

## Sensitivity Analysis for the Navier-Stokes Equations with Two-Equation Turbulence Models

김 창성,\* 김 종암,† 노오현‡

### Abstract

Aerodynamic sensitivity analysis is performed for the Navier-Stokes equations coupled with two-equation turbulence models using a discrete adjoint method and a direct differentiation method respectively. Like the mean flow equations, the turbulence model equations are also hand-differentiated to accurately calculate the sensitivity derivatives of flow quantities with respect to design variables in turbulent viscous flows. Both the direct differentiation code and the adjoint variable code adopt the same time integration scheme with the flow solver to efficiently solve the differentiated equations. The sensitivity codes are then compared with the flow solver in terms of solution accuracy, computing time and computer memory requirements. The sensitivity derivatives obtained from the sensitivity codes with different turbulence models are compared with each other. Using two-equation turbulence models, it is observed that a usual assumption of constant turbulent eddy viscosity in adjoint methods may lead to seriously inaccurate results in highly turbulent flows.

### 연구배경

컴퓨터 성능의 발달과 함께 전산유체역학(CFD)을 이용한 최적화 설계기법이 공력설계에 많이 적용되고 있다. 실제적인 설계과정에 앞서 최소화될 목적함수에 사용될 양력, 항력, 피칭모멘트 등의 공력계수 분포를 정확하고 효율적으로 구할 수 있는 유동해석 코드의 개발이 선행되어야 한다. 이제까지의 공력설계에서는 설계변수의 미분계수는 유한 차분법으로 구해져 왔으나, 복잡한 2차원 문제나 3차원 문제의 경우 설계변수의 증분값으로 매번 반복적으로 유동장을 해석하는 것은 계산시간 면이나 비용면에서 매우 비효율적일 수 있다. 더구나 이 방법은 설계변수의 증분값에 매우 민감하고 종종 부정확한 미분값을 예측한다고 알려져 있다.<sup>1, 2</sup> 그러므로, 매개변수(adjoint variable)법과 직접미분(direct differentiation)법과 같은 보다 강건한 기법들이 제안되어 사용되고 있다.<sup>2-10</sup> 직접미분법은 설계변수의 수가 목적함수나 제약조건의 수보다 작을 때 유용한 방법으로 유동방정식의 이산화된 형태를 사용한다. 반면에, 매개변수법은 설계변수의 수가 목적함수나 제약조건의 수보다 많을 때 유용한 방법으로 일반적인 공력설계에서 많이 사용되는 방법이다. 매개변수법의 경우 연속적인 방법(continuous approach)과 이산화 방법(discrete approach)으로 처리되는 데, 연속적인 방법은 유동방정식을 먼저 미분하고 그 미분 방정식을 다시

이산화하는 방법이고, 이산화 방법은 이산화된 유동방정식을 설계변수에 대해 미분하는 방법으로 본 연구에서는 후자의 방법을 택하였다.<sup>7, 8</sup>

높은 레이놀즈수 유동을 정확하게 해석하기 위해서는 지배방정식을 미분할 때 난류의 영향을 반드시 고려할 필요가 있으나, 이것은 점성항 뿐만 아니라 난류 모델까지 포함한 지배방정식 전체를 미분하는 일은 매우 어렵고 고통스러운 일이 아닐 수 없다. 그래서 자동미분(automatic differentiation)과 같은 몇 가지 프로그램을 사용하여 난류모델이 포함된 Navier-Stokes 방정식 미분에 사용되고 있다.<sup>5, 6, 9</sup> 그러나, 이 방법은 프로그래머가 직접 미분하는 방법보다 계산시간이나 컴퓨터 메모리 측면에서 일반적으로 효율성이 낮다고 알려져 있다.<sup>5, 10</sup>

본 연구에서는 2-방정식 난류모델을 결합한 Navier-Stokes 방정식을 난류모델 방정식까지 완전하게 손으로 미분(hand-differentiation)하여 각 설계변수의 미분계수값들을 구하였다. 최근의 2-방정식 난류 모델들 중,  $k-\omega$  SST 모델[13,14]이 주로 사용되었으며, 원래의  $k-\omega$  모델[11,12]과 표준  $k-\epsilon$  모델[14]의 결과와도 비교하였다. 평균유동방정식과 같이 난류 모델 방정식도 함께 미분함으로써 난류 유동장에서의 설계변수의 미분계수값들을 정밀하게 구하였다. 각각 매개변수법과 직접미분법을 사용한 두개의 민감도 해석코드를

