

Gauss Newton Variable Forgetting Factor Recursive Least Squares

알고리즘을 이용한 시변 신호 추정

송성욱*, 임준석**, 성평모*

*서울대학교 전기공학부, **세종대학교 전자공학과

Gauss Newton Variable Forgetting Factor RLS algorithm

for Time Varying Parameter Estimation.

Seongwook Song*, Jun-Seok Lim**, Koeng-Mo Sung*

*School of Electrical Engineering, Seoul National University

**Department of Electronics Eng., Sejong University

요 약

시변 신호 추적 특성을 향상시키기 위하여, Gauss-Newton Variable Forgetting Factor RLS (GN-VFF-RLS) Algorithm 을 제안한다. 최적화된 망각인자를 가정한 기존의 RLS 알고리즘과 비교하여, 제안된 방법은 특히 신호의 변화가 급격히 일어날 경우 주목할만한 추정 성능의 향상을 보여준다. 제안된 알고리즘의 시변 추정 특성을 신호 대 잡음비와 시변 정도에 대하여 모의 실험하고 기존의 추정 알고리즘들과 비교한다.

I. 서 론

통신에 있어서 제한된 주파수 자원을 효과적으로 이용하기 위해서는 수신단에서 채널특성을 상쇄시키는 등화기가 필요하다. 등화기의 설계에 있어서 채널을 추정하는 것이 필수적이다. 일반적으로 이동 통신에 있어서의 채널의 통계적 특성이 시간에 따라 변하기 때문에, 시변 추정 능력이 적응 신호 처리에 있어서 중요한 관심이 되어왔다.

이를 위하여 LMS (Least-Mean-Square), EW-RLS (Exponentially - Weighted-Recursive - Least - Square), RW-RLS (Rectangular Window Recursive-Least-Square) 알고리즘 등 다양한 적응필터들이 이용되어 왔고, 각 필터들의 특성도 심도 있게 연구되어 오고 있다[1].

이러한 기존의 알고리즘들은 신호 특성이 느리게 변하는 경우에는 신호 파라미터의 추정이 가능 하지만, 시변 정도가 커지는 경우에는 효과적으로 변화를 따라가지 못하고, 적용의 한계에 이른다.

다항식 채널 계수 모델을 이용한 Least Squares 방법이 제안되었고, 향상된 추정능력을 보여주었다[2]. 하지만, 계산량 복잡도가 RLS 알고리즘에 비하여 크게 증가하고, 여전히 미리 정해진 고정 망각 인자의 영향을 받는 알고리

즘으로써 고정 망각 인자의 선택에 따른 성능의 변화가 실제 적용에 있어서 문제가 된다.

이와는 다른 방향에서, 추정 인자의 시간에 따른 변화를 반영하는 가변 망각 인자를 도입하여 데이터 윈도우 크기를 조정하는 방법이 제안되어 연구되어 왔다. 기존의 가변 망각인자의 유도는 최소 자승 오차의 1계도 미분을 이용한 steepest descent방법이나 추정 오차의 파워를 반영하는 두 가지 방법으로 구별되어진다[3],[4],[5]. 전자의 경우는 시변 추정 능력이 다소 떨어지는 반면, 후자의 경우는 잡음 환경에 민감한 것으로 나타난다.

본 논문에서는, steepest descent의 잡음 강인성을 유지하는 동시에 시변 채널 추정 능력을 향상시키기 위한 방법으로 최소 자승 오차의 2계도 미분을 가변 망각인자에 도입한 GN-VFF-RLS (Gauss - Newton Variable - Forgetting-Factor-Recursive-Least-Square) 알고리즘을 제안하였다. AR 계수 추정에 응용하여 제안한 알고리즘의 성능을 실험하였다.

GN-VFF-RLS 알고리즘에 관하여 II에서 설명하고, III의 모의 실험을 통하여 각 적응필터의 시변 추정 능력을 비교, 제안한 알고리즘의 우수성을 검증한다. IV에서 결론으로 논문을 끝맺는다.

