



선형 격자 형성 방정식을 이용한 직교 격자 형성에 관한 연구

Orthogonal Grid Generation Using Linear Grid Generating Equations

○ 이상욱¹⁾, 권장혁²⁾, 권오준³⁾

S. W. Lee, J. H. Kwon, O. J. Kwon

A method of two and three dimensional orthogonal grid generation with control of spacing by using the covariant Laplace equation is presented. An important feature of the methodology is its ability to control effectively the grid spacing especially near the boundaries still maintaining good orthogonality in whole field.

The method is based on the concept of decomposition of the global transformation into consecutive transformation of an approximate conformal mapping and an auxiliary orthogonal mapping to have linear and uncoupled equations. Control of cell spacing is based on the concept of reference arc length, and orthogonal correction is performed in the auxiliary domain.

It is concluded that the methodology can successfully generate well controlled orthogonal grids around bodies of 2 and 3 dimensional configurations.

1. 서론

편미분 방정식의 지배를 받는 유동장에서 간단한 경우를 제외하고는 해석적으로 해를 구할 수 없으며 이러한 경우 수치적인 방법을 사용하여 유동장을 해석한다. 수치적으로 유동장을 해석하는 경우 유한한 수의 계산점들을 유동장에 분포시키고 이들에 대해서 지배방정식을 적용하여 해를 구한다. 이 때 계산점들을 유효 적절히 분포시키는 문제는 격자 형성에 의해 이루어지며 형성된 격자는 수치해의 안정성, 수렴성 그리고 정확도에 영향을 미친다고 알려져 있다. [1]

격자를 형성하는 문제는 수치해석의 가장 큰 과제 중의 하나로 알려져 왔고 아직까지도 활발히 연구가 진행되고 있으며 많은 발전이 있어왔다. 특히 타원형 격자 형성방정식을 사용하는 격자 형성방법이 많이 발전했으며 이 중 Thompson[2] 과 Sorenson[3] 등의 방법은 가장 널리 쓰이는 방법 중의 하나이다. 이들 방법은 임의의 형상에 대해서 격자를 형성할 수 있고 제어함수를 잘 조절해 줌으로써 적절히 밀집된 격자를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 그러나 제어함수의 영향을 많이 받으므로 적절한 격자를 형성하기 위해서는 제어함수를 잘 선택해야하며 특히 경계에서 직교하는 격자를 형성하기 위해서는 제어함수를 반복해서 구해야하므로 3차원의 경우에는 계산시간이 오래 걸리고 형상이 복잡한 경우는 수렴하지 않거나 적합한 격자를 형성하지 못할 수도 있다.

Mobley & Stewart[4]는 계산영역에서 Cauchy-Riemann 조건을 만족하는 Laplace 방정식에 확장좌표를 도입하여 직교격자를 형성하는 방법을 제안하였으며 Ryskin & Leal[5]도 직교격자를 형성하기 위한 covariant Laplace 방정식을 유도하였다. Kwon[6]은 Mobley & Stewart의 방법에서 선형 격자 형성방정식을 유도하였으며 근사한 등각변환을 사용하여 적합한 경계조건을 구함으로써 반복하지 않고 2차원에서 직교격자를 형성할 수 있었다. 한편 Kang & Leal[7]은 역시 같은 형태의 covariant Laplace 방정식에 대해서 전체 변환을 등각변환과 직교변환으로 나누어 생각하여 격자형성방정식을 선형화하였으며 경계요소법(BEM)을 사용하여 적합한 경계조건을 구함으로써 반복하지 않고 2차원에서 직교격자를 형성하였다.

Kwon과 Kang & Leal의 방법은 결과로 나타나는 격자형성방정식은 같으나 물리영역의 경계점 분포에 따른 경계조건을 구하는 점에서 큰 차이가 난다. Kang & Leal은 BEM을 사용하여 정확한 등각변환을 구했으나 계산시간이 상당히 많이 소모되는 단점이 있었다. 이에 비해 Kwon은 근사한 등각변환을 이용함으로써 매우 빠른 시간에 양질의 직교 격자를 형성할 수 있었다.