\* 서울대학교 항공우주공학과

† 서울대학교 항공우주공학과 조교수

‡ 서울대학교 항공우주공학과 교수

개발하여 난류 유동의 민감도해석에 적용하였다. 본 연구에서 개발된 직접미분법을 이용한 코드(ASADD)와 매개변수법을 이용한 코드(ASAAV)는 RAE 2822 익형 주위 천음속 난류 유동의 민감도 해석을 통해 검증되었다. 이 민감도 해석코드로부터의 유동설계변수와 기하학적인 형상설계변수의 미분 계수값은 유한 차분법의 결과와 비교 검증되었다.

매개변수법의 경우 지금까지의 실제적인 공력 최적설계에서는 난류의 영향을 고려하지 않고 난류점성계수를 일정(frozen)하게 가정하여 민감도 해석을 수행해 왔다.<sup>7, 8</sup> 최근에, 난류유동의 민감도 해석에 있어 비정렬 격자계에서 1-방정식 난류모델을 적용하여 이 가정의 정확도에 대한 논문이 발표된 바 있다.<sup>9</sup> 국내에서도<sup>10</sup> 대수적 난류모델을 사용하여 이 가정의 정확도가 검토되었다. <sup>10</sup> 본 연구에서는 NACA 4412 익형 주위 저속 유동장, RAE 2822 주위 아음속 유동장, RAE 2822 주위 천음속 난류 유동장과 같이 좀더 다양한 경우에 적용하여 이 가정의 정확성을 검토하였다.

수치 기법

지배방정식과 난류모델

지배방정식은  $k-\omega$  SST 난류 방정식을 결합한 2차원, 비정상, 압축성 Navier-Stokes 방정식이며 다음과 같이 보존형 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho E u_j) = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}[u_j \tau_{ij} - q_j] \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \omega u_j) = \frac{\gamma}{v_T} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(i - F_1) \rho \sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

지배방정식은 일반 좌표계로 전환되어 유한 체적법으로 해가 구해진다. 후방 Euler 내재적 기법을 통해, 지배방정식은 다음과 같은 형식으로 시간에 대해 이산화된다.

$$\left( \frac{I}{J \Delta t} + \left[ \frac{\partial R}{\partial Q} \right]^n \right) \Delta Q = -R^n \quad (6)$$

여기서  $J$ 는 좌표변환 Jacobian을,  $R$ 은 정상상태의 residual을, 그리고  $Q$ 는 6개의 보존변수

벡터  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho e, \rho k, \rho \omega)^T$ 를 나타낸다.

공간차분을 위해 대류항은 Roe's FDS 기법[17]을 기본으로 한 풍상 차분법을, 점성항은 중간 차분법을 적용하였다. 고차의 공간 정확도를 얻기 위해 MUSCL(Monotone Upstream Centered Scheme for Conservation Laws) 기법[18]을 적용하였다. 시간적분에는 Eq. (6)을 효율적으로 풀기 위해 LU-SGS 기법[19]이 적용되었다. 벽면조건에는 점착조건이 주어졌고, 전방조건과 후방조건에는 1차원 Riemann 불변량을 기본으로 한 특성조건이 적용되었다. Chimera 격자계의 hole-cutting 경계에는 bilinear interpolation이 적용되었다.<sup>16</sup>

민감도 해석

정상상태의 유동방정식의 residual은,  $Q, X, D$ 의 함수이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{R\} = \{R(Q, X, D)\} = \{0\} \quad (7)$$

여기서  $X$ 는 수치 격자계 위치를,  $D$ 는 설계변수 벡터를 나타낸다. 마찬가지로 최소화 또는 최대화될 공기역학적 목적함수  $F$ 도 다음과 같이 표현된다.

