정적 및 동적 단부효과를 고려한 선형 유도 전동기의 벡터제어 특성해석

°김대경, 우경일, 권병일
한양대학교 대학원

Characteristic Analysis of Vector Controlled Linear Induction Motor Considering Static and Dynamic End Effect

°Kim Dae-Kyong, Woo Kyung-Il, Kwon Byung-Il
Graduate School of Hanyang University.

Abstract - Linear induction motor(LIM) have static and dynamic end effects due to its finite core length, so that per-phase impedances are asymmetric and the air gap flux distibution is distorted. So, this paper propose the d-q axis equivalent circuit and vector control method considering both static and dynamic end effects of the LIM. This vector control method consists of the slip frequency control, the time-invariant control and decoupling control. As a result, it is shown that the results of equivalent circuit method have a good agreement with the results of finite element method.

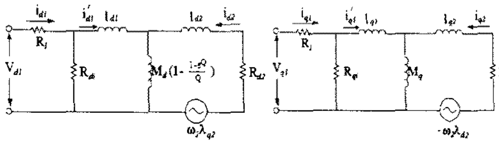
1. 서 론

선형유도전동기(Linear Induction Motor : LIM)는 극 대칭이 아니어서 3상 임피던스의 불균일성으로 일어나는 정적 단부효과와 유한 길이의 1차측과 무한 길이의 2차측의 상대 운동으로 발생하는 동적 단부효과 때문에 정확한 d-q축 등가회로 모델링과 벡터제어를 하기 힘들다.

LIM의 특성해석으로 회전기의 원리를 그대로 적용한 d-q 등가회로법과 각극당의 비대칭성을 고려하는 d-q 등가회로법[1]과 Sugimoto는 구속 시험 및 등가 무부하 시험에 의해 구한 비대칭 상수를 가지는 d-q 등가회로가 발표하였고[2], 이를 이용하여 정적 단부효과를 고려한 벡터제어가 발표되었지만, 동적 단부효과는 고려하지 않았다[3]. Duncan은 RIM의 등가회로를 변경하여 동적 단부효과를 고려한 LIM의 한 상당 등가회로를 발표하였다[4]. 그리고, 정적 및 동적 단부효과를 고려한 LIM의 d-q 등가회로가 발표되었다[5].그러나 정적 및 동적 단부효과를 고려한 벡터 제어법은 아직 발표되지 않았다.

본 논문에서는 정적 및 동적 단부효과를 고려한 LIM의 벡터제어를 위한 d-q축 등가회로를 제시하고, 전압방정식을 구성하여 LIM의 간접벡터제어 시뮬레이션을 행하였다. 그리고, 기기의 형상을 고려할수 있는 유한요소법(Finite Element Method : FEM)을 이용한 동특성해석과 비교하여 제시한 LIM의 d-q 등가회로와 벡터 제어법의 타당성을 확인하였다.

2. 단부효과를 고려한 LIM의 벡터제어



(a) d-axis　　　　(b) q-axis

그림 1 제안된 LIM의 d-q축 등가회로

그림 1은 제안된 정적 및 동적 단부효과를 고려한 d-q축 LIM의 등가회로이다. 기존의 정적 단부효과를 등가회로[3]에 동적 단부효과를 고려하기 위하여 속도항이 고려된 일반화한 시간 스케일에서의 모터 길이(Q)를 d축에 적용하였다.

$$Q = T_v/T_2 = DR_{d2}/(M_d + L_{d2})v_2 \tag{1}$$

여기서, $T_v = D/v_2$, $T_2 = (M_d + L_{d2})/R_{d2}$, D는 유효모터길이이다.

LIM의 도출한 벡터제어 방식은 회전형 유도전동기에서 사용하는 회전 좌표계 상의 이론을 적용하였지만, LIM의 정적 단부 효과와 동적 단부 효과 때문에 회전좌표축($\gamma-\delta$축)으로의 변환과정에서 서로 상쇄되는 항이 없기 때문에, 다소 복잡하게 표현된다. 회전자표축에서 상태방정식으로 표시하면 식(2)와 같다.