- 1) 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학전공 대학원
- 2) 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학전공 (Tel : 042-869-3715)
- 3) 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학전공 (Tel : 042-869-3720)

최근에 Jeong[8]은 Kang & Leal의 방법을 3차원으로 확장하여 임의의 형상에 대해서 직교격자를 형성하였으며 Kim[9]은 Kwon의 방법을 이용하여 등각변환과 포텐셜 유동의 해를 이용하여 3차원 항공기 형상에 대해서 직교격자를 형성하였다. 그러나 Kim도 그의 논문에서 지적하였듯이 covariant Laplace 방정식을 이용하여 격자를 형성할 경우 격자 간격을 적절히 제어할 수 없는 문제점이 나타났다. Tamamidis[10]는 격자간격 제어를 위해 distortion 함수를 미지수로 하는 Poisson 방정식을 제안하고 covariant Laplace 방정식과 함께 반복적으로 푸는 방법을 제안하였으나 직접적인 격자 간격 제어가 힘들었고, 계산시간이 늘어나는 단점이 있었다.

따라서 본 연구에서는 격자 간격제어를 포함한 직교 격자형성 방법을 제안하였다. 본 연구에서 사용한 방법은 근사 등각변환을 사용하는 Kwon의 선형화된 격자형성방법을 이용하였으며 기준격자간격을 정의하여 자동적으로 격자간격을 제어할 수 있도록 하였다.

2. 본론

2.1 격자 형성 방정식

본 연구에서 사용한 직교격자 형성을 위한 격자 형성방정식은 covariant Laplace 방정식이며 일반적인 3차원 curvilinear coordinate에서 다음과 같다[8].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(x_{\xi} \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(x_{\eta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(x_{\zeta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y_{\xi} \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(y_{\eta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(y_{\zeta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(z_{\xi} \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(z_{\eta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(z_{\zeta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 g_{ij} 는 covariant metric tensor 이며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} g_{11} &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \\ g_{22} &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} \\ g_{33} &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

위의 식 1)은 metric tensor들로 인해 강한 비선형성을 나타낸다. 초기에 Ryskin & Leal은 반복적인 방법을 이용하여 격자형성을 시도하였으나 수렴을 보장할 수 없었고, 계산시간이 오래 걸리는 단점이 있었다. 따라서 많은 연구자들([6], [7], [8])이 선형화된 격자형성방정식에 관심을 가지게 되었다.

2.2 격자 형성 방정식의 선형화

Jeong은 3차원에 대한 근사 등각변환이 존재한다고 가정하고 이 비선형 방정식을 선형화하는데 성공했다. 물리 영역 (x, y, z) 과 계산 영역 (ξ, η, ζ) 사이의 전체 변환 T_o 를 물리영역 (x, y, z) 과 보조 영역 (u, v, w) 사이의 근사 등각 변환 T_c 와 보조 영역 (u, v, w) 과 계산 영역 (ξ, η, ζ) 의 직교 변환 T_o' 의 합성으로 생각하면 (Fig. 1) T_o 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_o = T_c \cdot T_o' \tag{3}$$

근사 등각 변환에 대해서 distortion 함수가 1이라 가정하면

$$f = f_c \cdot f_o' = f_o' \tag{4}$$

따라서 격자 형성 방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\phi \left(\vec{r}_{\xi\xi} + \frac{\phi_\xi}{\phi} \vec{r}_\xi \right) + \psi \left(\vec{r}_{\eta\eta} + \frac{\psi_\eta}{\psi} \vec{r}_\eta \right) + \omega \left(\vec{r}_{\xi\xi} + \frac{\omega_\xi}{\omega} \vec{r}_\xi \right) = 0$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{(u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2)(u_\xi^2 + v_\xi^2 + w_\xi^2)}{u_\xi^2 + v_\xi^2 + w_\xi^2}} \\ \psi &= \sqrt{\frac{(u_\xi^2 + v_\xi^2 + w_\xi^2)(u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2)}{u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2}} \\ \omega &= \sqrt{\frac{(u_\xi^2 + v_\xi^2 + w_\xi^2)(u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2)}{u_\xi^2 + v_\xi^2 + w_\xi^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