$$\{F\} = \{F(Q, X, D)\} \quad (8)$$

첫번째 방법인 직접 미분법에서는, 목적함수의 민감도 구매값이 Eq. (7)과 (8)을 설계변수 벡터  $D$ 에 대해 직접 미분함으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left\{ \frac{dR}{dD} \right\} = \left[ \frac{\partial R}{\partial Q} \right] \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\} + \left[ \frac{\partial R}{\partial X} \right] \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial D} \right\} = \{0\} \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{dF}{dD} \right\} = \left[ \frac{\partial F}{\partial Q} \right]^T \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\} + \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right]^T \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} \quad (10)$$

기하학적 민감도 벡터  $\{dX/dD\}$ 는 격자생성 코드를 미분함으로써 구할 수 있으나 본 연구에서는 편의상 유한 차분법을 적용하여  $\{dX/dD\}$ 를 구하였다. 최종적인 수치해 벡터  $\{dQ/dD\}$ 는 Eq.(6)과 같은 방법으로 다음과 같이 표현된다.

$$\left( \frac{I}{J \Delta t} + \left[ \frac{\partial R}{\partial Q} \right] \right) \Delta \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\} = - \left\{ \frac{dR}{dD} \right\}^m \quad (11)$$

$$\left\{ \frac{dQ}{dD} \right\}^{m+1} = \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\}^m + \Delta \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\}$$

여기서 플렉스 Jacobian  $[\partial R / \partial Q]$ 은 유동해석 코드의 정상해로부터 구해진다. 이 방정식은 LU-SGS 기법을 적용함으로써 유동해석 코드에서와 같이 효율적으로

해를 구할 수 있다. Chimera 격자기법의 hole-cutting 경계를 포함한 모든 경계조건은 유동해석 코드의 경계조건을 직접 미분함으로써 구할 수 있다.

두번째 방법인 매개변수법은 Eq. (9)와 (10)을 조합함으로써 목적함수의 민감도 구배값을 구할 수 있다

$$\left\{ \frac{dF}{dD} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}^T \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial X} \right\}^T \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} + \Lambda^T \left( \left\{ \frac{\partial R}{\partial Q} \right\} \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\} \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial D} \right\} \right) \quad (12)$$

여기서  $\Lambda$ 는 보존변수 벡터  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho e, \rho k, \rho \omega)^T$ 에 대응하는 Lagrangian multipliers  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T$ 를 나타낸다. 위 식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\left\{ \frac{dF}{dD} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial X} \right\}^T \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} + \Lambda^T \left( \left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\} \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial D} \right\} \right) + \left( \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}^T + \Lambda^T \left\{ \frac{\partial R}{\partial Q} \right\} \right) \left\{ \frac{dQ}{dD} \right\} \quad (13)$$

만약 위의 벡터  $\Lambda$ 가 아래의 Eq.(15)를 만족한다면  $\{dQ/dD\}$ 를 계산할 필요 없이 목적함수의 민감도 구배값을 계산할 수 있다.

$$\left\{ \frac{dF}{dD} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial X} \right\}^T \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} + \Lambda^T \left( \left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\} \left\{ \frac{dX}{dD} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial D} \right\} \right) \quad (14)$$

$$\left\{ \frac{\partial R}{\partial Q} \right\}^T \Lambda + \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\} = \{0\}^T \quad (15)$$

Eq. (15)의 수치해 벡터인  $\Lambda$ 를 구하기 위해서 다음과 같은 pseudo time을 도입하여 해를 구한다.

$$\left( \frac{I}{\Delta\tau} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial Q} \right\}^T \right) \Delta\Lambda = - \left\{ \frac{\partial R}{\partial Q} \right\}^T \Lambda^m - \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}^T \quad (16)$$

$$\Lambda^{m+1} = \Lambda^m + \Delta\Lambda$$

Eq. (16)의 우변항에 있는 플렉스 Jacobian  $\{ \partial R / \partial Q \}^T$ 는 매우 큰 행렬로서 많은 컴퓨터 메모리를 요구한다. 본 연구에서는 매개변수  $\Lambda$ 의 각 요소를  $\{ \partial R / \partial Q \}^T$ 의 해당 요소에 곱함으로써 이 메모리를 줄일 수 있도록 하였다. 이 방법은 매 반복계산마다  $\{ \partial R / \partial Q \}^T$ 를 계산해야 하지만 복잡한 2차원 문제나 3차원 문제에 적용할 경우에는 요구되는 메모리 크기를 현저히 줄일 수 있다.<sup>2,5,10</sup>

