개의 절점과 10116개의 셀을 가지며 익형 표면은 160개의 셀을 가진다. 익형에서 첫 번째 격자점까지의 평균거리는 1×10^{-4} 이었다.

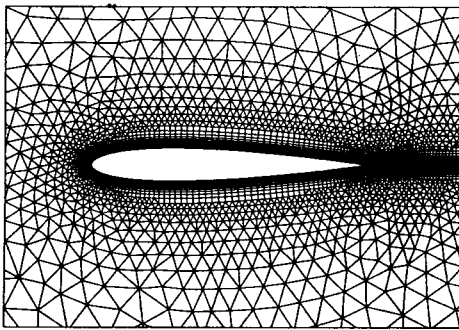


Fig. 6 Close-up view of computational mesh for NACA 0012 airfoil

계산은 GMRES(50)을 사용하여 최대 3회의 재시작을 허용하였으며 초기 CFL 수는 10으로 하고 $p=1.0$ 을 사용하였다. 본 계산의 연속방정식 수렴도를 Fig. 7에 나타내었는데 reverse Cutthill-McKee 재배열의 영향을 보기 위하여 이것을 적용한 경우와 적용하지 않은 경우를 함께 나타내었다. ILU(0) 예조건의 경우 셀을 재배열 한 경우에는 양호한 수렴성을 보였으나 그렇지 않은 경우에는 몇번의 Newton 단계 이후에 발산하였다. 그리고 ILU(1) 예조건자를 사용한 경우에도 셀을 재배열 하지 않은 경우의 수렴성은 셀을 재배열 한 경우의 ILU(0) 예조건자와 ILU(1) 예조건자 중간 정도의 수렴성을 가졌다. Reverse Cutthill-McKee 재배열을 적용한 경우에도 ILU(1) 예조건자에 대한 ILU(2) 예조건자의 수렴성 이득은 적었다. Table 2에는 각 예조건자에 필요한 기억용량과 예조건자의 계산에 소요되는 시간을 표시하였는데 fill-in의 증가에 따른 기억용량과 연산시간의 증가를 볼 수 있다.

Table 2. Memory and CPU time required for ILU(k) preconditioners

Preconditioner	rnz of ILU	Memory for ILU (Mb)	CPU time ILU (sec)
ILU(0)	109996*neq ⁴	13.43	0.35
ILU(1)	166845*neq ⁴	20.37	0.99
ILU(2)	230027*neq ⁴	28.08	1.67

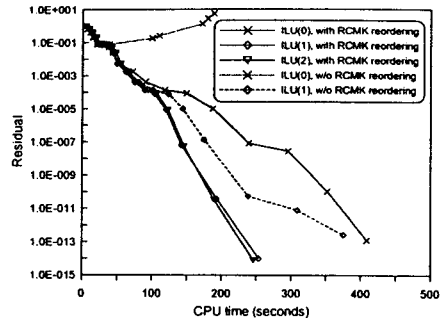


Fig. 7 Convergence history - CPU time

본 계산에서 얻어진 압력분포와 마찰계수 분포를 각각 Fig. 8과 Fig. 9에 Mavriplis와 Jameson[12]의 결과와 비교하여 나타내었다.

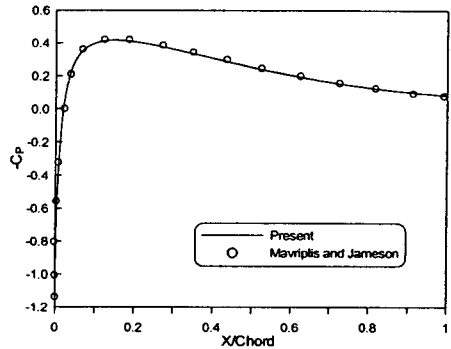


Fig. 8 Pressure coefficient on NACA 0012 airfoil

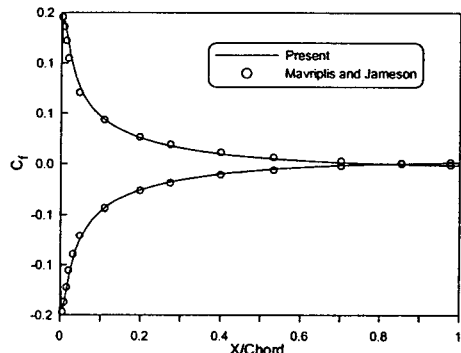


Fig. 9 Skin friction on NACA 0012 airfoil

4.3 RAE 2822 익형주위 난류유동

마지막으로 RAE 2822 익형주위의 난류 유동장을 계산하였는데 유동조건은 $M_\infty = 0.676$, $\alpha = 1.93^\circ$, $Re_\infty = 5.7 \times 10^6$ 이다. 계산에는 총 15492개의 절점과 18959개의 셀로 구성된 혼합격자를 사용하였으며 익형 위에는 280개의 셀을 두었다.

