

GMDH 알고리즘과 다항식 퍼지추론에 기초한 퍼지 다항식 뉴럴 네트워크

Fuzzy Polynomial Neural Networks based on GMDH algorithm and Polynomial Fuzzy Inference

박호성, 윤기찬, 오성권
원광대학교 전기전자공학부, 전라북도 익산시 신용동 344-2 ☎570-749

Ho-Sung Park, Ki-Chan Yoon and Sung-Kwun Oh
School of Electrical & Electronic Engineering, Wonkwang Univ., Iksan, KOREA

ABSTRACT

In this paper, a new design methodology named FPNN(Fuzzy Polynomial Neural Networks) algorithm is proposed to identify the structure and parameters of fuzzy model using PNN(Polynomial Neural Networks) structure and a fuzzy inference method. The PNN is the extended structure of the GMDH(Group Method of Data Handling), and uses several types of polynomials such as linear, quadratic and modified quadratic besides the biquadratic polynomial used in the GMDH. The premise of fuzzy inference rules defines by triangular and gaussian type membership function. The fuzzy inference method uses simplified and regression polynomial inference method which is based on the consequence of fuzzy rule expressed with a polynomial such as linear, quadratic and modified quadratic equation are used. Each node of the FPNN is defined as fuzzy rules and its structure is a kind of neuro-fuzzy architecture. Several numerical example are used to evaluate the performance of out proposed model. Also we used the training data and testing data set to obtain a balance between the approximation and generalization of proposed model.

I. 서론

시스템 모델링 하는데 있어서 가장 중요한 것은 객관적인 모델을 구축하는 것이다.

기존의 모델 구축은 그 시스템의 변수들을 경험적으로 추측할 수 있는 전문가의 선입관이 첨가되기 때문에 객관적인 모델을 구축하기 어렵다. 따라서 객관적인 모델을 구축하기 위해 회귀 분석과 같은 수학적 모델링 방법들이 사용되었다. 그러나 모델링을 하고자 하는 시스템이 복잡하고 대규모의 구조인 경우에는 함수식으로 모델의 표현이 한정되지 않기 때문에 회귀 분석을 적용할 수 없는 경우가 있다. 이러한 문제를 풀기 위해, A. G. Ivakhnenko[1]는 GMDH(Group Method of Data Handling) 알고리즘을 소개하였으며, 본 논문에서 제안한 퍼지 다항식 뉴럴 네트워크 알고리즘은 이런 GMDH 알고리즘을 모델링 방법의 기본 원칙으로 사용하여 모델을 구축하였다. 본 논문에서 제

안된 FPNN(Fuzzy Polynomial Neural Network) 알고리즘은 확장된 GMDH 알고리즘과 회귀 다항식 퍼지추론에 기초한 퍼지 다항식 뉴럴 네트워크로써, 다양한 퍼지 모델의 구조와 파라미터의 평가를 제안한다. 또한 데이터에 있어서 학습 데이터와 테스트 데이터를 이용하여 모델의 근사화 능력과 예측성능 모두를 고려, 실 공정 적용성에 그 방향을 맞추었다. 각 입력 변수의 전반부 퍼지 규칙은 데이터의 최대-최소값을 이용하여 삼각형 또는 가우시안 형태로 멤버십 함수를 정의하였고, 퍼지 추론 방법으로는 간략 및 회귀다항식 추론 방법을 이용한다. 여기서 회귀다항식 추론은 1차, 2차, 변형된 2차 방정식과 같은 다항식을 가진 퍼지 규칙의 후반부 구조에 기초한다. 본 논문의 평가를 위해서 Box와 Jenkins가 사용한 가스로 입출력 데이터[2]를 이용하여 제안된 모델의 타당성과 정확성을 시뮬레이션을 통해 확인한다.