### 수치 계산 결과

#### 직접미분법(DD: Direct Differentiation Method)

DD 코드를 검증하기 위해 마하수 0.73, 레이놀즈수  $6.5 \times 10^6$ , 받음각  $2.79^\circ$ 의 유동 조건에서 RAE 2822 천음속 익형을 테스트하였으며, 첫번째 격자간격이  $1 \times 10^{-5}$ 인  $129 \times 65$  크기의 격자계를 사용하였다.  $k-\omega$  SST 모델[13,14]로 계산된 표면 압력 계수들은  $k-\omega$  모델[11,12], standard  $k-\epsilon$  모델[14]로 계산된 결과, 그리고 실험 결과[20]와 그림 1에서 비교하였다. DD 코드에 의한 계산결과와 유한 차분법에 의한 미분값이 일치함을 유동 설계변수와 형상 설계변수 두 가지 경우에 대해 검증하였다.

첫번째 경우, 받음각  $\alpha$ 를 설계변수로 잡았다. 양력, 항력, 피칭 모멘트 등 공기역학적 하중 계수의 미분값들도 같은 방법으로 Table 1에서 유한 차분에 의한 미분값과 비교하였다. 증분량의 크기(step size)는 각각  $1 \times 10^{-5}$  과  $1 \times 10^{-7}$ 로 선택했으며, 유한 차분의 미분값은 중심 차분법으로 계산하였다. 두 증분량 크기에 의한 미분값들은 직접 미분에 의한 결과와 일치하였다.

Table 1. Sensitivity derivatives of load coefficients with respect to angle of attack.

$\alpha$	FD ( $\Delta\alpha=10^{-5}$ )	FD ( $\Delta\alpha=10^{-7}$ )	DD
$C_L$	8.741617	8.7416	8.7416
$C_D$	0.593011	0.5929	0.5929
$C_M$	0.0022918	0.00229	0.00230

두번째 경우, 형상 변화는 다음과 같이 Hicks-Henne function으로 주어졌다.

$$F(x) = \sin^3 \left( \pi x \frac{\ln 0.5 / \ln 0.6}{\ln 0.6} \right) \quad (22)$$

그리고 익형의 위쪽 표면 형상을 Eq.(22)를 이용하여 다음과 같이 바꾸었다.

$$y = y_0 + \beta F(x) \quad (23)$$

여기서  $y_0$ 는 원래 형상을 나타내며,  $\beta$ 는 형상 디자인 변수이다.

첫번째 경우, 양력, 항력, 피칭 모멘트 계수의 미분값은 Table 2에서 유한차분의 미분값과 비교하였다. 두 증분량  $1 \times 10^{-6}$  과  $1 \times 10^{-7}$  에 의한 유한차분 미분값은 중심 차분법으로 계산되었다. 첫번째 경우와는 달리 차분이 다소 증분량의 크기에 민감하여,  $1 \times 10^{-7}$  의 변량에서만 DD코드의 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다. 이 후, 본 논문에서는  $1 \times 10^{-7}$  의 변량에서만 유한 차분 값을 계산하였다.

Table 2. Sensitivity derivatives of load coefficients with respect to geometric change.

$\beta$	FD ( $\Delta\beta = 10^{-5}$ )	FD ( $\Delta\beta = 10^{-7}$ )	DD
$C_L$	10.20000	10.230	10.238
$C_D$	-0.165799	-0.1659	-0.1645
$C_M$	-2.795491	-2.7955	-2.8034

매개 변수 미분법(AV: Adjoint Variable Method)

AV 코드의 검증을 위해 DD 코드와 같은 유동 조건에서의 RAE 2822 익형을 사용하였다. 양력 계수의 민감도 계산은 자유류의 마하수, 받음각 그리고 식(23)으로 주어진 형상 변화에 대한 미분값으로 계산하였다. AV 코드에 대한 민감도 미분값은 DD 코드, 유한차분에 의한 두 계산 값과 비교하여 Table 3에 나타내었다. AV 코드에 의한 미분값은 DD 코드에 의한 미분값과 일치함을 볼 수 있다.