$$P[\, i_{\gamma1}' \;\; i_{\delta1}' \;\; \lambda_{\gamma2} \;\; \lambda_{\delta2}]^T = A[\, i_{\gamma1}' \;\; i_{\delta1}' \;\; \lambda_{\gamma2} \;\; \lambda_{\delta2}]^T + [B \;\; 0 \;\; 0]^T [v_{\gamma1} \;\; v_{\delta1}]^T \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{a_1} + \widetilde{a}_1\cos 2\theta}{R_1} & \dfrac{-\widetilde{a}_1\sin 2\theta}{R_1} \\ \dfrac{-\widetilde{a}_1\sin 2\theta}{R_1} & \dfrac{\overline{a_1} + \widetilde{a}_1\cos 2\theta}{R_1} \end{bmatrix}, \quad 0 = [0 \;\; 0] \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\gamma2} \\ \lambda_{\delta2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{M} + \widetilde{M}\cos 2\theta & -\widetilde{M}\sin 2\theta \\ -\widetilde{M}\sin 2\theta & \overline{M} - \widetilde{M}\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\gamma1}' \\ i_{\delta1}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{L_2} + \widetilde{L}_2\cos 2\theta & -\widetilde{L}_2\sin 2\theta \\ -\widetilde{L}_2\sin 2\theta & \overline{L_2} - \widetilde{L}_2\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\gamma2} \\ i_{\delta2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서, 변환각 $\theta = \int \omega \, dt$ 이고, $\cos 2\theta$와 $\sin 2\theta$가 계수행렬의 각 요소 중에 포함된 것은 전기적 정수가 상 비대칭인 것에 의한 것이다. 그리고, 각 계수들은 부록에 나타내었다. 슬립주파수 제어법을 도출하기 위해서는 식(2)의 3행과 4행으로부터 $\lambda_{\delta2} = 0$ 라고 가정하면 다음과 같은 관계를 얻을수 있다.

$$\lambda_{\gamma2} = \left[\frac{1}{(P + \overline{a_6} + \widetilde{a}_6\cos 2\theta)}\right] \times [(\overline{a_5} + \widetilde{a}_5\cos 2\theta)\cdot i_{\gamma1}' - \widetilde{a}_5\sin 2\theta\, i_{\delta1}'] \tag{6}$$

$$\omega_{se} = \omega - \omega_2 = [(\overline{a_5} - \widetilde{a}_5\cos 2\theta)\, i_{\delta1}' - \widetilde{a}_5\sin 2\theta\, i_{\gamma1}'] / \lambda_{\gamma2} + \widetilde{a}_6\sin 2\theta \tag{7}$$

여기서, ω_{se}는 슬립주파수, $\omega_2 = (\frac{\pi}{\tau})\cdot v_2$ 이다. 그리고, 식(2)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$P[\, i_{\gamma1}' \;\; i_{\delta1}' \;\; \lambda_{\gamma2}\,]^T = A4[\, i_{\gamma1}' \;\; i_{\delta1}' \;\; \lambda_{\gamma2}\,]^T + [B \;\; 0\,]^T [v_{\gamma1} \;\; v_{\delta1}]^T \tag{8}$$

그리고, $i_{\gamma1}$를 대신하여 자화분전류를 다음과 같이 표현한다.

$$i_\lambda = (1 + \widetilde{a}_5\cos 2\theta/\overline{a_5})\cdot i_{\gamma1}' - (\widetilde{a}_5\sin 2\theta/\overline{a_5})\, i_{\delta1}' - (\widetilde{a}_6\cos 2\theta/\overline{a_5})\lambda_{\gamma2} \tag{9}$$

추력분전류 또한 식(5)를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$i_T = -\frac{1}{\overline{a_7}} i_{\delta2} = -\frac{\widetilde{a}_7}{\overline{a_7}}\sin 2\theta\, i_{\gamma1}' + (1 - \frac{\widetilde{a}_7}{\overline{a_7}}\cos 2\theta)\, i_{\delta1}' - \frac{\widetilde{a}_8}{\overline{a_7}}\sin 2\theta\lambda_{\gamma2} \tag{10}$$

이 관계를 Matrix로 표현하면 다음과 같다.