II. 본론

2.1. FPNN 알고리즘

본 논문에서 제안한 FPNN은 GMDH 알고리즘을 기본으로 하고 있다. GMDH 알고리즘 식 (1)과 같이 모델링 하고자 하는 대상 시스템의 입력 변수 x_i 와 x_j , 출력 y 의 쌍에 대해서 2차 방정식을 계산함으로써 알고리즘을 시작한다.

$$y = A + Bx_i + Cx_j + Dx_i^2 + Ex_j^2 + Fx_ix_j \quad (1)$$

식 (1)의 방정식을 사용하여 기존의 m 개의 입력 x_1, x_2, \dots, x_m 에서 출력 y 를 예측하는 2개의 입력을 선택하여 $m(m-1)/2$ 개의 노드의 수를 얻는다. 방정식 y 의 추정모델 \hat{y} 을 추정하여 최종 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{y} = \hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 + \sum_{k_1} c_{k_1} x_{k_1} + \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2} x_{k_1} x_{k_2} + \sum_{k_1, k_2, k_3} c_{k_1 k_2 k_3} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} + \dots \quad (2)$$

이 식을 Ivakhnenko 다항식이라 한다.

이와같은 GMDH 알고리즘을 기반으로 하는 FPNN 알고리즘은 다음과 같다.

[단계 1] 출력변수 y 에 관계하는 n 개의 입력 변수 (x_1, x_2, \dots, x_n)를 설정한다.

[단계 2] 데이터의 특성에 맞는 최적의 모델을 구축하기 위해 모델을 선택한다.

[단계 3] 입력변수 x_1, x_2, \dots, x_n 을 가지고 선택한 모델에 따라 1층과 2층 이상부터 최종 출력층까지 각 노드의 입력변수 수와 퍼지 추론의 후반부 다항식을 결정한다. 각 층에 사용될 후반부 다항식은 다음 표 1과 같다.

표 1. 후반부 다항식

추론 방법	입력수	1	2	3
간략 추론		Constant		
		Linear	Bilinear	Trilinear
회귀다항식 추론			Biquadratic	Triquadratic
		Quadratic	Modified Biquadratic	Modified Triquadratic

[단계 4] 입력변수 x_1, x_2, \dots, x_n 중 각 노드의 선택된 입력에 대해 퍼지 추론을 적용한다.

선택된 입력의 개수에 따라 층 노드의 개수는 $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ 과 같이 정의된다(n : 전체 입력의 수, r : 선택한 입력의 수). 전반부 멤버십 함수는 삼각형과 가우시안 형태로 나누어서 정의하고, 퍼지 추론 방법은 간략 추론과 회귀다항식 추론을 사용한다. 2가지 추론에 의한 퍼지 추론 규칙과 파라미터 동정을 위한 매개변수 추정은 다음과 같다.

i) 간략 추론

후반부가 단일의 상수항만을 가지는 추론법을 간략 추론법이라 한다. 이 모델은 식 (3)과 같은 형태를 가지는 구현 규칙들로 구성된다.

R^n IF x_1 is A_{n1} and \dots and x_k is A_{nk} Then a_{n0} (3)
추론된 값 y^* 는 다음과 같다.

$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ji} y_j}{\sum_{j=1}^n w_{ji}} = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ji} a_{j0}}{\sum_{j=1}^n w_{ji}} \quad (4)$$

후반부 파라미터의 동정은 a_{j0} 로써 입출력 데이터가 주어졌을 때 식 (5)와 같이 최소자승법 (Least square method)에 의해 구해진다.

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (5)$$

ii) 회귀다항식 추론

후반부가 1, 2, 변형된 2차 다항식 형태로 표현된 것으로 회귀다항식 추론이라 한다. 이 경우의 퍼지 모델은 다음과 같은 형태를 가지는 구현 규칙들로 구성된다.

R^n IF x_1 is A_{n1} and \dots and x_k is A_{nk}

$$\text{Then } y = f_n(x_1, \dots, x_k) \quad (6)$$

이로 후반부 다항식이 1차식인 경우의 추론된 값 y^* 는 다음과 같다.

