

## 비선형 마찰을 포함한 시스템의 $H_\infty$ 적분 제어기 설계에 대한 연구

정권일, 임동진  
한양대학교 제어계측공학과

### A Study on $H_\infty$ Integral Controller Design for Systems with Nonlinear Friction

Kwon-Il Jung, Dong-Jin Lim  
Dep. of Control & Instrumentation Eng., HanYang University

**Abstract** - Nonlinear frictions which generate many problems in control system exist in almost all the servor control systems. In this paper, the design procedure which employs  $H_\infty$  integral controller including two integrators with performance weight is proposed to improve performance of the control system. Limit cycles are unavoidable by the effect of interaction between two integrators and coulomb friction in these system. The describing function method is used to check the limit cycles and determine the coefficients of performance weights to minimize the effect of the limit cycles.

#### 1. 서 론

일반적으로 서보 시스템에 존재하는 기계적 마찰은 선형 마찰과 비선형 마찰로 구분할 수 있다. 선형 마찰(점성 마찰)은 제어 시스템 설계에 큰 지장을 주지 않지만 비선형 마찰(쿨롱 마찰)는 속도가 영인 지점에서의 불연속 특성 때문에 제어시스템 설계시 주의를 요한다. 그리고 서보 제어 시스템의 오차를 줄이기 위하여 오차 적분기를 도입할 경우, 제어기와 비선형 마찰의 상호 작용으로 인하여 리미트 사이클이 발생할 수 있는데, 이는 서보 제어 시스템에서는 치명적인 현상이므로, 제어기 설계 단계에서 리미트 사이클의 존재 여부 검사 및 이의 제거 방법에 대해 논할 것이다.

본 논문에서는 비선형 마찰을 포함하고 있는 서보 시스템에 대하여  $H_\infty$  적분 제어기를 설계하는 방법에 대해서 제안하고, 시뮬레이션을 통해서 제어 방법의 타당성에 대한 검증을 실시한다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 $H_\infty$ 적분 제어기

비선형 마찰은 정확한 모델을 설정하기 어렵고, 설정된 모델을 사용한다 하여도 정확한 파라미터의 측정이 어렵다. 따라서 이로 인하여 발생되는 오차를 보상하기 위해서는 일반적으로 오차 적분기(error integrator)의 도입에 의한 제어기가 사용된다.  $H_\infty$  제어기에 적분기를 도입하기 위해서는 여러 가지의 방법이 있으나, 본 논문에서는 다음과 같은 방법을 사용한다. 그림 2.1의 구성에서 performance weight  $W_e$ 에 적분기를 도입하면  $w$ 와  $z_1$  사이의 전달 함수는 다음과 같다.

$$z_1 = W_e(I + PK)^{-1} W_d w$$

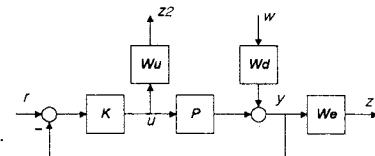


그림 2.1 제어 시스템

만약 제어기  $K$ 가 플랜트  $P$ 를 안정화한다면, 그리고  $w$ 와  $z_1$  사이의 norm을 유한하게 한다면, 제어기  $K$ 는 원점에서 pole을 가져야 한다. 그러나 이 방법의 문제점은  $W_e$ 의 원점에 있는 pole은 uncontrollable pole이 되고, 따라서 제어기의 설계가 불가능하게 된다. 이 문제를 해결하기 위해서  $W_e$ 를 다음과 같이 놓는다.

$$W_e = \tilde{W}_e(s) M(s)$$

여기에서  $M(s)$ 는 proper 하고,  $\tilde{W}_e(s)$ 의 허수축에 있는 pole을 모두 포함하며,  $M^{-1}(s) \in RH_\infty$ 이며,  $\tilde{W}_e(s)$ 는 stable 하고 minimum phase이다. 만약 같은 허수축의 pole을 포함하고 제어 성능을 만족하는 제어기  $K(s)$ 가 존재한다면, 제어기는 다음과 같이 될 수 있다.

$$K(s) = -\hat{K}(s) M(s)$$

그러면 제어 시스템은 그림 2.2와 같이 재구성 할 수 있다.

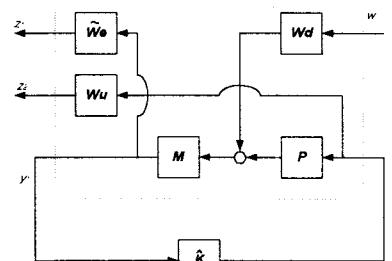


그림 2.2  $H_\infty$  제어 시스템

그림 2.2의 점선 내부를  $G(s)$ 라 놓으면  $G(s)$ 는 다음과 같이 된다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} [\tilde{W}_e M W_d] & [\tilde{W}_e M P] \\ [0] & [W_u M P] \\ [M W_d] & [MP] \end{bmatrix}$$

## 2.2 기술 함수 법

리미트 사이클의 존재 여부를 검사하기 위해 기술 함수 법(describing function method)을 사용한다. 설계된 제어 시스템에 기술 함수 법을 적용하기 위하여 그림 2.4와 같이 비선형 블록과 선형 블록으로 나눈다. 이때 선형 블록은 비선형 블록의 양단에서 바라본 나머지 블록으로부터 구해진다.