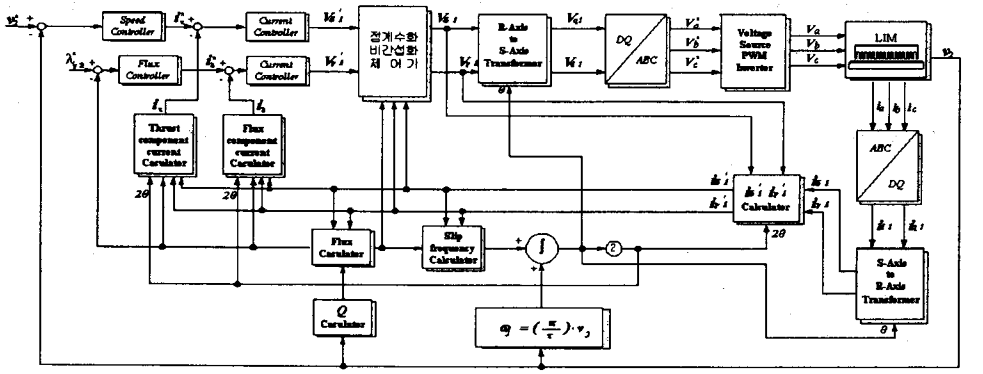


그림 2 시스템 구성

$$[i_\lambda\ i_T\ \lambda_{\gamma2}]^T = T[\ i'_{\gamma1}\ \ i'_{\delta1}\ \lambda_{\gamma2}] \qquad (11)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\widetilde{a}_5\cos2\theta}{\overline{a}_5} & \dfrac{-\widetilde{a}_5\sin2\theta}{\overline{a}_5} & \dfrac{-\widetilde{a}_6\sin2\theta}{\overline{a}_5} \\ \dfrac{-\widetilde{a}_7\sin2\theta}{\overline{a}_7} & 1+\dfrac{\widetilde{a}_7\cos2\theta}{\overline{a}_7} & \dfrac{\widetilde{a}_8\sin2\theta}{\overline{a}_7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

식(8)의 제어를 간단화하기 위해 식(11)을 이용해서 정계수화 및 비간섭화 하여 표현하면 다음과 같다.

$$P[\ i_\lambda\ \ i_T\ \ \lambda_{\gamma2}\ ]^T = D[\ i_\lambda\ \ i_T\ \ \lambda_{\gamma2}\ ]^T + [\ E\ \ 0\ ]^T[\ v'_{\gamma1}\ \ v'_{\delta1}\ ]^T \qquad (13)$$

$$D=\begin{bmatrix} -(\overline{a_1}+\overline{a_2}) & 0 & 0 \\ 0 & -(\overline{a_1}+\overline{a_2}) & 0 \\ \overline{a_5} & 0 & -\overline{a_6} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$E=\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{a_1}+\widetilde{a}_1\widetilde{a}_5\ /\ \overline{a_5}}{R_s} & 0 \\ 0 & \dfrac{\overline{a_1}+\widetilde{a}_1\widetilde{a}_5\ /\ \overline{a_5}}{R_s} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

여기서, $v'_{\gamma1}$, $v'_{\delta1}$은 정계수화 및 비간섭화를 행하기 전의 γ-δ축 1차 전압이며, 정계수화 및 비간섭화에 인한 전압은 다음과 같다.

$$[v_{\gamma1}\ v_{\delta1}]^T=[B^{-1}\ 0^T]\cdot((-T\cdot A4-PT+DT)\cdot[\ i'_{\gamma1}\ i'_{\delta1}\lambda_{\gamma2}]^T+[E\ \ 0]^T\cdot[\ v'_{\gamma1}\ v'_{\delta1}]^T) \qquad (16)$$

그리고, LIM에 대한 추력식은 다음과 같이 표현된다.

$$F=\frac{3}{2}\frac{\pi}{\tau}\overline{a_7}\lambda_{\gamma2}i_T \qquad (17)$$

그리고, 운동방정식은 다음과 같다.

$$v_2=\int\frac{F-F_l}{m}\ dt \qquad (18)$$

여기서, v_2 : 속도 , F_l : 부하 , m : 질량 이다.

그림 2는 LIM의 벡터제어를 위한 시스템구성이며, 속도제어기, 자속제어기 및 전류제어기는 비례적분제어기를 사용하였다.

