퍼지 집단 선호 분석을 위한 Blin-Whinston알고리즘

박 대 석* · 김 희 철*

< 목 차 >

I. 서언

퍼지라는 용어는 1962년 Zadeh가 확률이론으로 해결하기 어려운 모호한 양(Fuzzy guautity)을 다루기 위해 처음 사용하였으며, Zadeh는 1965년 처음으로 체계적인 "Fuzzy sets"이라는 논문을 발표하였다[2]. 그 후 이론적인 발전과 더불어 여러 부분(정보이론, 시스템분석, 인공지능, 전문가 시스템, 의사결정분석, 자연어 처리등)에 걸친 응용 연구가 수행되어지고 있다.

퍼지집합(Fuzzy set)은 언어의 의미와 개념의 정의에서 보여지는 애매성을 정량적으로 나타내기 위한 집합개념으로 퍼지 이론의 근간을 이루는 것이다. 많다-적다, 좋다-싫다, 높다-낮다, 중요하다-중요치않다 등의 언어의 의미는 사물이 놓인 상황과 판단하는 인간의 감각에 의존하므로 매우 애매하다.

퍼지집합은 집단의사결정 분석시에 발생하는 불명확성과 애매모호함을 다루는데 유용하다.

본 연구는 구성원들이 다수의 의사결정대안들에 대한 선호가 애매한 경우 집단 선호순위를 도출할 수 있는 Blin-Whinston 알고리즘을 소개하기 위한 것이다.

II. Blin-Whinston 알고리즘

Blin-Whinston 알고리즘[4]은 다수의 결정대안을 1대1관계(binary relation)로 비교하여 집단의 모호선호(Fuzzy preference)를 분석하는 방법이다.

A={다수의 대안들}로 정의되는 의사결정 환경에서 부분집합 A′⊂A를 선택할 수 있다. 이와 같은 선호구조는 대안간의 선호순위가 뚜렷하지 않는 경우가 있다.

즉, $a_j \leq^* a_i \ \forall \ a_i, \ a_j \in A$이다.

---

*목포대학교 경영대학 경영학과

여기서 '$\leq^*$' 는 연결성과 이행성(connectove and transitive), '-' 는 무차별성(indifference)을 의미한다.

만약 효용이론에서,

$$a_i \leq^* a_j \quad iff \quad \mu(a_i) \leq \mu(a_j) \quad \forall \; a_i, a_j \in A, \qquad (1)$$

이면, 등가적인 등급의 수가 한정되어야 하며 이는 A에서 '$\leq^*$ 강한등급 '인 유한 부분집합 A″⊂A가 있을 경우에만 가능하다.

Luce와 Suppes는 이와 같은 가정아래 식(1)이 성립된다는 것을 보여 주었다. 실제 의사결정행태에서는 이러한 가정들이 자주 위배되며 특히 이행성을 만족하지 못하는 경우가 많다. 선호의 이행성 문제는 A를 완전하게 서열화하는 집단의사 결정시에 자주 발생한다. 여기서는 집단 구성원들이 각자 A에 대해 선호 이행성을 만족하는 서열화가 가능하고 집단 선호구조가 개인차 때문에 모호한 경우를 다룬다.

집단 구성원 n명이 A에 대해 자신들의 선형순위(linear orders) O_h에 따라 $A = a_i, \cdots, a_m$으로부터 A′를 선택하는 과정은 다음과 같다.

(1) A에서 A까지 모호관계인 집단 선호관계 R 또는 모호부분집합 A x A는 R의 구성등급인 개개의 쌍(a_i, a_j)에 관한 구성함수(membership function) μ_R을 갖는다.

(2) A×A 내의 비모호집합으로서 R에서의 모호관계에 대한 $\alpha-level\ set$은 다음과 같다.

$$S_\alpha = \{(a_i, a_j) \mid \mu_s \; (a_i, a_j) \leq \alpha \}$$

여기서 S_α는 $\alpha-level\ set$, $\mu_s(a_i, a_j)$는 S에서의 등급 (a_i, a_j)쌍을 갖는 구성함수이다.

$S \subset A \times A$이면 구성원들은 (a_i, a_j)에 대한 선호여부가 명확하게 합의점을 찾게 되어 $\overline{S}$(S의 상보)의 모든 요소에 선형선호를 부과하는 과정을 줄일수 있다.

이와같은 서열화는 다음과 같이 Blin-Whinston 알고리즘에 의해 구간[0, 1]에 나타낼 수 있다.