$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ji} y_j}{\sum_{j=1}^n w_{ji}} = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ji} (a_{j0} + a_{j1} x_1 + \dots + a_{jk} x_k)}{\sum_{j=1}^n w_{ji}} \quad (7)$$

후반부 파라미터는 최소자승법에 의한 최소값으로 간략 추론과 같이 식 (5)으로 구해진다.

[단계 5] 선형 회귀분석에는 학습 데이터를 사용하고, 성능지수 E 는 식 (8)을 사용한다.

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2 \quad (8)$$

위 식을 최소화하는 계수들을 구한다(N 은 데이터 수).

각 공정에 맞게 계수들을 추정한 후반부 다항식에 테스트 데이터를 대입하고, 테스트 데이터에 대한 식 (8)의 2승 오차치 E 를 계산한다.

[단계 6] 얻어진 $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ 개의 오차값들에 대해서 값이 작은순으로 배열한다.

[단계 7] [단계 5]에서 얻어진 E_1 이 다음의 부등식을 만족하는 경우에 알고리즘 종료한다.

$$E_1 \geq E_* \quad (9)$$

단, E_* 는 전 층의 2승 오차치 E_1 이다.

[단계 8] 전 층에서의 출력값을 다음 층으로 새로운 입출력을 구성하고, [단계 4]로 간다.

알고리즘이 종료할 경우, 2승 오차치 E_* 을 얻은 후반부 다항식에 전 층의 후반부 다항식을 대입하고 동일한 조작을 제 1층까지 반복하여 최종 추정 모델 \hat{y} 를 얻는다.

2.2 FPNN 구조

본 논문에서 제안한 FPNN 구조는 GMDH 알고리즘과 Polynomial 형태를 결합한 모델 구조에 퍼지 추론 시스템을 추가함으로써 생성되는 구조이며, FPNN 모델의 전체적인 구조를 그림 1과 같이 나타낼 수 있다.

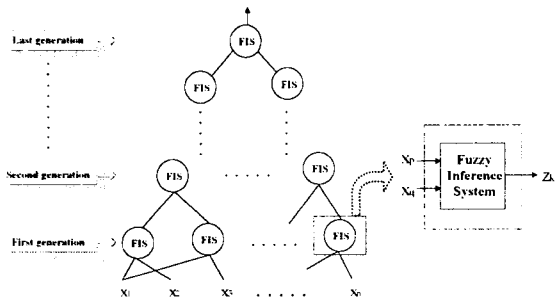
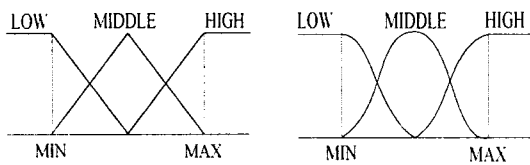


그림 1. FPNN 모델의 구조

그림 1의 퍼지 추론 시스템에서는 전반부 동정에 있어서 최소-최대값을 이용하여 삼각형 또는 가우시안 형태로 멤버십 함수를 정의하며, 그림 2와 같이 나타낼 수 있다.



(a) 삼각형 형태 (b) 가우시안 형태
그림 2. 멤버십 함수 정의

본 논문에서 제안한 FPNN 구조는 체계적으로 여러 가지 선택으로서 구성할 수 있는데, 본 논문에서는 퍼지 입력에 따라서 구조 1. 각 층에서 동일 입력변수의 수를 가지는 경우와 구조 2. 각 층에서 서로 다른 입력변수의 수를 가지는 경우로 분류하였다.