3. 유한요소법을 이용한 LIM의 벡터제어 특성해석

해석 영역을 2차원 유한요소법으로 풀기 위해 Maxwell 전자계 방정식으로부터 이동좌표계를 사용하였을 경우 지배방정식을 구하면 식(19)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-J_z+\sigma\frac{dA_z}{dt} \qquad (19)$$

단, A_z : 자기벡터 포텐셜의 z축 성분

J_z : 슬롯에 흐르는 코일의 전류밀도

σ : 2차측 도체판의 도전율, μ : 재료의 투자율

또한 전압이 1차측의 여자코일에 인가되었을 때 코일에 흐르는 전류는 미지수이며 이때의 회로방정식은 식(20)와 같다.

$$\{V\} = [R]\{I\} + [L_0]\frac{d}{dt}\{I\}+\{E\} \qquad (20)$$

여기서, $\{V\}$: 각 상에 인가되는 전압

$\{I\}$: 각 상에 흐르는 전류

$[R]$: 각 상의 코일 및 외부회로 저항

$[L_0]$: 각 상의 코일단의 누설 인덕턴스

$\{E\}$: 각 상의 유기전압

식(19)과 (20)를 결합하여 Galerkin 유한요소법으로 정리하고 시간미분항에 대해서는 후퇴차분법으로 정리하면 식(21)와 같이 된다.

$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\mu}S & -N \\ 0 & R \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} T & 0 \\ L_{eff}N^T & L_0 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}_t = \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} T & 0 \\ L_{eff}N^T & L_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}_{t-\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix}_t \qquad (21)$$

여기서, T : 와전류와 관련된 계수 행렬

L_{eff} : z축 방향으로의 유효 적층폭

A : 자기 벡터 포텐셜, I : 출력 전류, V : 입력 전압

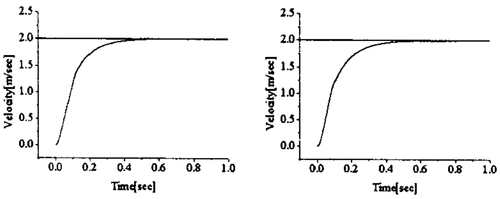
선형 유도 전동기의 동작특성은 식(21)를 풀어서 구한 자계해석 결과를 이용하여 Mawell응력으로 매순간마다 힘을 구하고 d-q 등가회로법과 마찬가지로 운동방정식을 이용하여 이동자의 속도를 매 순간마다 구할 수 있다.

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

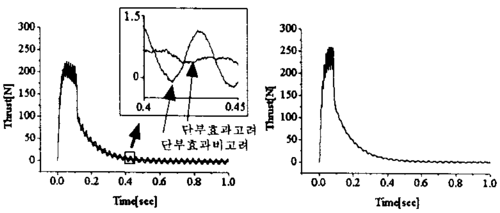
정적 및 단부효과를 고려한 LIM의 d-q축 등가회로와 벡터제어법의 타당성을 확인하기 위해서 기기의 형상을 고려할 수 있는 유한요소법과 비교하였다. 그림 3은 속도제어시 속도 응답 곡선을 나타내며, 기준 속도는 2.0[m/sec]로 하였다. 그림 3(a)는 등가회로법에 의해 나타난 속도 응답 파형이며 약 0.5초 후에 기준속도에 수렴하고, 그림 3(b)는 유한요소법에 의해 나타난 속도 응답 파형으로 약 0.57초 후에 기준속도에 수렴하는 것을 볼수 있다. 등가회로법이 유한요소법과 거의 일치함을 볼수 있다.

그림 4는 속도 제어시 추력 응답 곡선을 나타낸다. 그림 4(a)는 등가회로법에 의한 LIM의 단부효과를 고려한 벡터제어와 고려하지 않은 벡터제어의 결과를 비교한 파형이다. 단부효과를 고려하지 않았을 때는 기준 속도에 수렴했을 때 추력이 맥동하는 것을 볼 수 있다. 그러나, 단부효과를 고려했을 때는 추력이 맥동없이 양호하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 그림 4(b)는 유한요소법의 파형 역시 양호하게 나타나는 것을 볼수 있다.

