

에파인 국소모델을 갖는 TS퍼지 시스템을 위한 제어기 설계방안: 도립진자 문제를 중심으로 한 고찰

Controller synthesis procedure for the TS fuzzy systems with affine local model :

A study focusing on the inverted pendulum control problem

곽기호 · 박주영

Kiho Kwak, Jooyoung Park

고려대학교 제어계측공학과

요 약

본 논문은 에파인 국소모델을 갖는 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템의 제어에 관하여 다룬다. 여기서 사용하는 TS 퍼지 모델은 실제 모델의 비선형 미분 방정식의 근사로부터 유도된다. 그리고 이 모델을 바탕으로 비례 입력행렬을 가지는 시스템에 대해 안정화시킬 수 있는 TS 퍼지 제어기를 구한다. 본 논문의 설계 과정은 도립진자 제어를 통해 검증한다.

I. 서 론

일반적으로 제어기를 설계하기 위해서는 제어하고자 하는 실제 모델의 동적 특성을 비선형 미분 방정식의 근사로부터 유도를 한다. 그리고 유도된 모델을 안정화시킬 수 있는 제어기를 설계한다. 하지만 디자인 모델을 설계함에 있어서 선형화를 하게되면 비선형 시스템 원래의 특성을 잘 반영하지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 따라서 본 논문에서는, 도립 진자의 제어기를 Takagi-Sugeno가 제안한 TS 퍼지 제어기를 이용하여 설계하되 상수항(constant term)을 추가하여 실제 모델에 더 가까운 디자인 모델을 만든다. 그리고 제어기를 설계함에 있어서 비례 입력 행렬 $\gamma_i B$ 를 가지는 TS 퍼지 시스템에 대해서 선형행렬부등식(LMI, Linear Matrix Inequality) [1]을 이용한 제어기 설계 방법론[4]을 제시한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다 : 2장에서는 TS 퍼지 모델과 안정도 및 선형행렬부등식에 대하여 간략히 소개하고, 3장에서는 비선형 시스템을 TS 퍼지 모델로 표현한 후, 이 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어기를 LMI를 이용하여 설계하고, 4장에서는 제시된 방법론의 효과를 입증하기 위하여 예제를 다룬다. 마지막으로 5장에서는 결과를 제시한다.

II. 기초 이론 : TS 퍼지 모델과 안정도, 선형행렬부등식

이 장에서는 일반화된 TS 퍼지 모델에 대해서 알아보고, 안정화시킬 수 있는 조건과 제어기 설계에 이용할 LMI에 대하여 간략히 설명한다. TS 퍼지 모델의 IF-THEN

규칙은 다음과 같은 형식으로 주어진다.

Plant 규칙 i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and ... and $z_g(t)$ is M_{ig} ,
THEN

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i=1, \dots, r. \quad (1)$$

여기서, $z_i(t)$ 와 M_{ij} , $i=1, \dots, r$, $j=1, \dots, g$ 는 각각 전제부 변수와 퍼지 집합이고 r 은 IF-THEN 규칙의 개수이다. TS 퍼지 모델의 일반적인 추론 방법에 의하면, 전체 시스템의 상태 방정식은 다음과 같이 $z(t)$ 에 따라 변하는 가중평균의 형태로 표현된다:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i u(t) \}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (2)$$

여기에서 입력, 상태 및 전제부 변수의 차원은 다음과 같다: $u(t) \in R^p$, $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^g$. 방정식(2)에서 하중함수(weight functions)는 다음과 같이 정의된다:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(z_j(t)).$$

여기서, $M_{ij}(z_j(t))$ 은 $z_j(t)$ 가 퍼지 집합 M_{ij} 에 속하는 정도이다. 하중함수 w_i 는 음이 아니고, 일반적

으로 다음을 만족한다:

$$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0, \quad \text{for all } t > 0 \quad (3)$$

본 논문에서는 (3)이 항상 만족되는 것과 벡터 $x(t)$ 와 $z(t)$ 가 실시간으로 측정 가능함을 가정한다. 하중 함수를

$$h_i(z(t)) \triangleq \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

로 정규화하면 상태방정식 (2)는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i u(t) \} \quad (4)$$

여기서, 표준화된 하중함수 h_i 는 $h_i(z(t)) > 0, i=1, \dots, r$ 과 $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \forall t \geq 0$ 을 만족한다. 전제 변수 $z(t)$ 는 입력 $u(t)$ 와는 무관함을 가정한다. 여기에서, $z(t)$ 는 측정되어질 수 있고, 각 하중함수 h_i 는 쉽게 계산될 수 있기 때문에 변수 벡터 $\theta(t) \triangleq [h_1(z(t)), \dots, h_r(z(t))]^T$ 는 시스템의 동작 중에 실시간으로 구할 수 있다. 이러한 사실은 효과적인 제어 기법의 고안을 가능하게 해준다.