III. 시뮬레이션

제안한 FPNN 알고리즘의 타당성 및 유용성을 평가하기 위해 Box와 Jenkins의 가스로 시계열 입출력 데이터[2]를 사용하여 가스로의 연소된 이산화탄소의 농도를 모델링 한다. 모델링을 하기 위한 입력 변수는 $u(t-3)$, $u(t-2)$, $u(t-1)$, $y(t-3)$, $y(t-2)$, $y(t-1)$ 이고, 출력변

수는 $y(t)$ 이다. 여기서 $u(t)$ 는 가스 흐름율이고 $y(t)$ 는 연소된 이산화탄소의 농도이다. 표 2에 나타난 결과값들은 구조 1에 해당하는 각 층에서 동일 입력변수의 수를 가지는 경우를 나타낸 것이다. 입력은 2입력을 사용하였으며 멤버십 함수의 수는 (2×2) 을 적용하였다.

표 2. 동일 입력변수의 수를 가지는 경우
(a) 동일 차수를 가지는 경우

Type	삼각형		가우시안	
	PI	E_PI	PI	E_PI
Type 1	0.021	0.110	0.230	0.449
Type 2	0.021	0.121	0.016	0.116
Type 3	0.019	0.451	0.014	0.308
Type 4	0.016	0.123	0.014	0.130

(b) 서로 다른 차수 및 변형된 형태의 차수를 가지는 경우

Type	삼각형		가우시안	
	PI	E_PI	PI	E_PI
Type2->Type1	0.021	0.122	0.094	0.211
Type3->Type1	0.051	0.117	0.090	0.237
Type4->Type1	0.032	0.117	0.094	0.210
Type3->Type2	0.022	0.139	0.014	0.131
Type4->Type2	0.024	0.124	0.024	0.129
Type1->Type3	0.016	0.138	0.071	0.290
Type2->Type4	0.018	0.119	0.012	0.125

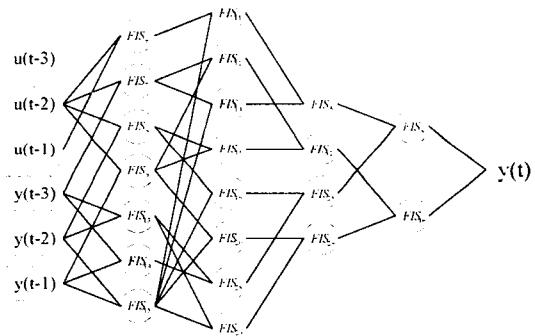


그림 3. 표 2-(a)에서 Type1의 모델 구조

그림 3은 동일 입력 변수를 가지는 경우의 FPNN 알고리즘 모델을 나타낸 것으로 표 2-(a)의 2입력(2×2) 결과값 중 Type1을 선택하였으며, 이때 PI는 0.021, E_PI는 0.110이다.

표 3은 구조 2에 해당하는 각 층에서 서로 다른 입력변수의 수를 가지는 경우로써 2입력(2×2)과 3입력($2 \times 2 \times 2$)을 상호 결합한 모델을 사용하였다. 3입력에서 2입력으로 갈 때 동일 차수의 경우 선형의 구조에서, 서로 다른 차수 및 변형된 형태의 경우에 후반부 구조가 복잡한 형태에서 좋은 결과를 얻을 수 있다.

표 3. 서로 다른 입력변수의 수를 가지는 경우
(a) 동일 차수를 가지는 경우

Type	삼각형		가우시안	
	3입력 -> 2입력		3입력 -> 2입력	
	PI	E_PI	PI	E_PI
Type 1	0.032	0.104	0.070	0.239
Type 2	0.016	0.128	0.010	0.151
Type 3	0.027	0.370	0.007	1.230
Type 4	0.011	0.163	0.012	0.224

(b) 서로 다른 차수 및 변형된 형태의 차수를 가지는 경우

Type	삼각형		가우시안	
	3입력 -> 2입력		3입력 -> 2입력	
	PI	E_PI	PI	E_PI
Ty2->Ty1	0.025	0.118	0.016	0.147
Ty4->Ty1	0.021	0.142	0.012	0.224
Tv4->Ty2	0.012	0.169	0.012	0.224
Tv1->Tv4	0.022	0.100	0.020	0.133
Tv2->Tv4	0.018	0.128	0.014	0.142
Tv1->Tv2	0.025	0.103	0.029	0.133

기존의 모델과 본 논문에서 제시한 FPNN 모델과의 성능비교를 표 4에 보였다. 이 표에서 보여주듯이 제안된 모델은 기존의 모델들에 비해 우수한 성능을 가진다.