계산된 표면 압력계수 분포를 Fig. 10에 나타내었는데 실험결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 계산에서 얻

어진 양력계수와 항력계수는 각각 $C_l=0.564$, $C_d=0.0104$ 이었으며 이는 실험치 $C_l^{exp}=0.566$, $C_d^{exp}=0.085$ 와 유사하였다. Fig. 11에는 본 계산의 수렴곡선을 나타내었는데 ILU(0) 예조건자를 사용한 경우에는 수렴이 진행되다가 잔류량이 1×10^{-7} 근방에서 정체되어 수렴이 더 이상 진전되지 않는 반면 ILU(1) 예조건자를 사용한 경우에는 잔류량이 목표치(1×10^{-10})에까지 성공적으로 감소하였다. 이것은 ILU(0) 예조건자가 ILU(1) 예조건자에 비하여 상대적으로 그 성능이 떨어지기 때문에 발생한 결과이다.

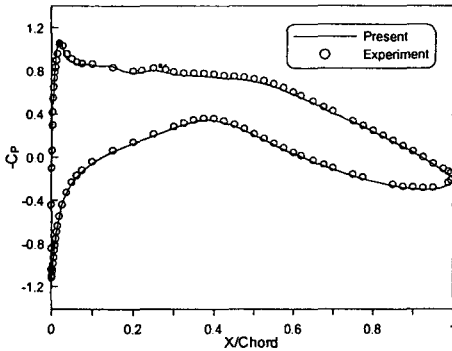


Fig. 10 Pressure coefficient on RAE 2822 airfoil

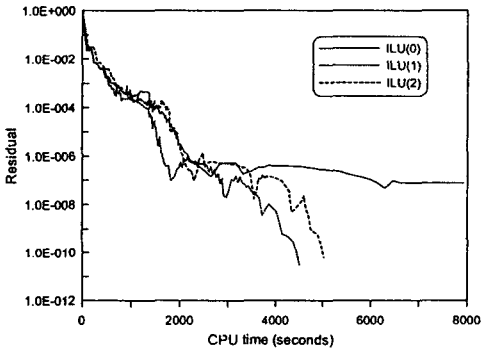


Fig. 11 Convergence history - CPU time

V. 결론

Newton-GMRES 법을 사용하여 혼합격자 상에서 이차원 Navier-Stokes 방정식에 대한 계산을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Newton-GMRES 법은 난류방정식을 포함하는 레이놀즈 평균 Navier-Stokes 방정식에 대해 빠른 시간 내에 안정적으로 해를 얻을 수 있는 방법을 제공하였다.
2. Newton-GMRES 법의 수렴성은 Newton 선형화 방정식의 예조건화에 사용되는 예조건자의 질에 따라 많은 영향을 받았다.
3. 불완전 LU 인수분해를 이용한 예조건화에 있어서 셀의 배열은 수렴성과 밀접한 관계가 있으며 reverse Cuthill-McKee 재배열은 해 수렴성을 향상에 많은 도

움이 되었다.

4. Newton 선형화 방정식의 예조건자로 ILU(1)은 ILU(0)에 비하여 수렴성이 월등히 향상되었지만 ILU(2)는 여기에 수반되는 CPU 시간의 증가가 수렴성의 향상과 상쇄되어 ILU(1)에 비하여 CPU 시간 면에서의 전체적인 수렴성 향상 효과는 marginal 하였다.

참고문헌

1. Brown, P. N., "A Local Convergence Theory for Combined Inexact-Newton/Finite-Difference Projection Methods," *SIAM Journal on Num. Anal.*, vol. 24, no. 2, 1987.
2. Brown, P. N., and Saad, Y., "Hybrid Krylov Methods for Nonlinear Systems of Equations," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 11, no. 3, pp. 450-481, 1990.
3. Saad, Y., and Schultz, M. H., "GMRES: A Generalized Minimal Residual ALgorithm for Solving Non-Symmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 7, pp. 856-869, July 1986.
4. Spalart, P. R., and Allmaras, S. R. "A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows," *La Recherche Aérospatiale*, No. 1, pp. 5-21, 1994.
5. Delanaye, M., "Polynomial Recontruction Finite Volume Schemes for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids," Ph. D. Thesis, Université De Liège, 1996.
6. Holmes, D. G., and Connell, S. D., "Solution of the 2D Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids," *AIAA Paper 89-1392*, June 1989.
7. Geuzaine, P., Lepot, I., Meers, F., and Essers, J.-A., "Multilevel Newton-Krylov Algorithms for Computing Compressible Flows on Unstructured Meshes," *AIAA Paper 99-3341*, June 1999.
8. Kelly, C. T., and Keyes, D. E., "Convergence Analysis of Pseudo-Transient Continuation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 35, no.2, pp. 508-523, 1998.
9. Mulder, W., and van Leer, B., "Experiments with Implicit Upwind Methods for the Euler Equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 59, pp. 232-246, 1985.
10. Knoll, D. A., McHugh, P. R., and Keys, D. E., "Newton-Krylov Methods for Low-Mach-Number Compressible Cobustion," *AIAA Journal*, vol. 34, no. 5, pp. 961-967, 1996.
11. Cuthill, E. H., and McKee, J. M., "Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices," *Proceedings of the 24th National Conference of the Association for Computing Machinery*, Brndon Press, pp. 157-172, 1969.
12. Mavriplis, D. J., and Jameson, A., "Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes," *AIAA Journal*, vol. 28, no. 8, pp. 1415-1425, 1990.