$u(t)=0, \forall t \geq 0$ 인 경우에, TS 퍼지 시스템(4)는 다음과 같은 형태가 된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (5)$$

리아푸노프(Lyapunov) 안정도 이론에 따르면, 시스템 (5)는 다음을 만족하는 대칭행렬 Q 가 존재하면 이차 안정이다:

$$Q > 0, \quad A_i Q + Q A_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (6)$$

주목할 점은 위 부등식의 왼편은 행렬변수 Q 에 대하여 모두 선형이라는 점이다. 부등식(6)을 만족하는 Q 를 구하거나, 그러한 Q 가 존재하지 않는다는 것을 결정하는 것은 LMI feasibility problem으로 불리는 콘벡스 문제이다. 선형행렬부등식은 다음 형태의 구속조건을 의미한다:

$$A(x) \triangleq A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < 0, \quad (7)$$

여기서, $x \triangleq (x_1, \dots, x_N)$ 는 변수, A_0, \dots, A_N 은 대칭행렬이고 “ $<$ ”는 음의 정부호(negative definite)임을 의미한다. LMI feasibility problem 및 선형행렬부등식 관련 콘벡스 최적화 문제는 모두 Interior Point method에 의해 해결될 수 있으며, 이를 풀 수 있는 상용 소프트웨어도 나와있다 (예: Matlab LMI Control Toolbox)[2]. 많은 제어문제들이 선형행렬부등식으로 수식화 될 수 있는데, 시스템 (5)의 이차 안정도도 그 중의 하나이다.

III. LMI를 이용한 퍼지 제어기 설계

이 장에서는 우리가 제어하고자 하는 시스템의 실제 모델을 사용하여 TS 퍼지 모델을 만든다. 여기서 우리는 실제 모델이 (8)과 같이 표현될 수 있는 경우만을 고려한다[3].

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (8)$$

그리고 (8)에 대해서, 상수항을 포함한 TS 퍼지 근사모델은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i u(t) + a_i \} \quad (9)$$

이때 우리는 x_0 근처에서 (10)과 (11)을 만족하는 A_i, B_i , 그리고 상수항 a_i 를 얻기를 원한다.

$$f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + g(x)u \approx A_i x + B_i u + a_i, \quad \forall u \quad (10)$$

$$f(x_0) + g(x_0)u = A_i x_0 + B_i u + a_i, \quad \forall u \quad (11)$$

따라서 테일러 시리즈(Taylor's series)를 이용하여 (12)를 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} &= A_i, \\ g(x_0) &= B_i, \end{aligned} \quad (12)$$

$$f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x_0) = a_i.$$

이제는 (12)에서 구한 A_i, B_i , 그리고 상수항 a_i 를 이용하여 실제 모델(8)을 안정화시킬 수 있는 TS 퍼지 제어기를 선형행렬부등식을 이용하여 풀어보자.

먼저 비례적인 입력 행렬을 갖는 TS 퍼지 시스템 집합을 $TS(\gamma, B)$ 라 정의하자. 즉,

$$\frac{B_1}{\gamma_1} = \frac{B_2}{\gamma_2} = \dots = \frac{B_r}{\gamma_r} = B \quad (13)$$

여기서 $\gamma_1, \dots, \gamma_r > 0$ 이고 $B \in R^{n \times p}$ 이다. 또한 본 논문에서는 (13) 조건이 만족되는 경우만을 고려한다. 이러한 TS 퍼지 시스템은 다음의 상태 방정식으로 나타난다:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ A_i x(t) + B_i u(t) + a_i \} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ A_i x(t) + \gamma_i B u(t) + a_i \} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^r \gamma_i h_i(z(t)) \right\} \\ &\quad \cdot B u(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) a_i \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, TS 퍼지 제어기를 약간 변형시켜주면 좀더 간단하고 편리한 해를 구할 수 있다. 특별히 다음과 같이 정의되는 변형된 TS 퍼지 제어기를 고려해 보자:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))(K_i x(t) + y_i)}{\sum_{i=1}^r \gamma_i h_i(z(t))} \quad (15)$$

여기에서 y_i 는 LMI를 이용하여 제어를 설계하기 위해서 (16)을 만족해야하므로 $\alpha_i + B_i y_i = 0$ 를 만족한다. 따라서 변형된 TS 퍼지 제어를 시스템(14)에 적용하면, 다음의 식을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\alpha_i \\ &+ \frac{\left\{ \sum_{i=1}^r \gamma_i h_i(z(t)) \right\} B \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) + y_i \right\}}{\sum_{i=1}^r \gamma_i h_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i + BK_i\} x(t) \end{aligned} \quad (16)$$