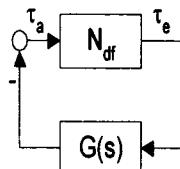


그림 2.4 기술함수 해석을 위한 블록도

그러면 비선형 요소  $N$ 의 기술함수를  $N_{df}(M, \omega)$ , 비선형 요소  $N$ 의 입력측에서의 리미트 사이클의 기본 성분(fundamental component)을  $M\cos(\omega t)$ 라고 할 때 다음 식의 해가 존재하면 리미트 사이클이 존재한다.

$$1 + G(j\omega) \cdot N_{df}(M, \omega) = 0, \quad G(j\omega) = \frac{-1}{N_{df}(M, \omega)} \quad (1)$$

위 식이 해를 갖지 않는다면 리미트 사이클은 발생하지 않음을 예측할 수 있다. 만약 리미트 사이클이 존재한다면 식에서 구한 해로부터 리미트 사이클의 기본 성분의 크기와 주파수를 예측할 수 있으므로 각 신호의 가중치를 조절하여 식의 해가 존재하지 않도록 한다. 그러나 어떤 경우에는 리미트 사이클이 항상 존재하는 경우가 있을 수 있으며, 따라서 이 경우에는 식을 만족하는 해가 항상 존재한다. 이런 상황에서는 리미트 사이클을 완전히 없앨 수 없으므로 그 크기를 제어 시스템에 영향을 주지 않을 정도로 줄이도록 한다. 리미트 사이클 존재 여부 검증 및 리미트 사이클 제거 과정은 일반적으로 그 래프를 이용하여 비교적 손쉽게 이루어질 수 있다.

## 2.3 제어기 설계 및 시뮬레이션

$H_\infty$  제어 기법을 DC 서보 모터와 하모닉 드라이브에 의해서 구동되는 단일 축 로봇 관절 시스템(그림 2.5)에 적용한다.

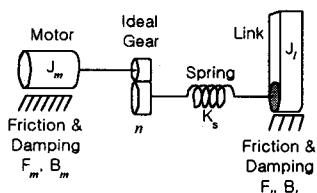


그림 2.5 단일 축 로봇 관절 시스템

그림 2.2의  $H_\infty$  제어 시스템의 프랜트 P 블록을 로봇 관절 시스템으로 대체한다. 이에 대한 블록도는 그림 2.6과 같다. 여기서 서보 제어 시스템의 오차를 줄이기 위해 type을 증가시킨다. 즉,  $W_e = 1/s^2$ 로 놓았다. 그러면 제어기에 두 개의 pole이 추가되는데, 이는 제어기와 쿠лон 마찰의 상호 작용으로 인해 리미트 사이클이 발생할 수 있으므로 기술 함수 법을 이용하여 리미트 사이클의 존재여부를 검사한다.

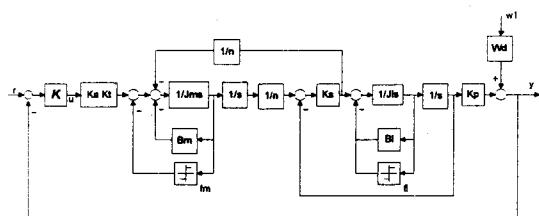
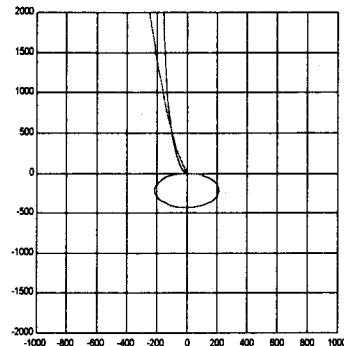
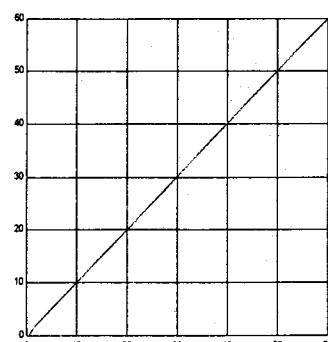
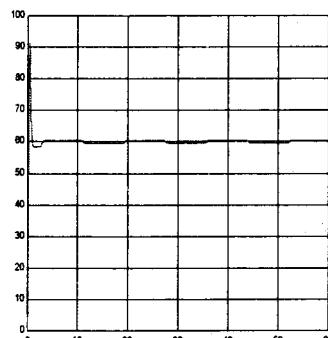