(1) 대안간에 엄격한 선호관계가 있으면 1을 할당한다. 예를 들어 $a_i \geq^* a_j$이면 a_j보다 강한 a_i의 선호는 1의 값을 갖고 그 반대이면 0의 값을 갖는다.

다음에 개개 부분집합 $S_{\alpha i}$가 $\alpha_i \in [0,1]$의 값으로 정의된 부분 집합의 계열

$$S_{\alpha 1} \subset S_{\alpha 2}, \cdots, S_{\alpha r-1} \subset S_{\alpha r} \subset A \times A \text{를 구한다.}$$

$$S_{\alpha i} \; = \; \{(a_r, a_t) \subset A \times A \mid \mu_s(a_r, a_t) \geq \alpha_i \} \qquad (2)$$

여기서 $\mu_s(a_r, a_t)$는 $[\mu_s(\cdots) \in [0,1]]$쌍에 대한 선호수준을 나타낸다.

따라서 $a_i \geq a_j \rightarrow S_{\alpha i} \subset S_{\alpha j}$를 구할수 있다.

(2) Zadeh는 어떤 집합내의 모호관계 R은 비모호 집단 (여기서는 $S_{\alpha i}$)의 결합으로 분해될 수 있음을 증명하였다.

$$R = \bigcup_\alpha S_{\alpha i} \qquad 0 < \alpha_i \leq 1, \qquad (3)$$

또한 각 $\alpha-$ *level set*은 다음과 같은 특성함수로 정의된다.

$$\mu_{s\alpha i}\ (a_r, a_t) = \begin{cases} \alpha_i, (a_r, a_t) \in S_{\alpha i}, \\ 0,\ o.w. \end{cases}$$

식(3)을 이용하여 $\alpha=1$부터 시작하여 점차 적은 α값까지 모호선호관계를 유한개의 $\alpha-$ *level sets*으로 분해하여 집단차원의 일대일 선호관계를 구할 수 있다.

(3) 완전한 선호 서열화는 다음 정리를 이용한다.

Szpitrajn정리 : 모든 부분순위 P는 선형확장 L을 갖는다. 만약 a와 b가 P의 비교가 불가능한 요소이면 하나의 L_1이 존재하며 a < b, b > a 이면 L_2가 존재한다.

Blin-Whinston 과정에서 $\Sigma_{(a_i, a_j) \in I}\ \mu_R(a_i, a_j)$이 최대인 P의 선형확장 L^*를 택한다.

여기서 $I=\{(a_i, a_j) \in A \times A \mid \mu_R(a_i, a_j) < 1\}$이다.

상위 목표(속성)의 서열화 과정은 다음과 같다.

X = {x}를 목표(속성)들의 집합이라 하면 모호집합 $A' \in A$가 하나의 순위 쌍집합 A = {x, $\mu_A(x)$} $x \in X$이다.

여기서 μ_A(x)는 A에서의 x의 구성등급이며 μ_A : x → M은 X로부터 구성공간(membership space) M 까지의 함수이다. M은 구간[0,1]을 취한다고 가정한다.

구성원 모두가 하나의 목표(속성)에 동의하면 $\mu_A(x)=1$이고 반대이면 $\mu_A(x)=0$이다.

O_h는 A에 대한 개인 순위를 나타내고 O_{ij}는 다음과 같이 정의한다.

$$O_{ij}\ \{O_h \mid a_i > a_j\},\ \mid O_{ij} \mid\ =\ O_{ij}\text{의 기수(cardinal number)}$$

특히 O_{ij}는 속성 a_j보다 a_i를 선호할 경우 개인 선호순위를 나타낸다. $|O_{ij}|$는 a_i와 a_j의 등수(ranking)와 상관없이 단순히 $a_i > a_j$로 여기는 구성원들의 수를 나타낸다.

구성함수는 다음과 같다

$$\mu(a_i, a_j) = \frac{1}{m}|O_{ij}|,\ m\text{:구성원의 수}$$

하위 목표(속성)의 서열화과정은 다음과 같다.

단계 1 : 상위 속성의 선형 순위를 구한다.

$B=\{(g_i, g_j) \mid (g_i, g_j)$는 Blin절차로부터 구한 인접된 선형순위 쌍}, $i \neq j$ g_i: i번째의 속성.

F:B → [1,∞)을 정의한다.

단계 2. : $G_k=\{(a_{ik}, a_{jk}) \mid (a_{ik}, a_{jk})$는 Blin절차로 구한 개개속성 k 의 인접된 선형순위},

$i \neq j$, k : 목표(속성)의 수

$H_k: G_k \rightarrow [1, \infty)$을 정의한다.

