

이득여유와 위상여유를 보장하는 견실한 PID 제어기 설계

조 준호*, 류 영국, 최 정내, 황 혁수
원광대학교 제어계측공학과

Robust PID controller design to ensure specified Gain and Phase Margin.

Joon-Ho Cho,* Young-Guk Ryu, Jung-Nae Choi, Hyung-Soo Hwang
Wonkwang Univ. Engineering of control and Instrumentation

Abstract

The robust design of controllers to ensure gain and phase margin can be used approximation of arctan function. In this paper, We proposed a tuning algorithm PID controllers based on specified gain and phase margin by a new approximation of arctan function. This method have linear interpolation equations of two arctan interval instead of one arctan interval of arctan(x).

It is shown that the frequency response of this method was to ensure specified gain and phase margin.

1. 서 론

제어기 설계에서 위상여유와 이득여유는 견실성 및 안정도 판별에 중요한 척도로 사용되며, 위상여유는 시스템의 성능지수에 관련된다[1]. 위상여유와 이득여유의 안정도를 고려한 제어기 설계 방법이 연구되어 왔으며 [2][3][4][5][6]. 위상여유와 이득여유를 구하는 방법으로는 계산적인 방법, 검사에 의한 방법, Nyquist 선도와 보드선도를 이용한 방법 등 많은 연구가 이루어지고 있다. 하지만 이러한 방법은 적응제어나 자동-동조에 사용되기 어려운 단점이 있다[7]. 그래서 $\arctan x$ 의 근사화 방법에 의한 기존 방법의 단점을 보완된 방법이 연구되어지고 있고[3]. 그 결과 특정한 위상여유와 이득여유의 값을 만족하는 제어 파라미터 값을 쉽게 구할 수 있는 방법이 제시되었다. 이 동조 방법에 있어 가장 중요한 부분은 $\arctan x$ 를 근사화 하는 방법이다. 기존의 근사화 방법은 $\arctan(0)$ 값과 $\arctan(1)$ 값을 이용하여 1차선형식으로 보간하여 $\arctan x$ 를 근사화 하여 사용했지만, 실제의 $\arctan x$ 는 오차가 존재한다. 그 결과 확정된 이득여유와 위상여유의 값과 실제의 값은 오차가 존재한다. 본 논문은 이러한 오차를 줄이기 위해서 근사화 방법에 있어 $\arctan(0)$, $\arctan(0.5)$ 이용한 1차선형 보간식과 $\arctan(0.5)$, $\arctan(1)$ 을 이용한 1차선형 보간식 2개를 선형 결합하여 $\arctan x$ 를 근사화 하여 사용했으며, 그 결과 기존의 근사화 방법보다 실제의 $\arctan x$ 에 근접한 결과를 얻을 수 있으며, 이 근사화 방법을 PI 및 PID 동조에 적용하여 확정된 이득여유와 위상여유의 값에 수렴하는 파라미터 값을 구할 수 있었다. 1차 및 2차의 지연시간을 가진 공정에 대해 기존의 방법과 본 논문이 제시한 방법을 PI 제어기와 PID 제어기에 적용하여 시뮬레이션한 결과 기존의 근사화 방법에 의한 동조 방법보다 개선된 동조 방법임을 확인하였다.

본 논문의 구성은 2.1절은 제안된 $\arctan x$ 의 근사화 방법, 2.2절은 이득여유와 위상여유를 이용한 PI 제어기의 동조법, 2.3절은 이득여유와 위상여유를 이용한 PID 제어기의 동조법, 2.4 시뮬레이션 및 고찰, 3절은 결론으로 구성되어 있다.

2. 본 론

2.1 제안된 $\arctan x$ 의 근사화 방법

기존의 $\arctan x$ 근사화 방법은 $\arctan(0)$, $\arctan(1)$ 인 2점의 값을 이용한 1차의 선형 보간식을 사용하였다. 그 결과 실제 $\arctan x$ 와 근사화된 식과 오차가 존재하게 되었다. 본 논문에서는 근사화 방법에 있어 $\arctan(0)$, $\arctan(0.5)$ 값을 이용한 1차선형 보간식과 $\arctan(0.5)$, $\arctan(1)$ 값을 이용한 1차선형 보간식, 이 2개의 1차 선형 보간식을 선형 결합하여 근사화한 결과 기존의 방법 보다 오차가 줄어듬을 알 수 있었다. 제안된 근사화된 식은 아래 식(1)과 같다.