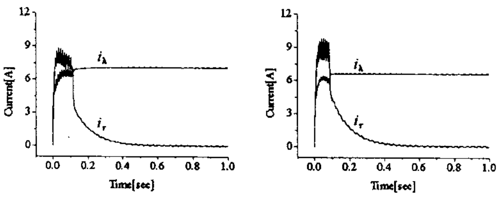
그림 5는 속도제어 시 자속분 및 추력분 전류 파형을 나타낸다. 그림 6은 속도제어시 1차전류 파형을 나타낸다. 그림 6(a)는 등가회로법에 의한 속도제어시 1차전류 파형으로서, $i_{\gamma 1}$, $i_{\delta 1}$이 맥동하는 것을 볼수 있다. 이것은 $i_{\gamma 1}$, $i_{\delta 1}$이 맥동하므로써 자속분 및 추력분 전류를 맥동없이 양호하게 제어하여 추력을 맥동없이 제어가능하다는 것을 알 수 있다. 그림 6(b)는 유한요소법에 의한 1차전류 파형을 나타낸다.



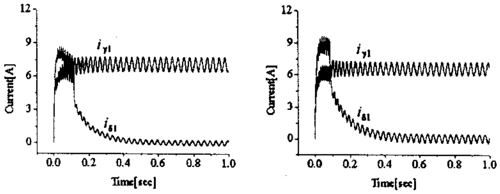
(a) 등가회로법 (b)유한요소법
그림 3 속도제어시의 속도응답



(a) 등가회로법 (b) 유한요소법
그림 4 속도제어시 추력응답



(a) 등가회로법 (b) 유한요소법
그림 5 속도제어시 자속분 및 추력분 전류 응답



(a) 등가회로법 (b) 유한요소법
그림 6 속도제어시 1차전류 응답

5. 결 론

본 논문에서는 정적 및 동적 단부효과를 고려한 선형 유도전동기의 벡터 제어를 위하여 단부효과를 고려한 d-q축 등가회로를 제시하고 이를 이용하여 벡터제어법을 도출하였다. 벡터 제어법은 γ - δ 축으로 표시된 상비대칭과 속도 항을 고려했던 상태방정식으로부터 도출하였다. 이것은 1차전류 $i_{\gamma 1}$, $i_{\delta 1}$을 제어하여 추력을 맥동없이 양호하게 제어할 수 있었다. 그리고 기기의 형상을 고려할 수 있는 유한요소법에 의한 특성해석과 비교함으로써 정적 및 동적 단부효과를 고려한 선형유도전동기의 d-q축 등가회로와 벡터제어법의 타당성을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

[1] T.A. Lipo, T.A. Nondahl, "Pole-by-Pole d-q model of a linear induction machine," IEEE Tranactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-98, No.2, March/April, 1979

[2] H. Sugimoto, M. Tomoe "A method of calculating asymetrical constants based on lock test for single-sided linear induction motor," T. IEE Japan, vol 113-D, pp.247-255, 1993.1.

[3] H. Sugimoto, M. Tomoe "A Vector Control Method of a Linear Induction Motor with Asymmetrical Constants and its Performance Characteristics," T. IEE Japan, vol 114-D, pp.17-23, 1994.1.

[4] J. Duncan, C. Eng., "Linear Induction Motor Equivalent Circuit Model," Proc. IEE, Vol. 130, Pt. B, No. 1, pp.51-57, 1983.

[5] 김대경, 권병일, 우경일, "정적 및 동적 단부효과를 고려한 선형유도전동기의 특성 해석," 대한전기학회 하계학술대회 논문집(B), pp.981-983, 2000.

부 록

1차측저항(R_1) : 4.2 [Ω]
2차측 d,q축저항(R_{d2}, R_{q2}) : 11.424, 12.822 [Ω]
d,q축상호인덕턴스(M_d, M_q) : 0.0633, 0.0568 [H]
d축1차측,2차측 자기인덕턴스(L_{d1}, L_{d2}) : 0.0978, 0.0637 [H]
q축1차측,2차측 자기인덕턴스(L_{q1}, L_{q2}) : 0.0867, 0.0602 [H]
유효모터길이(D) : 288.6 [mm]