단계 3 : $J: \dot{U}_k G_k \rightarrow [1, \infty)$을 정의한다.

여기서 $\dot{U}_k G_k$는 G_k요소와 겹치지 않는 부분이며 J는 F에 의해 할당된 값과 H_k를 곱한 것으로 구간 $[1, \infty)$값을 갖는다.

III. 적용예

소비자는 아파트 구매시 여러 가지 주거평가를 위한 속성들을 고려한다. 주거평가를 위한 속성들은 다음과 같다[3].

1. 위치적 조건
   - a1 : 대중교통수단 이용의 편의성
   - a2 : 학군(자녀교육여건)
   - a3 : 직장 근접도
   - a4 : 도심근접도(병원, 시장, 식당등)
   - a5 : 주변의 거주수준
   - a6 : 사회적 안정성
2. 경제적 조건
   - b1 : 투자가치
   - b2 : 매매의 용이성
   - b3 : 유지, 관리비
3. 실내 환경조건
   - c1 : 아파트의 규모(넓이, 방수)
   - c2 : 아파트 내부구조(방, 거실, 부엌, 다용도실 등의 배치상태)
   - c3 : 일조상태(향, 층수)
   - c4 : 소음(자동차, 놀이터 등의 소음)
   - c5 : 시각적 전망
   - c6 : 성능(난방, 단열, 통풍, 방음, 방수, 노후도 등)
   - c7 : 프라이버시
4. 옥외 환경조건
   - d1 : 단지 주변의 자연환경
   - d2 : 단지 내외의 공해(악취, 소음 매연 등)
   - d3 : 단지내외의 과밀감

d4 : 건물의 외관 및 단지 경관

d5 : 단지 내 녹지 및 조경상태

d6 : 옥외시설의 편의성(놀이터, 운동시설, 노인정, 상가 등)

d7 : 주차공간

아파트 구매 계획을 갖고 있는 100명에게 주거평가 속성들을 각각 1대1로 비교하여 다음과 같은 관계 행렬을 얻었다고 간주한다.

본 장에 나오는 관계행렬은 Blin-Whinston 알고리즘의 이해를 돕기위한 것으로 가상적인 자료이다.

$$\mu_R = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0.88 & 0.62 & 0.70 \\ b & 0.12 & 0 & 0.18 & 0.20 \\ c & 0.38 & 0.82 & 0 & 0.66 \\ d & 0.30 & 0.80 & 0.34 & 0 \end{array}$$

a : 위치적 조건, b : 경제적 조건, c : 실내 환경조건, d : 옥외 환경조건

관계행렬을 보면 응답자 100명중 88명이 아파트를 구입하려 할 때 경제적 조건보다 위치적 조건을 중요시한다.

관계행렬로부터 모호관계의 해답을 얻기 위해 $\alpha-$*level sets*을 구하면 다음과 같다.

α = 0.88, $S_{\alpha 0.88}$ = {(a,b)},

α = 0.82, $S_{\alpha 0.82}$ = $S_{\alpha 0.88}$ ∪ {(c,b)}

α = 0.80, $S_{\alpha 0.80}$ = $S_{\alpha 0.88}$ ∪ $S_{\alpha 0.82}$ ∪ {(d, b)}

α = 0.70, $S_{\alpha 0.70}$ = $S_{\alpha 0.88}$ ∪ …… ∪ {(a, d)}

⋮

α = 0.12, $S_{\alpha 0.12}$ = $S_{\alpha 0.88}$ ∪…… ∪ {(b, a)}

여기서 (a, b)는 속성 b보다 a를 중요시 함을 의미한다.

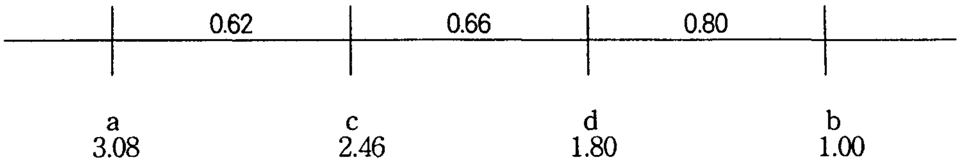
Blin-Whinston알고리즘은 속성간의 비모호 완전 선호순위를 구하는데 사용된다.