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} - \frac{0.9272}{x} & (x > 2), \\ \frac{\pi}{2} - \frac{0.6436}{x} - 0.1418 & (1 < x \leq 2), \\ 0.6436x + 0.1418 & (0.5 < x \leq 1), \\ 0.9272x & (-0.5 < x \leq 0.5), \\ 0.6436x - 0.1418 & (-1 < x \leq -0.5), \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{0.6436}{x} + 0.1418 & (-2 < x \leq -1), \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{0.9272}{x} & (-2 \geq x), \end{array} \right. \\ & \arctan x \approx \end{aligned} \quad (1)$$

그림 1은 실제의 $\arctan x$ 와 기존의 근사화 방법, 제안된 근사화 방법을 나타내었고, 시뮬레이션 결과 제안된 근사화 방법이 기존의 근사화 방법보다 실제의 $\arctan x$ 에 더욱 가깝게 근사화됨을 확인할 수 있었다.

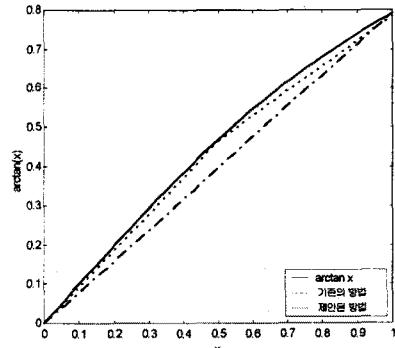


그림 1. 제안된 $\arctan x$ 의 근사화 방법

2.2 이득여유와 위상여유를 이용한 PI 제어기의 동조법

먼저 제어공정의 전달함수를 $G_p(s)$, 제어기의 전달함수를 $G_c(s)$ 라 하며, 특정의 이득여유를 A_m , 위상여유를 ϕ_m 이라 놓으면 이득여유와 위상여유의 기본 정의 식은 아래의 식 (2)~(5)로 표현된다.

$$\arg [G_c(jw_p) G_p(jw_p)] = -\pi, \quad (2)$$

$$A_m = \frac{1}{|G_c(jw_p)G_p(jw_p)|}, \quad (3)$$

$$|G_c(jw_p)G_p(jw_p)| = 1, \quad (4)$$

$$\Phi_m = \arg [G_c(jw_p)G_p(jw_p)] + \pi, \quad (5)$$

여기서 이득여유에 관계된 식은 식(2)과 식(3)이며, 위상여유와 관계된 식은 식(4)과 식(5)이다.

또한 w_p 는 고전제어에서 잘 알려진 Nyquist curve가 음의 실수축(-1,0)과 만나는 점에서의 주파수, 위상교차 주파수를 의미하며, w_g 는 Nyquist curve가 진폭이 1인 점과 만날 때의 주파수, 즉 이득 교차 주파수를 의미한다.

확정된 이득여유와 위상여유를 이용한 제어기 설계 방법은 arctan x 의 근사화로 인해 가능하게 되었고, 이장에서는 논문에서 제시한 근사화 방법에 의한 PI 제어기의 동조 방법을 소개한다.

PI 제어기의 전달함수 $G_c(s)$ 을 식 (6)에 제어공정 전달함수를 식 (7)에 나타내었다.

$$G_c(s) = k_c(1 + \frac{1}{sT_i}) \quad (6)$$

$$G_p(s) = \frac{k_p}{1+s\tau} e^{-sL} \quad (7)$$

식(6)과 식(7)으로부터 개루프 전달함수 $G_c(s)G_p(s)$ 을 구한다.

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{k_c k_p (1+sT_i)}{sT_i (1+s\tau)} e^{-sL} \quad (8)$$

개루프 전달함수 $G_c(s)G_p(s)$ 를 식(2)~(5)식에 각각 대입하여 정리하면 식 (9)~(12)와 같다.

$$\frac{\pi}{2} + \arctan w_p T_i - \arctan w_p \tau - w_p L = 0 \quad (9)$$

$$A_m k_c k_p = w_p T_i \sqrt{\frac{w_p^2 \tau^2 + 1}{w_p^2 T_i^2 + 1}} \quad (10)$$

$$k_c k_p = w_g T_i \sqrt{\frac{w_g^2 \tau^2 + 1}{w_g^2 T_i^2 + 1}} \quad (11)$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} + \arctan w_g T_i - \arctan w_g \tau - w_g L \quad (12)$$

식(9)~(12)을 보면 주어진 값은 제어공정의 값 (k_p , τ , L)과 특정한 이득여유와 위상여유 값 (A_m , Φ_m)이며, 구해야 할 값은 PI 제어 파라미터인 (k_c , T_i)과 교차주파수인 (w_p , w_g)이다.