$$A_{11} = -(\overline{a_1}+\overline{a_2}) - (\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\cos 2\theta \;,\quad A_{12} = \omega + (\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\sin 2\theta$$
$$A_{13} = \overline{a_3} + \widetilde{a_3}\cos 2\theta + \omega_2 \widetilde{a_4}\sin 2\theta \;,\quad A_{14} = \omega_2(\overline{a_4} + \widetilde{a_4}\cos 2\theta) - \widetilde{a_3}\sin 2\theta$$
$$A_{21} = -\omega + (\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\sin 2\theta,\quad A_{22} = -(\overline{a_1}+\overline{a_2}) - (\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\cos 2\theta$$
$$A_{23} = -\omega_2(\overline{a_4} - \widetilde{a_4}\cos 2\theta) - \widetilde{a_3}\sin 2\theta \;,\quad A_{24} = \overline{a_3} - \widetilde{a_3}\cos 2\theta - \omega_2 \widetilde{a_4}\sin 2\theta$$
$$A_{31} = \overline{a_5} + \widetilde{a_5}\cos 2\theta \;,\quad A_{32} = -\widetilde{a_5}\sin 2\theta$$
$$A_{33} = -\overline{a_6} - \widetilde{a_6}\cos 2\theta \;,\quad A_{34} = (\omega - \omega_2) + \widetilde{a_6}\sin 2\theta$$
$$A_{41} = -\widetilde{a_5}\sin 2\theta \;,\quad A_{42} = \overline{a_5} - \widetilde{a_5}\cos 2\theta$$
$$A_{43} = -(\omega - \omega_2) + \widetilde{a_6}\sin 2\theta \;,\quad A_{44} = -\overline{a_6} + \widetilde{a_6}\cos 2\theta$$
$$\overline{L_2} = \frac{1}{2}(L_{d2} + L_{q2}) \;,\quad \widetilde{L_2} = \frac{1}{2}(L_{d2} - L_{q2}),$$
$$\overline{M} = \frac{1}{2}\left(M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right) + M_q\right) \;,\quad \widetilde{M} = \frac{1}{2}\left(M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right) - M_q\right),$$
$$\sigma_d = 1 - \frac{\left\{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)\right\}^2}{L_{d1}L_{d2}} \;,\quad \sigma_q = 1 - \frac{M_q^2}{L_{q1}L_{q2}},$$
$$T_{d1} = \frac{k_d L_{d1}}{R_1},\quad T_{q1} = \frac{k_q L_{q1}}{R_1},\quad T_{d2} = \frac{L_{d2}}{R_{d2}},\quad T_{q2} = \frac{L_{q2}}{R_{q2}}$$
$$\overline{a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_d T_{d1}} + \frac{1}{\sigma_q T_{q1}}\right),\quad \widetilde{a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_d T_{d1}} - \frac{1}{\sigma_q T_{q1}}\right)$$
$$\overline{a_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\left\{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)\right\}^2}{\sigma_d T_{d2} L_{d1} L_{d2}} + \frac{M_q^2}{\sigma_q T_{q2} L_{q1} L_{q2}}\right)$$
$$\widetilde{a_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\left\{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)\right\}^2}{\sigma_d T_{d2} L_{d1} L_{d2}} - \frac{M_q^2}{\sigma_q T_{q2} L_{q1} L_{q2}}\right)$$
$$\overline{a_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{\sigma_d T_{d2} L_{d1} L_{d2}} + \frac{M_q}{\sigma_q T_{q2} L_{q1} L_{q2}}\right)$$
$$\widetilde{a_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{\sigma_d T_{d2} L_{d1} L_{d2}} - \frac{M_q}{\sigma_q T_{q2} L_{q1} L_{q2}}\right)$$
$$\overline{a_4} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{\sigma_d L_{d1} L_{d2}} + \frac{M_q}{\sigma_q L_{q1} L_{q2}}\right),\quad \widetilde{a_4} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{\sigma_d L_{d1} L_{d2}} - \frac{M_q}{\sigma_q L_{q1} L_{q2}}\right)$$
$$\overline{a_5} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{T_{d2}} + \frac{M_q}{T_{q2}}\right),\quad \widetilde{a_5} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{T_{d2}} - \frac{M_q}{T_{q2}}\right)$$
$$\overline{a_6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_{d2}} + \frac{1}{T_{q2}}\right),\quad \widetilde{a_6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_{d2}} - \frac{1}{T_{q2}}\right)$$
$$\overline{a_7} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{L_{d2}} + \frac{M_q}{L_{q2}}\right),\quad \widetilde{a_7} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)}{L_{d2}} - \frac{M_q}{L_{q2}}\right)$$
$$\widetilde{a_8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_{d2}} + \frac{1}{L_{q2}}\right)$$