II. VFF-RLS 알고리즘

시변 신호 파라미터의 추정 문제는 그림. 1과 같이 시스템 식별문제로 나타낼 수 있다.

$$d(n) = \mathbf{h}^H(n) \mathbf{s}(n) + v(n) \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{h}(n)$ 과 $\mathbf{s}(n)$ 은 $N \times 1$ 벡터로써 각각 시변 채널과 시스템의 입력신호를 나타내고, $v(n)$ 은 평균이

0이고 분산이 1인 백색잡음을 나타낸다. 이 때, 추정 오차는 다음과 같이 나타내진다.

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{h}}^H(n) \mathbf{s}(n) \quad (2)$$

오차를 최소화하는 $\hat{\mathbf{h}}(n)$ 을 구하기 위해서, RLS 알고리즘에서는 다음과 같은 목적함수를 설정한다.

$$J(n) = \sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} (d(n) - \mathbf{s}^H(n) \mathbf{h}(n))^2 \quad (3)$$

여기서 $0 \leq \lambda(k) \leq 1$.

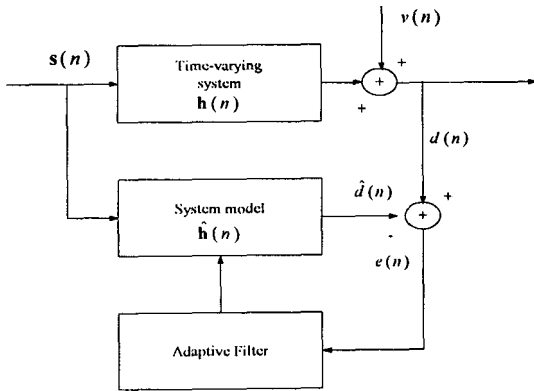


그림. 1 신호 파라미터 추정 문제 모델링

그리고, (1)식을 최소화하는 해는 표.1처럼 회귀적인 식으로 표현 가능하다.

표. 1. RLS

Estimation error

$$e(n) = d(n) - \mathbf{s}^H(n) \mathbf{h}(n) \quad (4)$$

Kalman gain update

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}(n)}{\lambda + \mathbf{s}^H(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}(n)} \quad (5)$$

Parameter update

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}(n-1) + \mathbf{k}(n) e(n)^* \quad (6)$$

Covariance update

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^H(n) \mathbf{P}(n-1)] \quad (7)$$

위의 알고리즘에 다음과 같이 신호의 시변 정도에 따라 망각인자를 변화시키면, 향상된 시변 추정 능력을 얻을 수

있고, 이때 가변 망각 인자는 다음의 새로운 목적함수

$$J' = \frac{1}{2} E[\|e(n)\|^2] \text{식을 최소화함으로 유도된다[1].}$$

그 해는 steepest descent 방법에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda(n) = \lambda(n-1) + \alpha \nabla_{\lambda}(n) \quad (8)$$

여기서 $\nabla_{\lambda}(n) = \partial J'(n) / \partial \lambda$ 이고 α 는 수렴 상수를 나타낸다. 하지만, 이러한 가변 망각 인자는 채널의 변화가 빨라짐에 따라, 제대로 동작하지 못한다. 따라서, 시변 추정 능력을 향상시키기 위한 방법으로, 비용함수의 2계도 미분 ($\nabla'_{\lambda}(n) = \partial^2 J'(n) / \partial \lambda^2$)을 이용하는 Gauss Newton 방법을 도입한다[6]. 이에 따라서 가변 망각 인자는 다음과 같이 변형된 꼴로 얻어진다.

$$\lambda(n) = \lambda(n-1) + \alpha \frac{\text{Re}[\phi^H(n-1) \mathbf{s}(n) e^*(n)]}{\nabla'_{\lambda}(n)} \quad (9)$$

$$\nabla'_{\lambda}(n) = (1 - \alpha) \nabla'_{\lambda}(n-1)$$

$$+ \alpha \phi^H(n-1) \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^H(n) \phi(n-1) \quad (10)$$

$$\mathbf{M}(n) = \lambda^{-1}(n) [\mathbf{I} - \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^H(n)]$$

$$\cdot \mathbf{M}(n-1) [\mathbf{I} - \mathbf{s}(n) \mathbf{k}^H(n)]$$

$$+ \lambda^{-1}(n) \mathbf{k}(n) \mathbf{k}^H(n) - \lambda^{-1}(n) \mathbf{P}(n) \quad (11)$$

$$\phi(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{k}(n) \mathbf{s}^H(n)] \phi(n-1) + \mathbf{M}(n) \mathbf{s}(n) e^*(n) \quad (12)$$

여기서, $\mathbf{M}(n) = \partial \mathbf{P}(n) / \partial \lambda$, $\phi(n) = \partial \mathbf{h}(n) / \partial \lambda$.