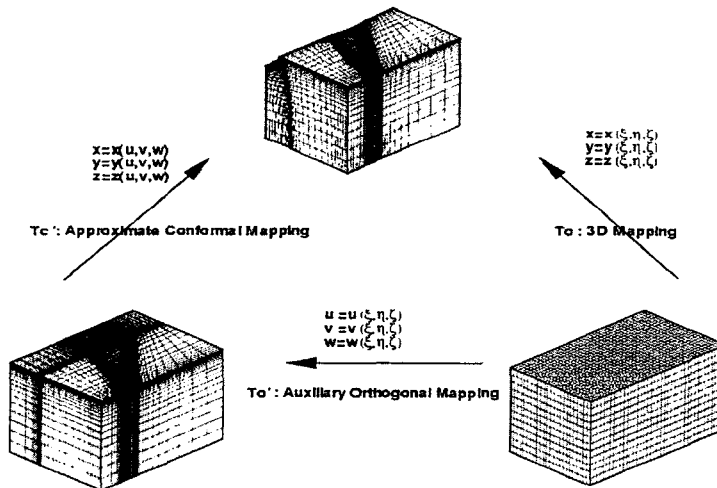


Fig.1 Decomposition of 3-D Mapping into an approximate conformal mapping and an auxiliary orthogonal mapping

이 때 직교 격자를 얻기 위해서는 등각 변환을 만족하는 (x, y, z) 와 (u, v, w) 의 관계를 알아야 한다. Kang은 BEM을 이용하여 2차원에서 (u, v) 를 구했으며 Jeong은 Kang의 방법을 3차원으로 확장하였다. 이들의 방법은 정확한 보조 영역을 구할 수 있다는 장점이 있으나 BEM을 사용함으로써 과도한 계산 시간을 소모하였다. 본 연구에서는 Kwon이 제안한 2차원 근사 등각 변환을 이용하여 3차원 (u, v, w) 를 근사적으로 구하였다.

2.3 격자 간격 제어

covariant Laplace 방정식을 이용하여 격자를 형성하는 경우 형상이 급변하는 곳에서 격자 간격이 벌어지는 경우가 발생한다[11]. 그 이유는 격자 형성 방정식을 유도하는 과정에서 직교성을 확보하기 위해 $g_{ij}=0, (i \neq j)$ 라는 구속조건을 가하기 때문이다. 따라서 격자선은 포텐셜 유동에서 유선과 등포텐셜선의 성질을 가지게 되어 서로 직교하지만 모서리 부근에서 유선이 벌어지듯이 격자선도 벌어지게 된다. 이런 경우는 수치해석시 치명적인 약점이 될 수 있으므로 격자 간격을 제어하는 방법을 연구하였다.

Leal은 distortion 함수 f 가 물리영역에서의 격자의 가로 세로비를 의미한다는데 착안하여 격자 간격을 제어할 수 있음을 시사했다. 그가 주장한 조건은 distortion 함수가 항상 양수일 것과 또한 가능한 한 부드러운 분포를 가질 것이다. 따라서 경계에서 구한 distortion 함수 f 의 값을 이용하여 내삽법이나 또는 Dirichlet 경계 조건의 distortion 함수에 관한 편미분 방정식을 푸는 방법 등으로 영역의 내부에서 distortion 함수를 구하는 방법을 제시하였다. 이를 이용한 방법이 Tamamidis의 방법이다. Tamamidis[10]는 f 에 관한 Poisson 방정식을 세우고 이와 격자 형성 방정식을 반복적으로 풀어서 직교 격자를 형성하는 방법을 제안하였다. 그러나 Tamamidis의 방법은 풀어야 할 편미분 방정식의 개수가 하나 더 늘어남으로써 계산량과 시간에서 많은 불이익을 받게 되었다. 또한 source 항을 결정하는 것이 지극히 임의적이므로 이를 일반화하는데 많은 문제가 있었다.