Table 3. Sensitivity derivatives of lift coefficient.

$\frac{\partial C_L}{\partial D}$	FD	DD	AV
$M_\infty$	2.3110	2.3110	2.3110
$\alpha$	8.7416	8.7416	8.7416
$\beta$	10.230	10.238	10.238

두 번째 경우, 항력 계수의 민감도 미분값을 자유류의 마하수, 받음각, 형상변화에 대해 계산하였다. Table 4에서 AV코드의 결과를 유한 차분법과 DD 코드의 결과와 비교하였다. 항력 계수의 미분 값이 서로 아주 잘 일치함을 확인할 수 있다.

Table 4. Sensitivity derivatives for drag coefficient.

$\frac{\partial C_D}{\partial D}$	FD	DD	AV
$M_\infty$	0.4573	0.4573	0.4573
$\alpha$	0.5929	0.5929	0.5929
$\beta$	-0.1659	-0.1645	-0.1646

그림 2에서 민감도 해석 코드의 수렴 곡선을

유동해석 코드와 비교하였다. 유동해석 코드와 민감도 해석코드 모두 컴퓨터 오차 한계까지 수렴 시켰다. DD코드는 유동 해석 코드의 수렴 곡선과 거의 유사한 형태를 보여준다. 이전에도 언급한 바와 같이, 컴퓨터 메모리의 문제로 식(16)의 매개변수 벡터  $\Lambda$  의 각 원소들이 그에 해당하는  $[\partial R / \partial Q]^T$  의 요소들에 곱해진 형태로 계산 되었다. 이와 같이, AV 코드는 모든 반복 계산 마다  $[\partial R / \partial Q]^T$  를 다시 계산하는 추가 시간이 소요된다. 계산 시간의 경우, DD코드는 유동 해석 코드의 약 1.4배 정도의 계산 시간이 소요됨에 비해, AV 코드는 약 4.8배 정도의 계산 시간이 걸린다. 메모리 사용량은 유동해석 코드에 대해 DD 코드가 9배정도 인에 비해, AV 코드가 약2.3배 정도 많이 사용한다.

난류 모델의 효과

난류 모델의 효과에 대해 조사하기 위해, Table 5에서  $k-\omega$  SST 모델로 계산된 미분값을 앞 절에서와 같은 유동 조건에서 표준  $k-\epsilon$  모델과  $k-\omega$  모델의 결과와 비교하였다. 각 난류 모델에 대해서 AV 코드로 얻어진 미분값이 DD 코드의 결과와 일치함을 볼 수 있다.

Table 5 Effects of turbulence models on sensitivity derivatives.

	$\frac{\partial C_L}{\partial D}$	DD	AV
$k-\omega$	$\alpha$	8.7416	8.7416
	$\beta$	10.238	10.238
SST	$\alpha$	10.227	10.227
	$\beta$	7.7078	7.7078
$k-\epsilon$	$\alpha$	8.9427	8.9427
	$\beta$	2.6211	2.6211

그러나,  $k-\omega$  모델로 계산한 형상 변수  $\beta$  에 대한 미분 값이 다른 두 모델로 계산된 결과와 상당히 다를 수 있다. 이는 그림 1에서 보여지듯  $k-\omega$  모델에 의해 나타난 충격파의 위치가 다른 두 모델로 계산되어진 것과 다르며, 강한 충격파가 발달한 위치에 형상 변화가 주어진다는 점에서 그 원인을 찾을 수 있다. 단일 익형과 다중 요소 익형에서 공력계수 예측에 대한 난류모델의 효과는 참고문헌 16에 잘 나타나 있다.