만약, 제어 공정의 전달함수 값이 $\frac{L}{\tau} > 0.3$ 이면,

$$T_i \approx \tau \text{이고, 제어공정의 값이 } \frac{L}{\tau} < 0.3 \text{ 이면, } x \gg 1$$

여기서 x 는 $w_p T_i$, $w_p \tau$, $w_g T_i$, $w_g \tau$ 값 중 하나이다. 대부분의 제어공정 전달 함수 값이 $\frac{L}{\tau} > 0.3$ 임으로 [7], 식 (10), (11)은 식 (13)~(14)식으로 근사화될 수 있다.

$$A_m k_c k_p = w_p T_i \quad (13)$$

$$k_c k_p = w_g T_i \quad (14)$$

여기서 근사화 구간의 조건에 고려해서 $1 < x \leq 2$ 일 때 PI 동조법과 $1 < x \leq 2$ 일 때 PI 동조법으로 나누어 제어파라미터 값을 구해야 한다.

case1) $1 < x \leq 2$ 일 때 PI 동조법

식(9), (12)에 근사화된 arctan x 값을 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{0.6436}{w_p T_i} + \frac{0.6436}{w_p \tau} - w_p L = 0 \quad (15)$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} - \frac{0.6436}{w_g T_i} + \frac{0.6436}{w_g \tau} - w_g L \quad (16)$$

식 (14)~(16)의 관계에서 위상교차 주파수 w_p 를 구하면 식 (17)과 같다.

$$w_p = \frac{A_m \Phi_m + \frac{1}{2} \pi A_m (A_m - 1)}{(A_m^2 - 1)L} \quad (17)$$

PI 제어 파라미터 값은 식(15)~(17)에 의해 구할 수 있다.

$$k_c = \frac{w_p \tau}{A_m k_p} \quad (18)$$

$$T_i = \frac{1.2872 \tau}{w_p \pi \tau + 1.2872 - 2\tau w_p^2 L} \quad (19)$$

case2) $x > 2$ 일 때 PI 동조법

식(9), (12)에 근사화된 arctan x 값을 대입하여 정리하면 식(15)', (16)'과 같다.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{0.9272}{w_p T_i} + \frac{0.9272}{w_p \tau} - w_p L = 0 \quad (15)'$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} - \frac{0.9272}{w_g T_i} + \frac{0.9272}{w_g \tau} - w_g L \quad (16)'$$

식 (14), (15)', (16)'의 관계에서 위상교차 주파수 w_p 를 구하면 아래 식(17)'과 같다.

$$w_p = \frac{A_m \Phi_m + \frac{1}{2} \pi A_m (A_m - 1)}{(A_m^2 - 1)L} \quad (17)'$$

PI 제어 파라미터 값은 식(15)~(17)'에 의해 구할 수 있다.

$$k_c = \frac{w_p \tau}{A_m k_p} \quad (18)'$$

$$T_i = \frac{1.2872 \tau}{w_p \pi \tau + 1.2872 - 2\tau w_p^2 L} \quad (19)'$$

2.3 이득여유와 위상여유를 이용한 PID 제어기의 동조법

1차의 지연시간을 갖는 제어공정에 대해서는 PI 제어기만으로도 충분히 좋은 결과를 얻을 수 있지만 고차의 지연시간을 갖는 제어공정에 대해서는 PID 제어기를 사용하여 제어 해야 한다.[8]

본 장에서는 2차의 지연시간을 갖는 제어공정에 대해 제안된 방법에 의한 확정된 이득여유와 위상여유를 이용한 동조방법을 소개 할 것이다.