f 에 대한 조건이 $f > 0$ 과 "부드러운 분포를 가질 것" 뿐인 것은 보조 영역을 도입한 격자 형성의 관점에서 볼 때 충분하지 않은 것처럼 보인다. f 는 물리 영역과 등가 변환의 관계에 있는 보조 영역 (u, v) 에서 구해지는데 경계에서 정확한 값을 구한다고 하더라도 내부에서 (u, v) 가 직교하지 않으면 결과로 나타나는 격자는 직교성을 보장할 수 없게 된다. 즉 보조 영역에서 (u, v) 의 값에는 직교성의 제약 조건이 따르며 결과로 계산되는 f 도 임의적으로 결정될 수 없고 직교하는 (u, v) 의 제약 조건에 의해 결정되어야 한다. 따라서 $f > 0$ 과 "부드러운 분포를 가질 것"이라는 조건은 직교 격자를 형성함에 있어서 필요 조건은 되지만 그것만으로 충분 조건은 되지 않는다.

본 연구에서는 기준 격자 간격을 이용하여 격자 간격을 조절하고 보조 영역에서 (u, v) 가 harmonic conjugate의 관계에 있음을 착안하여 격자의 직교성을 보장하였다[12]. 원하는 격자 간격을 ds_{req} 라 하고 n 번째 반복 계산시의 격자 간격을 ds 라 하면 오차는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$err = \frac{ds_{req} - ds}{ds_{req}} \quad (7)$$

이 오차에 대해서 보조 영역의 (u, v) 를 보정해 주어야 한다. 본 연구에서는 다음과 같은 간단한 함수를 사용하여 보정을 해 주었다.

$$\delta v = const \times \sinh(err) + 1.0 \quad (8)$$

다수의 수치적인 실험에서 $const$ 의 값이 0.2이내일 때 전반적으로 안정적인 수렴성을 나타내었고, 만족할 만한 성과를 보였다.

형성된 격자의 직교성을 보장하기 위해서 (u, v) 영역에 대해서 각도를 보정해 주어야 한다. (u, v) 는 Cauchy-Riemann조건을 만족하는 harmonic conjugate의 관계에 있다. 따라서 이 관계를 이용하면 수정된 $v(\xi, \eta)$ 에 대해서 직교하는 $u(\xi, \eta)$ 를 구할 수 있다. 격자 간격을 제어하는 과정은 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

- 1) 물리 영역의 경계점 분포에 부합하는 보조 영역의 (u, v) 를 경계에서 구한다.
- 2) Transfinite Interpolation 등의 방법으로 내부의 영역에서 (u, v) 를 구한다.
- 3) 격자 형성 방정식을 풀어서 격자를 형성한다.
- 4) Reference Arc Length와 비교하여 $v(\xi, \eta)$ 를 수정한다.
- 5) 수정된 $v(\xi, \eta)$ 에 대해서 Harmonic Conjugate의 관계에 있는 $u(\xi, \eta)$ 를 구한다.
- 6) 3)번의 과정을 반복한다.

완성된 격자는 수번의 반복을 통해서 얻을 수 있으며 sub iteration으로 선형 격자 형성 방정식을 풀어서 격자를 형성하기 때문에 비선형 방정식에 비해서 아직도 쾌속성이라는 부분에 대해서는 큰 장점이 유지되고 있다.



3. 격자 형성 예

본 연구에서 제안한 방법으로 항공 역학적인 형상에 대해 격자를 형성하였다. 그림 2)는 NACA0012 C형 격자계이고 그림 3)은 실린더 주위의 H형 격자계이다. 초기에 물체 경계에서 많이 떨어져 있던 격자선들이 제어 후 물체경계 주위로 잘 밀집된 것을 볼 수 있다. 그림 4)-a는 RAE wing-body의 형상이고 그림 4)-b는 형성된 격자계이다. 전반적으로 직교성과 유연성 등이 잘 만족되고 있음을 알 수 있다.