일정 난류 점성계수(constant eddy viscosity) 가정의 타당성 연구

1- 또는 2-방정식 난류모델의 미분은 난류 생성항과 소산항과 같은 복잡한 항들 때문에 계산이 매우 어렵다. 난류모델 방정식의 미분값을 얻기 위한 노력을 줄이기 위해, 매개 변수법에서 난류 점성 계수  $\mu_T$  를 종중 상수로 가정한다.<sup>7, 8</sup> 다시 말하면, 난류 점성 계수의 보존 변수  $Q$  에 대한 미분 값은 0으로 한다. 이 가정을 함으로써 Eq.(16)에서 난류 방정식 계산을 하지 않아도

되므로, 계산 시간을 단축 시킬 수 있다. 그러나, 이 가정은 난류모델의 유동해석에 대한 영향을 무시하므로 미분값의 정확성이 결여되는 문제가 발생할 수 있다.<sup>2,10</sup> 이 가정을 보다 세밀히 조사해 보기 위해,  $k-\omega$  SST 모델을 이용하여 점성 계수의 미분 값을 0으로 가정할 경우와 그렇지 않을 경우 모두에 적용하여 다음과 같은 3가지의 서로 다른 유동 조건에서 AV 코드로 계산한 미분 값들을 비교해 보았다: NACA 4412 익형 주위의 저속 아음속 유동, RAE 2822 익형 주위의 아음속 유동, RAE 2822 익형 주위의 천음속 난류 유동.

NACA 4412 익형에 대해, 자유류 마하수 0.3, 레이놀즈수  $2.5 \times 10^6$ , 그리고 받음각  $2.0^\circ$ 의 유동 조건이 주어졌다. Table 6에서 볼 수 있듯이 난류 점성계수를 상수로 가정한 민감도 미분계산에서는 DD 코드, 완전한 AV 코드( $\partial \mu_T / \partial Q \neq 0$ )에서의 계산 결과와 약간 다르게 나타났다. 받음각  $\alpha$ 를 디자인 변수로 사용할 경우, 그 편차가 약 2% 보다 작게 나왔으며, 형상 변수  $\beta$ 의 경우 약 9에서 13%정도로 계산되었다.

Table 6. Sensitivity derivatives of load coefficients for NACA 4412 airfoil.  
( $M=0.3, Re=2.51$ million,  $2.0\text{deg}$ )

	DD	AV	AV ( $\mu_T = \text{const.}$ )
$\frac{dC_L}{d\alpha}$	6.3948	6.3948	6.2855
$\frac{dC_L}{d\beta}$	2.3252	2.3252	2.5451
$\frac{dC_D}{d\alpha}$	0.0544	0.0544	0.0535
$\frac{dC_D}{d\beta}$	0.0388	0.0388	0.0337

그러나, Table 7에서 명확히 볼 수 있듯이, 이 가정은 강한 충격파가 생기는 난류 유동에서는 훨씬 더 심각한 차이를 나타내고 있다. RAE 2822 익형 윗 표면에 강한 충격파가 발달하는 자유류 마하수가 0.73인 조건의 경우, 받음각을 설계변수로 사용하면, 그 오차는 약 20에서 50%까지, 형상변수에 대해서는 약 35에서 65%까지 이르게 된다.  $k-\omega$  SST 모델과 거의 흡사하게, 표준  $k-\epsilon$  모델과  $k-\omega$  모델에 대해서도 난류 점성 계수를 일정하게 가정하면, 유사한 결과가 나타남을 확인할 수 있다.

Table 7 Sensitivity derivatives of lift coefficient for RAE 2822 airfoil.  
( $Re=6.5$ million,  $\alpha=2.79\text{deg}$ )

	$M_\infty$	$\frac{\partial C_L}{\partial D}$	AV	AV ( $\mu_T = \text{const.}$ )
$k-\omega$ SST	0.63	$\alpha$	8.6373	8.3706

		$\beta$	3.5869	3.6923
		0.73	$\alpha$	8.7416
$k-\epsilon$	0.73	$\beta$	10.238	13.875
		$\alpha$	10.227	7.4277
$k-\omega$	0.73	$\beta$	7.7078	9.7723
		$\alpha$	8.9427	7.3045
		$\beta$	2.6211	1.9089