PID 제어기의 전달함수 $G_c(s)$ 는 식(19), 제어공정의 전달함수 $G_p(s)$ 는 식(20)과 같다.

$$G_c(s) = \frac{k_c (1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i} \quad (20)$$

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(1+s\tau)(1+sT)} e^{-sL}, \quad T \geq T_d \quad (21)$$

식(19)와 식(20)으로부터 개루프전달함수 $G_c(s)G_p(s)$ 는 식(21)과 같다.

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{k_c k_p (1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i (1+s\tau)(1+sT)} e^{-sL} \quad (22)$$

여기서 개루프 전달함수의 극점과 영점을 상쇄하면, 즉 $T_d = T$ 이면 동조 방법은 1차의 지연 시간을 갖는 공정과 같게 되므로 PID 동조 방법은 PI 동조 방법과 같은 간단한 방법으로 구해진다. 여기서 근사화 구간의 조건에 고려해서 $1 < x \leq 2$ 일 때 PID 동조법과 $x > 2$ 일 때 PID 동조법으로 나누어 구해야 한다.

case1) $1 < x \leq 2$ 일 때 PID 동조법

$$k_c = \frac{w_p \tau}{A_m k_p} \quad (23)$$

$$T_i = \frac{1.2872\tau}{w_p \pi \tau + 1.2872 - 2\tau w_p^2 L} \quad (24)$$

$$T_d = \tau l \quad (25)$$

case2) $x > 2$ 일 때 PID 동조법

$$k_c = \frac{w_p \tau}{A_m k_p} \quad (23)'$$

$$T_i = \frac{1.8644\tau}{w_p \pi \tau + 1.8644 - 2\tau w_p^2 L} \quad (24)'$$

$$T_d = \tau l \quad (25)'$$

2.4 시뮬레이션 및 고찰

시뮬레이션을 통해 PI, PID 제어기의 동조 방법에 있어 기존의 $\arctan x$ 함수의 근사화 방법과 제안된 근사화 방법을 데이터 및 그래프로 비교, 분석하였다.

Example 1) $G_p(s) = \frac{1}{1+s} e^{-0.1s}$

1차의 지연시간을 갖는 공정을 대해 이득(3~5)과 위상($45^\circ \sim 60^\circ$)을 바꿔 가면서, PI 제어파라미터 값을 구하고, 기존의 방법과 비교, 분석하였다.

표 1에서 A_m , ϕ_m 는 원하는 이득여유와 위상여유이고, \hat{k}_c , \hat{T}_i , \hat{A}_m , $\hat{\phi}_m$ 값은 각각 기존의 파라미터 값과 기존방법에 의해 구해진 이득여유와 위상여유이며, k_c^* , T_i^* , A_m^* , ϕ_m^* 값은 각각 제안된 파라미터 값과 제안된 방법에 의해 구해진 이득여유와 위상여유이다.

표 1 PI 제어기에 대한 동조 방법

A_m	ϕ_m	\hat{k}_c	\hat{T}_i	k_c^*	T_i^*	w_p	\hat{A}_m	$\hat{\phi}_m$	A_m^*	ϕ_m^*
3	45	4.91	0.35	4.91	0.39	4.91	2.91	41.6	2.97	45.7
5	45	2.95	0.35	2.95	0.31	2.95	4.83	46.6	4.89	44.1
3	60	5.24	1.00	5.24	1.00	5.24	3.00	60.0	3.00	60.0
5	60	3.05	0.54	3.05	0.58	3.05	4.94	58.5	4.98	61.2

표 1에서 알 수 있듯 기존의 PI 동조 파라미터 값과 제안된 PI 동조 파라미터 값과의 차이점은 T_i 값이다.

그 이유는 $\arctan x$ 의 근사화 방법에 있어 정밀도의 차이이다. 이와 같이 제안된 근사화 방법이 확정된 이득여유와 위상여유를 이용한 PI 동조에 있어 더욱 정확하게 동조됨을 시뮬레이션 결과 확인 할 수 있었다.

Example 2) $G_p(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)} e^{-0.5s}$

1차의 지연시간을 갖는 공정을 대해 이득(3~5)과 위상($45^\circ \sim 60^\circ$)을 바꿔 가면서, PID 제어파라미터 값을 구하고, 기존의 방법과 비교, 분석하였다.

표 2에서 알 수 있듯 지연시간을 갖는 2차 공정에 대해서도 기존의 근사화 방법을 이용한 PID 제어기 동조 방법보다 제안된 근사화 방법을 이용한 PID 제어기 동조 방법이 실제의 이득여유, 위상여유와 원하는 이득여유, 위상여유의 오차가 적음을 알 수 있었다. 하지만 1차 공정에 비해 2차 공정의 오차가 더욱 커짐을 보이고 있다.