이렇게 새롭게 얻어진 가변망각인자를 고려하여 GN-VFF-RLS 알고리즘을 회귀식으로 나타내면 표.2와 같다.

표. 2. GN-VFF-RLS

Estimation error

$$e(n) = d(n) - \mathbf{s}^H(n) \mathbf{h}(n) \quad (13)$$

Kalman gain update

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}(n)}{\lambda(n-1) + \mathbf{s}^H(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{s}(n)} \quad (14)$$

Parameter update

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}(n-1) + \mathbf{k}(n) e(n)^* \quad (15)$$

Covariance update

$$P(n) = \frac{1}{\lambda(n-1)} [P(n-1) - k(n) s^H(n) P(n-1)] \quad (16)$$

Variable Forgetting Factor update

$$\lambda(n) = \lambda(n-1) + \alpha \frac{\text{Re}[\psi^H(n-1) s(n) e^*(n)]}{\nabla \lambda(n)} \quad (17)$$

GN-VFF-RLS 알고리즘에서 추가되는 계산량은 고전적인 가변 망각 인자 계산식인 (11), (12)과 새롭게 추가된 (10)에 의하여 증가하게 된다. 구체적으로 살펴보면, 일반적인 가변망각인자의 계산량은 $O(N^2)$ 이고, 새롭게 추가된 부분의 계산량은 $O(N)$ 으로, 일반적인 RLS 알고리즘의 계산량 $O(N^2)$ 과 동일한 수준의 계산량 복잡도를 가진다.

III. 모의 실험 및 결과

제안한 GN-VFF-RLS 알고리즘을 AR 계수 추정에 적용하여 향상된 시변 추정 능력을 입증하였다. 입력 신호 $s(n)$ 은 다음과 같은 AR 모델에 의하여 생성되었다.

$$s(n) + a_1 s(n-1) + a_2 s(n-2) = w(n) \quad (18)$$

이 때, $w(n) = \delta(n)$ 로 주어진다. 따라서, desired signal과 forward predicted signal은 다음과 같이 나타내진다.

$$d(n) = s(n) + v(n)$$

$$\hat{d}(n) = \hat{h}(n) s(n-1)$$

$h(n)$ 과 $s(n)$ 은 각기 2×1 벡터이고, AR 계수는, $a_1(n) = 1.6 \cos(2\pi f_m n)$, $a_2(n) = 1$ 로 주어진다. 이것은 백색 가우시안 잡음 환경에서의 시변 단일 주파수 신호가 있는 경우에 해당한다[7].

성능 평가를 위하여, 기존의 steepest descent VFF-RLS 알고리즘과 신호 환경에 최적화된 망각인자를 갖는 EW-RLS 알고리즘과 더불어 제안한 알고리즘을 실험하였다. 모든 모의 실험에서 수렴상수 (α)는 0.1로 고정하였다. 첫 번째 실험에서는 시변 정도를 결정하는 주파수 f_m 을 0.005로 고정하고, 0dB 부터 40dB 까지의 다양한 SNR (signal to noise ratio)에 대하여 제안한 알고리즘을 평가하였다. 그림. 2에서 볼 수 있듯이 모든 SNR 범위에서 제안된 알고리즘이 기존의 알고리즘들 보다 우수한 특성을 나타낸다. 여기서 성능 평가 기준은 MSD로 다음과 같이 정의된다.

$$MSD = E \left[\sum_{k=1}^2 |\hat{a}_k(n) - a_k(n)| \right] \quad (19)$$

그림. 3에서는 다양한 시변 정도에 따라서 제안한 알고리즘이 특성 변화를 보여준다. 이 때 SNR은 25dB로

고정하였으며, 주파수 f_m 은 10^{-4} 부터 10^{-2} 까지 범위를 사용하였다. 비교를 위하여 고정 망각인자 0.9를 갖는 EW-RLS 알고리즘의 성능을 함께 나타내었다. 제안한 방법, GN-VFF-RLS 알고리즘이 전 주파수 대역에서 기존의 알고리즘들 보다 향상된 시변 추정 능력을 보여주는 것을 볼 수 있다.