C_1 : (a, b) 인 모든 가능한 선호 순위
C_2 : (c, b) //
C_3 : (d, b) //
C_4 : (a, d) //
C_5 : (c, d) //
C_6 : (a, c) //

$C_1 \cap \cdots\cdots \cap C_6$ = {(a, c, d, b)}

따라서 주거 평가를 위한 상위 속성들의 중요도 순위는 위치적조건, 실내 환경조건, 옥외환경조건, 경제적 조건이다.

단계 1 : 관계 행렬로부터 순위{(a, c, d, b)}에 대한 선호도를 선분상에 나타내면 다음과 같다.



단계 2 : 개개하위 속성들의 관계행렬은 다음과 같다.

1. 위치적 조건(a)

$\mu_{R1}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	0	0.42	0.47	0.59	0.46	0.52
a2	0.58	0	0.55	0.66	0.53	0.60
a3	0.53	0.45	0	0.61	0.49	0.54
a4	0.41	0.34	0.39	0	0.37	0.43
a5	0.54	0.47	0.51	0.63	0	0.56
a6	0.48	0.40	0.46	0.57	0.44	0

2. 경제적 조건(b)

$\mu_{R2}=$

	b1	b2	b3
b1	0	0.63	0.85
b2	0.37	0	0.76
b3	0.15	0.24	0

3. 실내환경조건(c)

$\mu_{R3}=$

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
c1	0	0.56	0.67	0.71	0.68	0.63	0.70
c2	0.44	0	0.61	0.65	0.62	0.58	0.64
c3	0.33	0.39	0	0.53	0.50	0.46	0.53
c4	0.29	0.35	0.47	0	0.47	0.43	0.50
c5	0.32	0.38	0.50	0.53	0	0.46	0.53
c6	0.37	0.42	0.54	0.57	0.54	0	0.57
c7	0.30	0.36	0.47	0.50	0.47	0.43	0

4. 옥외환경조건

$\mu_{R3}=$

	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7
d1	0	0.42	0.49	0.48	0.61	0.63	0.46
d2	0.58	0	0.59	0.58	0.70	0.72	0.56
d3	0.51	0.41	0	0.53	0.62	0.63	0.52
d4	0.52	0.42	0.47	0	0.61	0.64	0.47
d5	0.49	0.30	0.38	0.39	0	0.53	0.35
d6	0.37	0.28	0.37	0.36	0.47	0	0.32
d7	0.54	0.44	0.48	0.53	0.65	0.68	0

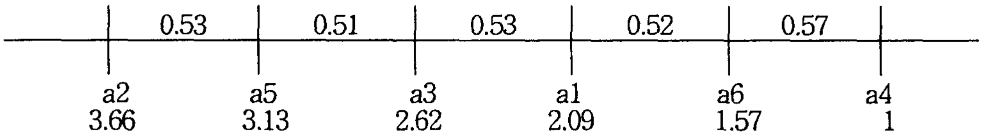
위치적 조건에 대한 α-level sets은 다음과 같다.

α	S_α	α	S_α
0.66	{(a2, a4)}	0.56	{(a5, a6)}
0.63	{(a5, a4)}	0.55	{(a2, a3)}
0.61	{(a3, a4)}	0.54	{(a3, a6), (a5, a1)}
0.60	{(a2, a6)}	0.53	{(a2, a5), (a3, a1)}
0.59	{(a1, a4)}	0.52	{(a1, a6)}
0.58	{(a2, a1)}	0.51	{(a5, a3)}
0.57	{(a6, a4)}		

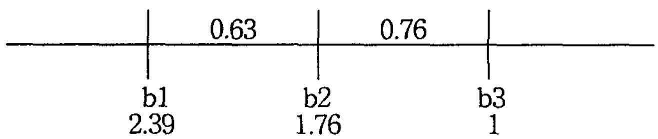
Blin-Whinston절차에 따라 다음과 같이 선호순위를 구할 수 있다.

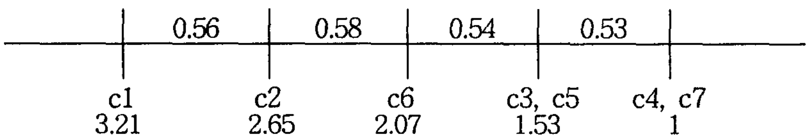
{(a2, a5, a3, a1, a4)}

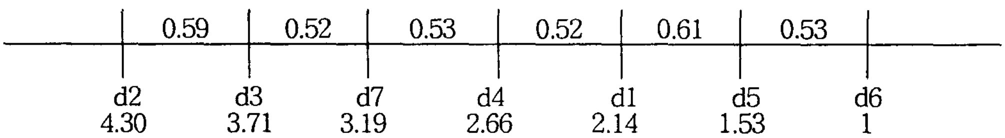
위치적 조건의 하위속성에 대한 순위를 선분상에 나타내면 다음과 같다.