표 1)은 형성된 격자의 MDO(Maximum Deviation from Orthogonality)와 ADO(Average Deviation from Orthogonality)를 나타낸 것이다. 전반적으로 양호한 직교성을 나타낸다. 표2)는 BEM을 사용한 Jeong의 계산 시간과 비교한 것이다. 근사한 등각 변환을 이용함으로써 적절한 직교성을 유지하면서도 약 8500여배 이상 계산 시간을 단축할 수 있었다.

	35 th	40 th	45 th
MDO	10.576	7.662	7.346
ADO	2.387	1.484	1.257

Table 1 RAE wing-body 격자의 MDO, ADO

	격자 수	계산시간	비고
Jeong	38 × 10 × 15	1310sec	CRAY C90
Present	81 × 49 × 25	5.58sec	Pentium-II

Table 2 계산 시간 비교

형성된 격자의 검증을 위해서 마하수 0.9 받음각 1.0도의 유동장을 해석해 보았다. 그림 5)는 동체 윗면의 압력 계수 분포이고 그림 6)은 각 날개 단면에서의 압력 계수 분포도이다. 계산에 사용된 격자수는 105×57×33×2개로 Jeong이 사용한 격자수의 58% 정도이지만 실험치와 전반적으로 일치하는 경향을 보이고 있어 본 방법으로 형성된 격자를 잘 검증해 주고 있다.

4. 결론

근사 등각 변환을 이용하는 선형 격자 형성 방정식을 사용하여서 직교 격자를 형성하였고, 격자선을 밀집시킬 수 있는 방법을 제안하였다. 또한 형성된 격자를 이용하여 실제 문제에 적용해 봄으로써 격자계를 검증하였다.

- 근사 등각 변환을 이용하여 적절한 격자의 질을 유지하면서도 격자 형성 시간을 획기적으로 단축하였다.
- 격자 간격을 제어하기 위해서 기준 격자를 도입하였고 보조 영역에서 제어된 격자의 직교성을 보정하였다.
- 형성된 격자를 이용하여 실제 문제에 적용해 봄으로써 본 방법으로 형성된 격자를 검증해 보았다.

참고문헌

[1] Joe F. Thompson, et al "Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations-A REVIEW" , J. of Comp. Physics 47 (1982) pp. 1-108
 [2] Joe F. Thompson, et al "A General Three-Dimensional Elliptic Grid Generation on a Composit Block Structure", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 64

- (1987) pp.377-411
- [3] R.L.Sorenson "A Computer Program to Generate Two-Dimensional Grids about Airfoils and other Shapes by the use of Poisson's Equation", NASA Technical Memorandum 81198, 1980
 - [4] Mobley & Stewart "On the Numerical Generation of Boundary-Fitted Orthogonal Curvilinear Coordinates Systems", J. of Comput. Physics, 34 (1980) pp.124-135
 - [5] Ryskin & Leal "Orthogonal Mapping", J. of Comput. Physics, 50 (1983) pp.71-100
 - [6] J.H.Kwon "Numerical Grid Generation for Cascade with and without Solution Adaption" Ph.D Thesis, Cornell Univ. 1986
 - [7] I.S.Kang and L.G.Leal "Orthogonal Grid Generation in a 2D Domain via the Boundary Integral technique", J. of Comput. Physics, 102 (1992) pp.78-87
 - [8] H.K.Jeong "A Three Dimensional Grid Generation Method For Nearly Orthogonal Grid Near Boundaries Using The Covariant Laplace Equations", CFD Journal 6-1 (1997) pp.111-128
 - [9] Kim, Jae Wook "A Study on 3-Dimensional Grid Generation using Linear Uncoupled Equations and Conformal Transformation", 석사 학위 논문, KAIST, 1999
 - [10] P. Tamamidis and D.N.Assanis "Generation of Orthogonal Grids with Control of Spacing", J. of Comput. Physics, 94 (1990) pp.437-453
 - [11] Lee, Sang Wook "선형 격자 형성 방정식을 이용한 직교 격자 형성에 관한 연구", 석사 학위 논문, KAIST, 2000
 - [12] Kwon, J. H. and Lee, S. W. "Orthogonal Grid Generation for Three-Dimensional Bodies Using the Covariant Laplace Equation with Control of Spacing", 7th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, (2000) Accepted to Publication