표 4. 기존의 퍼지모델과 동정오차비교

모델		Performance Index			
		PI	PI	E_PI	
Tong's model[3]		0.469			
Pedrycz's model[4]		0.320			
Sugeno's model[5]		0.068			
퍼지 GMDH[6]		0.062			
Park's model[7]		0.055			
Oh's model[8]		0.123	0.020	0.271	
Kim's model[9]			0.034	0.244	
Our model	구조 1	case 1	0.045	0.016	0.116
		case 2	0.050	0.018	0.119
	구조 2	case 1	0.036	0.010	0.151
		case 2	0.040	0.014	0.142

IV. 결론

본 논문에서는 비선형 요소가 많은 시스템의 체계적이고 효율적인 모델을 얻기 위해 GMDH 알고리즘의 확장된 구조에 퍼지 추론 시스템을 융합한 퍼지 다항식 뉴럴 네트워크 모델을 제안하였다. 모델의 전반부 퍼지 규칙은 삼각형 및 가우시안 형태로 멤버십 함수를 정의하였으며, 규칙의 후반부 퍼지 추론 방법에는 간략 및 회귀다항식 추론 방법을 이용하였다. 또한

각 층에서 동일 입력변수의 수를 가지는 경우와 서로 다른 입력변수의 수를 가지는 경우로 분류하였다. 본 논문에서의 FPNN 구조는 기존의 신경망과 같이 고정되어있지 않고 각 형태에 따라 다양한 모델로 설계할 수 있으며 이러한 모델은 본 논문에서 보여준 것처럼 비선형 공정뿐만 아니라 시계열 데이터에 대해서도 매우 정밀한 예측 성능을 가지고 있다.

감사의 글

이 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음(KRF-98-001-01048).

V. 참고문헌

- [1] A. G. Ivahnenko, "The group method of data handling; a rival of method of stochastic approximation", *Soviet Automatic Control*, 1-3, pp.43-55, 1968.
- [2] J. S. Roger Jang and C.T. Sun, "Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference systems", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4(1):156-159, Jan. 1993.
- [3] R. M. Tong, "The evaluation of fuzzy models derived from experimental data", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 13, pp.1-12, 1980.
- [4] W. Pedrycz, "An identification algorithm in fuzzy relational system", *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 13, pp.153-167, 1984.
- [5] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy indetification of systems and its applications to modeling and control", *IEEE Trans Syst. Cybern.*, Vol. SMC-15, No. 1, pp.116-132, 1985.
- [6] 오성권, 노석범, 황형수, "퍼지 GMDH 모델과 하수처리공정에서의 응용", 한국 퍼지 및 지능 시스템 학회 추계학술대회 논문집 제 5권 제 2호, pp.153-158, 1995년 11월.
- [7] Mignon Park, Euntai Kim, Minkee Park, Seunghwan Ji, "A New Approach to Fuzzy Modeling", *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, Vol. 5, No. 3, Aug. 1997.
- [8] J.-S. R. Jang, "ANFIS: Adaptive-Network-based Fuzzy Inference Systems", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 23, pp. 665-685, May 1993.
- [9] S. K. Oh, and W. Pedrycz, "Identification of Fuzzy Systems by means of an Auto-Tuning Algorithm and Its Application to Nonlinear Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, 2000. (To appear)
- [10] 오성권, "퍼지모델 및 제어이론과 프로그램", 기다리출판사, 1999년 3월.