난류 점성 계수  $\mu_T$ 는 Eq.(2)와 (3)의 지배 방정식에서 보듯이 층류 점성계수  $\mu$ 와 더해져 방정식에 대입된다. 그림 3에서 난류 점성계수가 일정하다는 가정의 효과를 보기 위해, 자유류 마하수 0.73에서 밀도에 대한 층류 점성계수와 전체 점성계수(층류+난류)의 미분값을 같은 범위의 등치선으로 나타내었다. 그림 3(b)에서 보듯이, 난류 점성계수의 미분은 경계층에서 큰 값을 가지며, 충격파 뒤의 후방류의 역압력 구배에서 훨씬 더 큰 값을 가진다. 이와 같이 이 가정은 아주 큰 값의 난류 점성계수 미분값을 무시 함으로써, 심각한 오차를 발생 시킬 수 있음을 알 수 있다. 특히, 공력 계수값의 변화에 직접적인 영향을 미치는 충격파 뒤의 후방류에서 그 오차가 커짐을 알 수 있다. 그러므로 난류의 영향은 난류 효과가 큰, 특히 강한 충격파가 생기는 유동에서는 계산의 정확성을 높이기 위해 반드시 고려되어야 한다.

## 결론

2-방정식 난류모델을 결합한 Navier-Stokes 방정식의 민감도 해석이 직접미분(direct differentiation)법과 매개변수(adjoint variable)법을 이용하여 각각 수행되었다. 세 가지의 2-방정식 난류모델이 적용되었으며, 평균유동 방정식과 같이 난류모델 방정식도 동시에 미분되어졌다. 다양한 수치계산을 통해, 직접 미분법과 매개 변수법을 사용한 경우의 민감도 구배값을 비교하여 서로 잘 일치함을 확인하였다. 2-방정식 난류 모델을 적용하여 매개 변수법으로 민감도 해석을 할 경우, 난류 점성계수를 일정하게 하는 가정이 강한 충격파가 있는 난류 유동장에서는 심각한 오차를 보일 수 있음을 확인하였다. 직접 미분법과 매개 변수법을 적용한 두 개의 민감도 해석 코드는 공력계수의 구배값을 동일하게 예측하는 정확성을 보였으며 향후 과제로서 공력 최적화설계에 직접 적용될 것이다.

## 참고 문헌

- 1) Eyi, S., and Lee, K. D., "Effect of Sensitivity Calculation on Navier-Stokes Design Optimization," AIAA 94-0060, Jan. 1994.
- 2) Nielson, E. J., and Anderson, W. K., "Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Meshes Using the Navier-Stokes Equations," AIAA 98-4809, Jan. 1998.
- 3) Eleshaky, M. E., and Baysal, O., "Aerodynamic Shape Optimization Using Sensitivity Analysis on Viscous Flow Equations," Journal of Fluid Engineering, Vol. 115, No.3, 1993, pp. 75-84.



- 4) Ajmani, K., and Taylor, A. C. III, "Discrete Sensitivity Derivatives of the Navier-Stokes Equations with a Parallel Krylov Solver," AIAA 94-0091, Jan. 1994.
- 5) Sherman, L. L., Taylor, A. C. III, Green, L. L., Newman, P. A., Hou, G. J., and Korivi, V. M., "First- and Second-Order Aerodynamic Sensitivity Derivatives via Automatic Differentiation with Incremental Iterative Methods," AIAA-94-4262-CP, Sep. 1994.
- 6) Mohammadi, B., "Optimal shape Design, Reverse Mode of Automatic Differentiation and Turbulence," AIAA 97-0099, Jan. 1997.
- 7) Jameson, A., Pierce, N. A., and Martinelli, L., "Optimum Aerodynamic Design Using the Navier-Stokes Equations," AIAA 97-0101, Jan. 1997.
- 8) Soemarwoto, B. I., "The Variational Method for Aerodynamic Optimization Using the Navier-Stokes Equations," NASA/CR-97-206277, ICASE Report No. 97-71, Dec. 1997.
- 9) Taylor, A. C. III, and Osolo, A., "Aerodynamic Design Sensitivities By Automatic Differentiation," AIAA 98-2536, June 1998.
- 10) Kim, H. J., Kim, C. A., Rho, O. H., and Lee, K. D., "Aerodynamic Sensitivity Analysis For Navier-Stokes Equations," AIAA 99-0402, Jan. 1999.
- 11) Wilcox, D. C., "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 11, 1988, pp. 1299-1310.
- 12) Wilcox, D. C., "Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 2, Feb. 1994, pp. 247-255.
- 13) Menter, F. R., "Influence of Freestream Values on the  $k-\omega$  Turbulence Model Predictions," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 6, August 1992, pp. 1651-1659.
- 14) Menter, F. R., "Two-Equation Eddy-Viscosity turbulence Models for Engineering Applications," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, August 1994, pp. 1598-1605.
- 15) Steger, J. L., Doughty, F. C., and Beneck, J. A., "A Chimera Grid Scheme," *Advances in Grid Generation, FED*, Vol. 5, ASME, Edited by Ghia, K. N., New York, 1983, pp. 59-69.
- 16) Kim, C. S., Kim, C., and Rho, O. H., "Parallel Computations of High-Lift Airfoil Flows Using Two-Equation Turbulence Models," approved for publication in *AIAA Journal*, 2000.
- 17) Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.43, 1983, pp.357-372.
- 18) Hwang, S. W., "Numerical Analysis of Unsteady Supersonic Flow over Double Cavity," Ph.D. Dissertation, Seoul Nat'l Univ, Seoul, Korea, 1996.
- 19) Yoon, S., and Kwak, D., "Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Solver Using Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Algorithm," *AIAA Journal*, Vol. 29, June 1991, pp. 874-875.
- 20) Cook, P. H., McDonald, M. A., and Firmin, M. C. P., "Aerofoil RAE 2822 - Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements," AGARD AR 138, May 1979, A6-1 to A6-77.