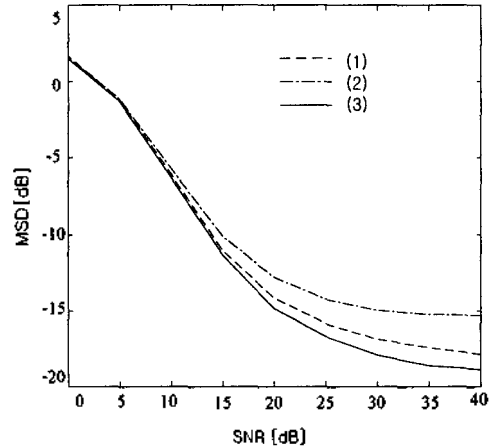


그림. 2 잡음 환경에서의 추정 성능 비교, $f_m = 0.005$. (1) 최적 망각인자를 가진 EW-RLS, (2) Steepest descent VFF-RLS, (3) Proposed algorithm (GN-VFF-RLS)

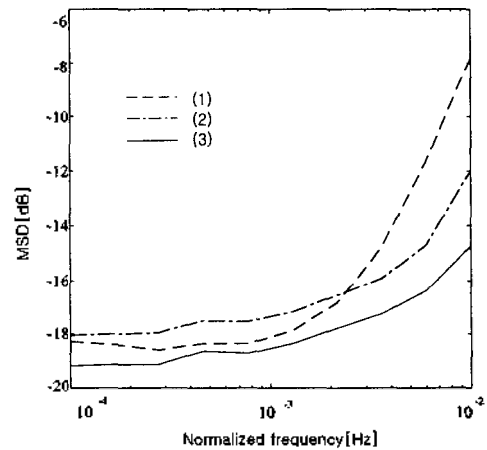


그림. 3 다양한 시변 정도에 대한 추정 능력 비교, $SNR = 25dB$. (1) EW-RLS ($\lambda = 0.9$), (2) Steepest descent VFF-RLS, (3) Proposed algorithm (GN-VFF-RLS)

IV. 결 론

본 논문에서는 Gauss-Newton 통계적 접근법을 이용한 VFF-RLS 알고리즘을 제안하였다. 시뮬레이션 결과는 제안한 알고리즘이 기존의 알고리즘들과 동일한 수준의 계산량의 복잡도를 유지하면서도, 향상된 시변 추정 능력 및 잡음에 강인함을 보여 주었다.

V. 참고문헌

- [1] S. Haykin, "Adaptive filter theory," Prentice Hall, 3rd Edition, 1996.
- [2] D. K. Borah and B.D. Hart, "Frequency-Selective Fading Channel Estimation with a Polynomial time-Varying Channel Model," IEEE Trans. Commun., vol. COM-47, no. 6, pp. 862-873, June 1999.
- [3] N. Martin, "An AR spectral analysis of nonstationary signals," Signal Processing, vol. 10, pp. 61-74, 1986.
- [4] T. R. Fortescue, L. S. Kershenbaum, And B.E. Ydstie, "Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors," Automatica, vol. 17, pp. 831-835, 1981.
- [4] S. Song, et al., "Variable Forgetting Factor Linear Least Squares Algorithm For A Frequency Selective Fading Channel Estimation," in Proc. ICASSP'2000, v2673-2677, 2000
- [5] L. Ljung and T. Soderstrom, "Theory and Practice of Recursive Identification," MIT press, 1983.
- [6] Y. S. Cho, et al., "Time-Varying Spectral Estimation Using AR Models with Variable Forgetting Factors," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 39, no. 6, pp. 1422-1426, June 1991
- [7] J. Lin et al., "Optimal Tracking of Time-Varying Channel : A Frequency Domain Approach for Known and New Algorithms," IEEE J. Select. Areas Commun., vol. 13, no. 1, pp. 141-154, Jan. 1995.