제어기(15)는 플랜트의 TS 퍼지 모델(1)과 동일한 퍼지 집합을 공유하는 다음의 TS 퍼지 규칙들로부터 유도됨에 유의하자:

제어기 규칙 i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and, ..., and $z_r(t)$ is M_{ir} ,
THEN

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))(K_i x(t) + y_i)}{\sum_{i=1}^r \gamma_i h_i(z(t))}$$

폐루프(16)는 polytopic 형태이므로, 안정도 기준(6)은 다음을 구하는데 사용되어질 수 있다: 만약

$$Q > 0, \quad (A_i + BK_i)Q + Q(A_i + BK_i)^T < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (17)$$

을 만족하는 대칭행렬 Q 가 존재한다면, 폐루프(16)는 안정하다. 여기서 새로운 변수 $Y_i = K_i Q$, $i=1, \dots, r$, 을 도입하면 안정도 문제(17)는 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$Q > 0, \quad QA_i^T + Y_i^T B^T + A_i Q + BY_i < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (18)$$

IV. 모의 실험

다음에서는 이상에서 확립된 퍼지 제어를 위한 설계 방법론의 타당성을 확립하기 위해 독립진자의 제어 문제를 고려한다. 수레 위에 붙은 독립진자의 운동은 다음과 같은 비선형 상태 방정식으로 묘사될 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{g \sin(x_1) - amlx_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, x_1 은 진자가 수직 방향을 기준으로 몇 라디안(rad)만큼 기울었는지를 나타내고, x_2 는 x_1 에 대한 미분, 즉 진자의 위치에 대한 각속도이다. g 는 중력 가속도 상수 9.8 m/sec^2 이고, m 과 M 은 각각 진자와 수레의 질량이다. $2l$ 은 진자의 길이(단위는 m)이고, u 는 수레에 가해지는 힘의 크기(단위는 N)이다. 그리고 a 는 $1/(m+M)$ 으로 정의되는 상수이다. 본 논문의 시뮬레이션에는 [3]에서 사용된 것과 똑 같은 시스템을 사용한다. 이 시스템을 묘사하는 파라미터는 다음과 같다:

$$m = 2.0 \text{ (kg)}, M = 8.0 \text{ (kg)}, 2l = 1.0 \text{ (m)}.$$

진자의 초기 위치가 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 의 범위에 있을 때 수레에 적절한 힘 u 를 가하여 진자가 수직으로 설 수 있도록 평형을 잡는 제어 문제를 생각해 보자. 본 논문의 방법론을 이러한 제어 문제에 적용하기 위해서는, 우선 (19)의 시스템을 충분히 가깝게 근사할 수 있는 TS 퍼지 모델을 구해야 한다. 이를 위해, 진자가 수직 위치 부근에 있는 경우와 수평 위치 부근에 있는 경우를 중심으로 각각 IF-THEN 규칙을 구성하면 다음과 같은 TS 퍼지 모델이 얻어진다:

규칙 1: IF x_1 is M_{11} (about 0),

$$\text{THEN } \frac{dx}{dt} = A_1 x + B_1 u + \alpha_1.$$

규칙 2: IF x_1 is M_{21} (about $-\pi/2$),

$$\text{THEN } \frac{dx}{dt} = A_2 x + B_2 u + \alpha_2.$$

규칙 3: IF x_1 is M_{31} (about $+\pi/2$),

$$\text{THEN } \frac{dx}{dt} = A_3 x + B_3 u + \alpha_3.$$

여기서, 각 국소 선형 모델의 시스템 행렬 A_i 와 입력 행렬 B_i 는 각각 아래와 같다:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\beta\{(4l/3 - aml\beta^2) + 2aml\alpha^2\}}{(4l/3 - aml\beta^2)^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1.5359)\{g\beta(4l/3 - aml\beta^2) + 2aml\alpha^2\}}{(4l/3 - aml\beta^2)^2} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\delta\{(4l/3 - aml\delta^2) + 2aml\gamma^2\}}{(4l/3 - aml\delta^2)^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\delta}{4l/3 - aml\delta^2} \end{bmatrix},$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1.5359)\{g\delta(4l/3 - aml\delta^2 + 2aml\gamma^2)\}}{(4l/3 - aml\delta^2)^2} \end{bmatrix}$$

여기서 $\alpha = \sin(-88^\circ)$, $\beta = \cos(-88^\circ)$, $\gamma = \sin(88^\circ)$, 그리고 $\delta = \cos(88^\circ)$ 라고 한다.