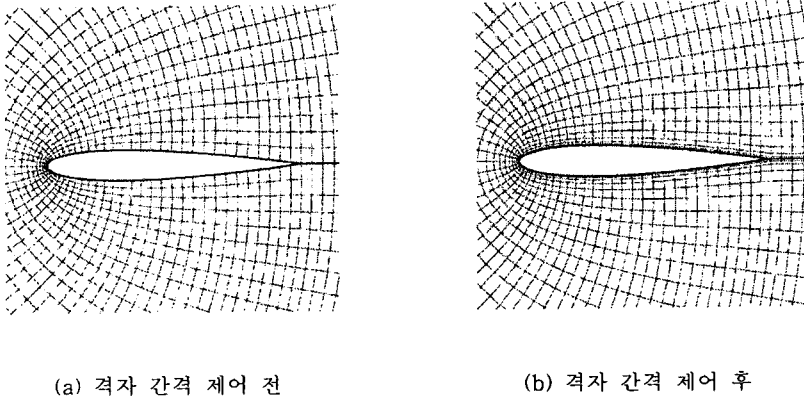


Fig. 2 : NACA0012에 대한 C형 격자계

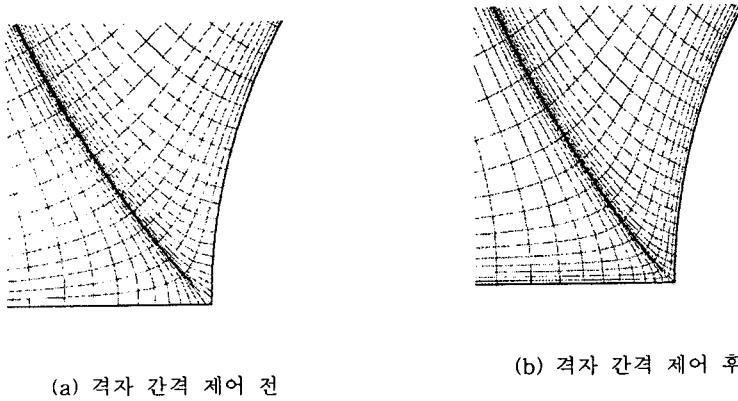


Fig. 3 실린더 주위의 격자계

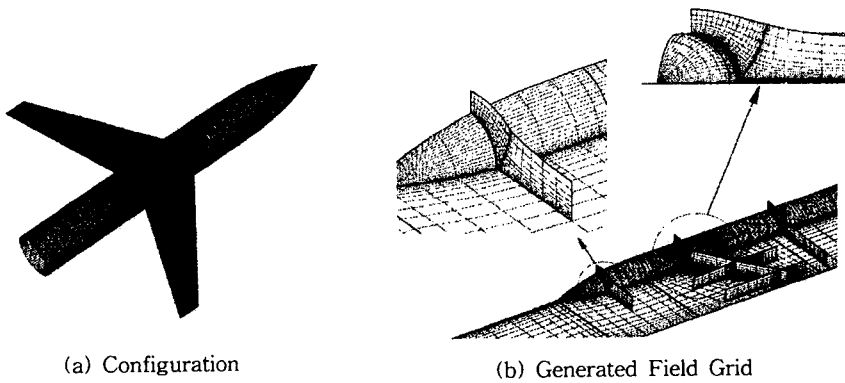