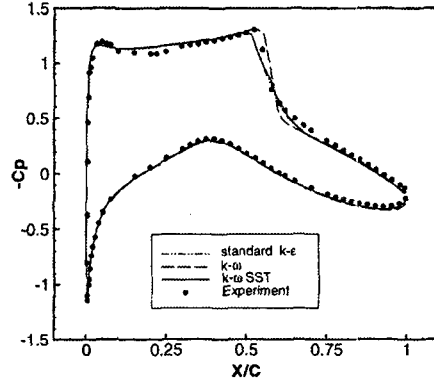


Fig. 1 Surface pressure coefficients over the RAE 2822 airfoil at  $\alpha=2.79$  deg,  $M=0.73$ , and  $Re=6.5$  million.

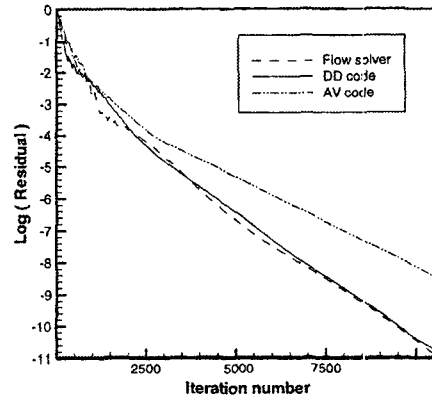
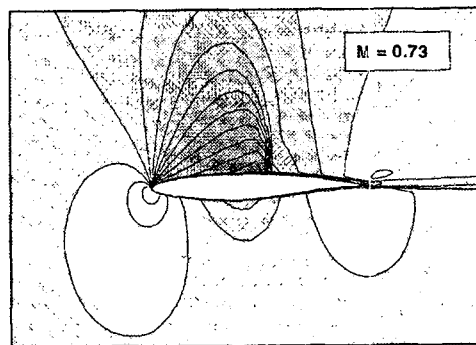
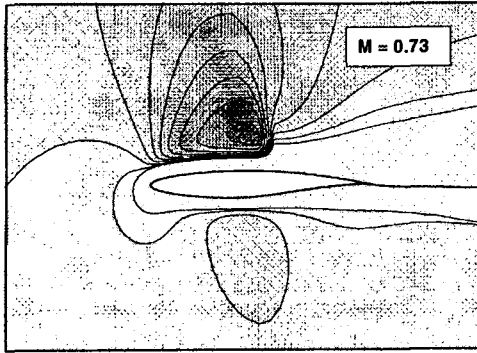


Fig. 2 Convergence history of the sensitivity analysis codes.



(a)  $\partial\mu_L/\partial\rho$  contour :  $\partial\mu_T/\partial\rho = 0$  assumed.



(b)  $\partial(\mu_L + \mu_T)/\partial\rho$  contour

**Fig. 3** Effects of constant turbulent eddy viscosity assumption.