그림 2.6 전체 제어 시스템 블록도

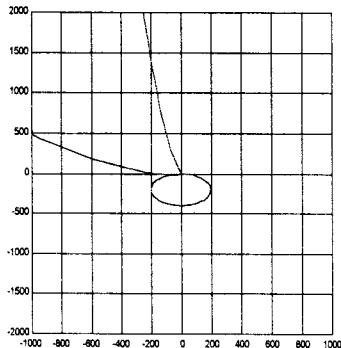


(a) 비선형 부분과 선형 부분의 그래프

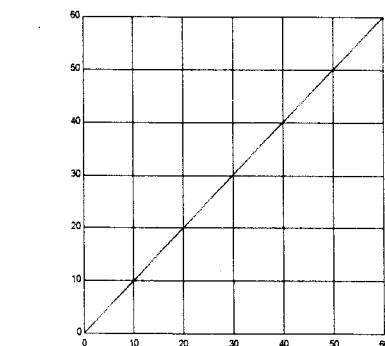
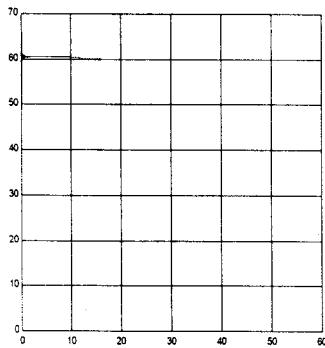


(a1) 시뮬레이션 결과

제단 입력에 대한 추종 결과(a1)를 보면 큰 오버 슛과 리미트 사이클이 발생함을 알 수 있다. 이 결과는 식(1)의 해가 존재함을 그래프(a)를 통해서 알 수 있었던 결과이다. 따라서 리미트 사이클이 발생하지 않도록 weighting 값을 조정한다.



(b) Weighting 값 조정 후 그래프



(b1) Weighting 값 조정 후 시뮬레이션 결과

그래프(b)는 performance weight  $W_e$ 와  $W_u$ 의 weighting 값을 식(1)의 선형 부분과 비선형 부분이 만나지 않도록 적절히 조정함으로서 얻을 수 있다. 위 결과를 이용하여 시뮬레이션한 결과를 (b1)에서 볼 수 있다. 시뮬레이션 결과(b1)을 보면 오버 슛이 줄어들었으며, 리미트 사이클도 발생하지 않음을 알 수 있다. 이러한 시뮬레이션 결과를 통해서 비선형 마찰이 포함된 시

스템에 대하여 적절한  $H_\infty$  적분 제어기의 설계가 가능하고, 또한 적절히 weighting 값을 설정함으로서 제어 시스템의 성능을 개선 할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 램프 입력에 대해서는 모든 경우에 type 2이므로 추종하는데 문제가 없었다. 하지만 settling time은 좀 더 고려해보아야 하는데 overshoot의 크기와 상관관계가 있기 때문에 시스템에 따라 적절한 절충이 필요하다.

### 3. 결 론

본 논문에서는 비선형 마찰을 포함하고 있는 서보 시스템에 대해서  $H_\infty$  적분 제어기를 설계하는 방법에 대해서 제안하였고, 리미트 사이클의 존재 여부를 검사하기 위해서 기술 함수 법(describing function method)을 이용하는 방법을 제시하였다. 그리고 제어기 설계시 두 개의 pole이 추가 될 경우 리미트 사이클이 존재할 수 있는데, 리미트 사이클이 존재하지 않도록 weighting 값을 조정하여 리미트 사이클을 제거할 수 있는 방법을 제시하였다. 또한 weighting 값을 적절히 조정함으로서 제어 시스템의 성능을 향상시킬 수 있음을 시뮬레이션을 통해 알 수 있었다.

### (참 고 문 헌)

- [1] 최호준, “ $H_\infty$  제어기법을 이용한 비선형 마찰 및 공진 효과가 존재하는 서보 시스템의 램프추종 제어기 설계에 관한 연구”, 석사학위논문, 1998
- [2] 홍국남, “공진 효과 및 쿠лон 마찰이 있는 서보계의  $H_\infty$  제어기 설계에 관한 연구”, 석사학위논문, 1995
- [3] Kemin Zhou with John C. Doyle and Keith Glover, “Robust and Optimal Control”, Prentice Hall., 1995
- [4] A.Yamauchi, Y.Mikami, A.Moran and M.Hayase, “Precise Positioning  $H_\infty$  Control Considering Resonance and Coulomb Friction”, '94 KACC international session, 1994, p.512-517
- [5] Y.Chida, “An  $H_\infty$  Controller Design Method of Integral-Type Servo Systems and Its Application to a Flexible Structure System”, Second IEEE conference on Contr. Appl., vol 3, Sep., 1993, pp. 847-852
- [6] S.C.Won, “Tracking Feedback Controller Design for Systems with Stiff Nonlinearities”. Ph.D. Thesis, Electrical and Computer Engineering, University of Iowa, Feb., 1985
- [7] J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Kaaragonekar, and B.A.Francis, “State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems”, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.34, no.8, Aug., 1989, pp. 831-847
- [8] S.M.Shimmons, “MODERN CONTROL SYSTEM THEORY and DESIGN”, Addison-Wesley, 1992
- [9] R.Lane Dailey, “Lecture Notes for the Workshop on  $H_\infty$  and  $\mu$  Methods for Robust Control”, 1991 IEEE Conference on Decision and Control, Dec., 1991
- [10] Bahram Shahian, Michael Hassul, “Control System Design Using MATLAB”, Prentice Hall, 1993