Fig. 4 RAE Wing-Body

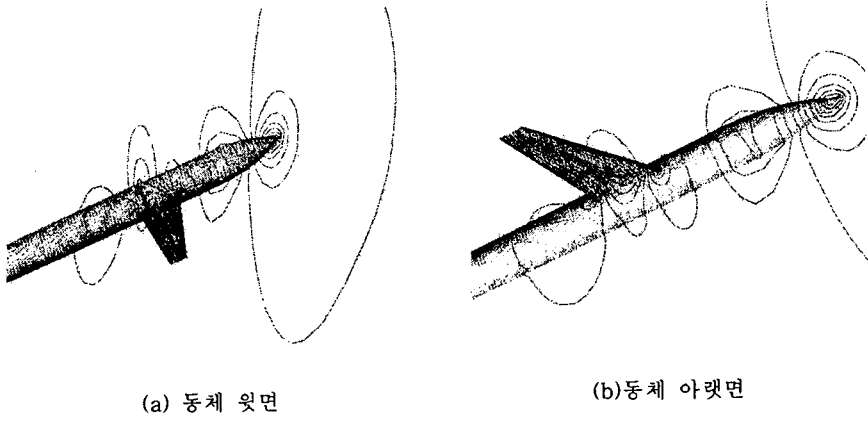


Fig.5 동체 주위의 압력 분포

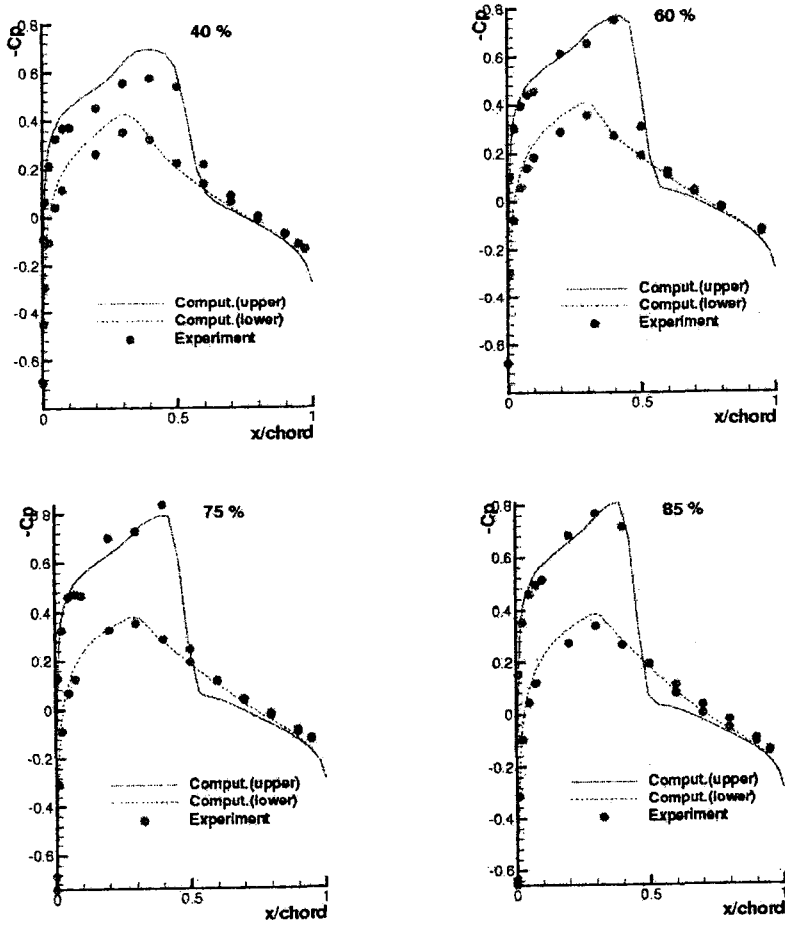


Fig. 6 날개 표면에서의 압력 계수