그리고 시스템에 대한 TS 퍼지 근사화는 다음과 같은 형태로 변화될 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t) + a_i\} \quad (20)$$

퍼지 모델(20)에서, 상태 벡터 x 와 입력 벡터 u 는 각각 $x \in R^2$ 와 $u \in R^1$ 이다. 또한, $h_i(x_1(t)) \geq 0$,

$i = 1, 2, 3$ 이고, $\sum_{i=1}^3 h_i(x_1(t)) = 1$ 을 항상 만족한다.

위에서 구한 결과를 토대로 비례입력[4]을 가지는 입력 행렬에 대한 제어를 설계해보자. 먼저 (13)에 의해

$$B \triangleq B_2 = B_3,$$

$$\gamma_1 = 0.17642 / 0.005236, \gamma_2 = \gamma_3 = 1.$$

라 정의한 후 MATLAB LMI Control Toolbox[2]를 이용하여, 선형행렬부등식(18)을 풀면 다음 값을 얻는다:

$$Q = \begin{bmatrix} 78.6881 & -33.7235 \\ -33.7235 & 78.6881 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = [274930 \quad -103870],$$

$$Y_2 = [25051 \quad 3219],$$

$$Y_3 = [25051 \quad 3219].$$

다음으로, 국소이득 $K_i = Y_i Q^{-1}$, $i = 1, \dots, r$, 를 구한다:

$$K_1 = [3587 \quad 217.2],$$

$$K_2 = [411.4576 \quad 217.2460],$$

$$K_3 = [411.4576 \quad 217.2460].$$

마지막으로 $a_i + B_i y_i = 0$ 로부터 상수 값 y_i 를 구한다:

$$y_1 = 0, y_2 = 2610.7273, y_3 = -2610.7273.$$

위의 결과를 바탕으로 다음의 TS 퍼지 제어를 최종적으로 얻을 수 있다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 h_i(x(t))(K_i \dot{x}(t) + y_i)}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i h_i(x(t))}. \quad (21)$$

이 제어를 실제 모델(19)에 적용하면 그림2,3과 같은 결과를 얻을 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템의 제어를 설계함에 있어서 도립진자의 경우를 예로 시스템을 안정화시킬 수 있는 TS 퍼지 제어를 설계하였다. 여기서는 상수항(constant term)을 가지는 TS 퍼지 시스템의 제어를 설계함으로써 전체 시스템의 안정도를 보장하고 있다. 제시한 방법론은 선형행렬부등식의 풀이를 요구하는데, 이는 Interior Point method 등의 수치해법 또는 상용 LMI 소프트웨어를 이용하면 정확한 해를 신뢰성 있게 구할 수 있는 장점을 지닌다. 이러한 장점은 도립진자 제어문제에 대한 모의실험을 통하여 실험적으로 확인할 수 있었다. 추후 연구 과제로는 도립진자뿐 아니라 다른 비선형 시스템에서도 본 방법론을 적용하여 제어를 설계하는 연구가 계속 진행되어야 할 것으로 생각된다.

VI. 참고 문헌

- [1] S. Boyd, L. ElGhaoui, E. Feron and V. Balakrishna, "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15 (SIAM, Philadelphia, 1994).
- [2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, "LMI Control Toolbox (MathWorks Inc)", Natick, MA, 1995).
- [3] Marcelo C.M. Teixeira and Stanislaw H. Zak, "Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems using Fuzzy Models", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 7, 133-142, 1999.
- [4] 김진성, 박주영, 박대회, "안정도를 보장하는 TS 퍼지 제어기의 설계: 선형행렬부등식을 이용한 풀이", 퍼지 및 지능시스템 학회 논문지 제8권 1호, pp. 51-60, 1998.

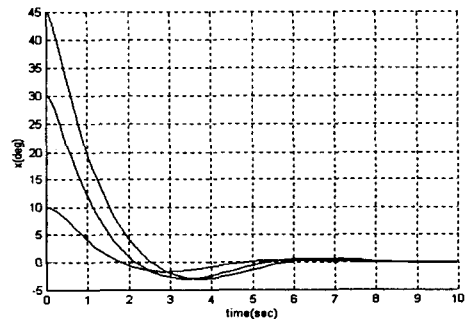


그림 1. 초기 값 (1)10, (2)30, (3)45 (deg)

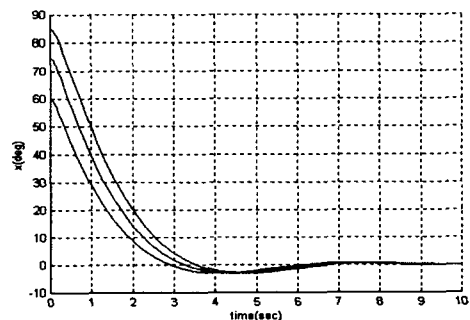


그림 2. 초기 값 (1)60, (2)75, (3)85 (deg)