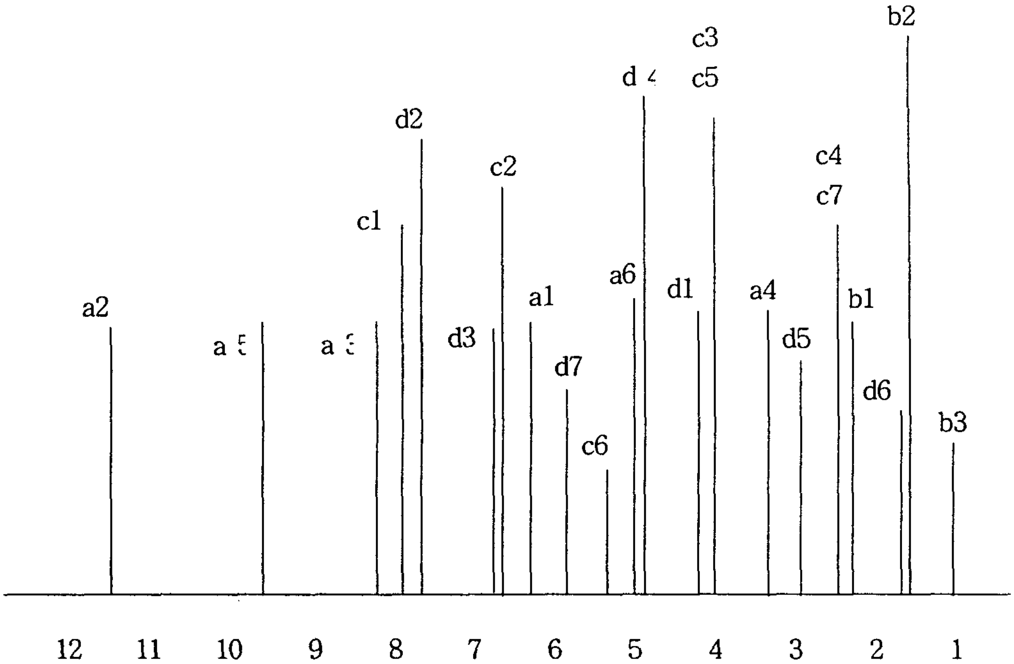
위와 같은 방법으로 경제적 조건(b), 실내환경조건(c), 옥외환경조건(d)에 대한 순위를 선분상에 나타낼 수 있다.







단계 3 : 아파트의 주거 평가를 위한 23개 속성의 선호순위는 {(a2, a5, a3, c1, d2, d3, c2, a1, d7, c6, a6, d4, d1, c3와c5, a4, d5, c4와c7, b1, d6, b2, b3)}이며, 다음은 이들 속성에 대한 선호도를 나타낸 것이다.



Ⅳ. 결언

연구자[1]는 집단선호모형이 아직도 초보적인 단계이며 집단구성원 개개인의 선호를 집단선호로 총합하는 과정은 많은 역설들(paradoxes of aggregation)이 뒤따르고 있음을 지적하였다. 집단의사결정을 위한 다속성효용함수모형, 속성에 대한 집단의 동적태도모형, AHP, 서수적 집단선호모형 등은 이를 뒷받침하는 다양한 가정들에 대한 논란이 지금까지도 계속되고 있다.

퍼지이론을 이용한 Blin-Whinston 알고리즘은 집단선호모형에서 요구되는 가정들이 비교적 느슨하며, 결정대안, 목표, 속성 등을 양적으로 판단하기 어려운 집단의사결정상황에서 유용한 도구가 될 수 있다고 본다.

참고문헌

[1] 박대석, "개인 및 집단의사결정을 위한 다속성선호모형," 『중소기업연구』, 제10권 1호, 1988.

[2] 박민용 · 최항식 역, 『퍼지제어시스템』, 대영사, 1990.

[3] 윤지선, "AHP를 이용한 주거입지의 분석," 목포대학교 경영행정대학원 석사학위논문, 1993.

[4] Steinberg, Earle · Dam Rinks, "An Application of The BLIN-WHINSTON Algorithm for Resolving Fuzzy Group Preferences," *Management Science*, Vol. 25, No. 2, 1979.