표 2. PID 제어기에 동조 방법

A	ϕ	\hat{k}_c	\hat{T}_i	\hat{T}_d	k_c^*	T_i^*	T_d^*	w_p	\hat{A}_m	$\hat{\phi}_m$	A_m^*	ϕ_m^*
3	45	0.98	0.73	0.5	0.98	0.69	0.5	1.03	2.87	518	2.84	49.8
5	45	0.59	0.73	0.5	0.59	0.69	0.5	0.62	4.78	65.0	4.74	63.5
3	60	1.05	1.00	0.5	1.05	1.00	0.5	1.05	3.00	60.0	3.00	60.0
5	60	0.61	0.85	0.5	0.61	0.82	0.5	0.62	4.91	68.3	4.90	67.4

그림 2,3은 example1, example2에 대해 각각 이득:5, 위상: 45° 에서 기존의 방법과 제안된 방법에 의해 구해진 PI, PID 제어기에 대한 step응답을 나타내었다.

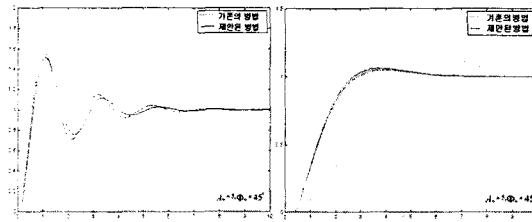


그림 2 $G_p(s) = e^{-0.1s} / (1+s)$ PI제어

그림 2,3에서 보면 기존의 방법보다 제안된 방법이 step응답에서도 조금 빠른 응답특성을 보이고 있다.

3. 결론

지정된 이득여유와 위상여유를 보장하는 제어기 설계방법에 있어 가장 중요한 것은 $\arctan x$ 의 근사화이다. 기존의 근사화 방법은 $\arctan(0)$ 값과 $\arctan(1)$ 값을 이용하여 1차의 선형식으로 보간하여 근사화를 하여 비교적 우수한 특성을 보이나 실제의 $\arctan x$ 는 오차가 존재한다. 본 논문은 이러한 오차를 줄이기 위해서 실 $\arctan(0)$, $\arctan(0.5)$, $\arctan(1)$ 값을 이용하여 2개의 1차의 선형식을 선형 결합하여 실제의 $\arctan x$ 에 근접하게 근사화 하였다. 그 결과 기존의 방법보다 제안된 방법이 오차가 줄어들었다. 1차 및 2차 지연시간을 갖는 공정에 대해 기존의 근사화 방법을 이용한 PI 및 PID 동조 방법보다 제안된 근사화 방법을 이용한 PI 및 PID 동조방법이 오차가 적게 발생하며, 시뮬레이션을 통해 확인 할 수 있었다.

【참고문헌】

- [1] Franklin, G. F., J. D. Powell, and A. E. Baeini, "Feedback control of Dynamic Systems" Addison-Wesley, Reading, Ma 1986.
- [2] Ogata, K., "Modem Control Engineering", 2nd. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nj,1990.
- [3] Weng Khuen Ho, Chang Chieh Hang, Lisheng s cao,"Tuning of PID Controllers Based on Gain and Phase Margin Specifications", Automatica, 31, No3, pp. 497-502, 1995.
- [4] Ya-Gang Wang, Hui-he Shao, "PID Autotuner Based on Gain-and Phase-Margin Specifications" Ind.Eng. Chem. Res. 38, 3007-3012, 1999.
- [5] Ho, W.k.; Lim, k.; Xu, W."Optimal gain and phase margin tuning for PID controllers, 1998, 34, 1009-1014, 1998
- [6] Ho, W. K, Gan, O.P; Tay, E.B; Ang,E.L "Performance based on gain and phase margin of well-known PID tuning formulas", IEEE Transns, control Syst, Technol 473-477, 1996.
- [7] Åström, K.J. and C.C. Hang and P. Persson, "Towards intelligent PID control", Automatica, 28, 1-9 ,1991.
- [8] Åström, K.J. and C.C. Hang, "Automatic Tuning of PID Controller ", instrument Society of America.1988.