

마스킹 데이터를 이용한 베이지안 추정

Bayesian Estimation of System & Component Reliability Using Masked Data

김 종 결, 박 창 규
성균관대학교 시스템경영공학부

< Abstract >

다양한 컴포넌트들로 구성된 시스템의 수명 데이터는 시스템 컴포넌트들의 신뢰성을 추정하는데 많이 사용된다. 하지만 비용이나 고장진단의 기술적 문제 때문에 시스템 고장의 정확한 원인을 밝혀내기는 어렵다. 시스템이나 컴포넌트의 수명 데이터 중 정확한 고장원인을 알 수 없는 데이터를 마스크 데이터라 한다. 본 연구는 마스크데이터와 베이지안 추정의 연구방향을 살펴보고, 그리고 고장률의 비정보 사전분포를 이용하여, 컴포넌트가 직렬로 구성된 시스템의 수명 데이터가 마스크 데이터를 갖는 지수분포의 시스템 컴포넌트 고장률을 추정한다.

key word - Masked data, Bayesian estimation

1. 서론

고객에게 제품의 품질을 보증하는데는 기능적인 측면보다는 제품의 모든 성질을 만족해야 한다. 가격 경쟁력에서 품질 경쟁력으로 이전해 나가는 양상도 이를 반영하고 있는 것이다. 예전의 품질특성이 흠, 결점수라면 지금의 품질특성은 제품의 수명과 관련된 즉, 제품의 평균고장시간, 보증기간 동안 고장날 제품의 비율, 품질보증비용 등이다.

제품의 품질특성치들을 구하기 위한 데이터들은 짧은 시험 시간으로 빠르게 제품의 품질 특성을 파악 할 수 있기 때문에 실험실에서 행해지는 수명시험(life testing), 환경시험(environment testing) 등에 의해 얻어지는 실험실 데이터를 많이 사용한다.

하지만, 가장 이상적인 고장데이터는 제품의 실제 사용현장에서 얻어져야 한다. 실험실에서 수명시험은 시험환경이 실제환경과 다를 수밖에 없고, 시험에서 얻어진 데이터들은 사용현장에서의 제품 수명에 대한 정보를 왜곡하여 나타낼 위험이 있다.

제품의 수명데이터는 여러 부품들로 구성된 시스템에서 나온 데이터들이다. 하지만 고장 원인을 조사하기에는 비용이 많이 들고, 많은 시간이 소요되므로 적절한 진단을 하지 못하고 있다. 따라서 지금까지의 분석방법은 대부분 특정한 시스템에 대한 분석이 진행돼왔다. 사용현장에서는 시험장비가 없어 고장원인을 정확히 알 수가 없다. 서비스센터에 들어오는 데이터는 기초적인 고장원인의 표시를 달아 기록된 데이터 - Masked(masked) 데이터 -가 있다. 하지만, 제품의 각 시스템에 따른 부품별 고장원인을 조사 할 수 있다면 제품에 대한 정보를 정확하게 추정할 수 있을 것이다.

본 연구는 이러한 수명데이터(Masked 데이터)들에 대한 분석방법을 정리하고, 그리고 수명데이터의 사전정보를 이용한 Bayesian 분석방법을 제시하고자 한다.

2. 기존 연구 고찰

2.1 사용현장 데이터의 신뢰성 분석

고장원인이 있는 제품에 대한 특성치 추정의 많은 연구들은 제품수명데이터들에 따라 다르다. 가속수명시험 데이터, 사용현장 데이터 그리고 제품 시스템의 고장원인에 기인한 특성치 추정 등의 연구가 진행되고 있다.

사용하는 기호는 다음과 같다.

N	총 시험 제품 수
θ	제품의 수명 모수(벡터)
T_i	제품 i 의 고장시간
x_i	제품 i 에 대한 설명변수(열벡터)
T^0	운영시간 기준으로 정해진 제품의 보증기간
D_1	보증기간 동안 고장난 제품의 집합
D_2	보증기간 동안 고장나지 않고 추적 조사된 제품의 집합
p^*	추적 조사 비율
$f(t x;\theta), F(t x;\theta), \bar{F}(t x;\theta)$	설명변수 x 와 수명모수 θ 가 주어진 경우 수명시간의 확률밀도 함수, 분포함수, 신뢰도 함수

설명 변수가 있을 때 사용된 우도함수를 총 시험제품수와 설명변수에 대한 정보의 양에 따라 세 가지 경우로 나누어 살펴보면 다음과 같다.

i) 총 시험 제품수와 보증기간 동안 고장나지 않은 제품에 대한 설명변수를 모를 경우 보증기간 동안에 고장난 제품의 고장시간과 설명변수를 이용하면 우도 함수는

$$L_T(\theta) = \prod_{i: t_i \leq T^0} \frac{f(t_i | x_i; \theta)}{F(T^0 | x_i; \theta)}$$

이 되고, 이를 최대화하는 θ 값을 구함으로써 최우추정량 $\hat{\theta}$ 를 구할 수 있다.

ii) 총 시험 제품수 N 과 모든 시험제품에 대해 설명변수 x_i 를 알고 있을 경우 이 경우의 우도함수는

$$L_F(\theta) = \prod_{i: t_i \leq T^0} f(t_i | x_i; \theta) \prod_{i: t_i > T^0} \bar{F}(T^0 | x_i; \theta)$$

과 같으므로 θ 에 대한 추정량을 구할 수 있다.

iii) 총 시험 제품수는 알고 있고, 보증기간 동안 고장나지 않은 제품에 대해서는 일정비율 p^* 만큼 추적 조사하여 설명변수의 값을 알 수 있을 경우

Kalbfleisch와 Lawless(1988)이 제안한 의사우도함수

$$L_p(\theta) = \prod_{i \in D_1} f(t_i | x_i; \theta) \prod_{i \in D_2} [\bar{F}(T^0 | x_i; \theta)]^{1/p^*}$$

를 이용하여 θ 에 대한 추정량을 구한다.

iv) 다수의 고장원인이 있는 경우

배 도선(1995a,b)는 다수의 고장원인이 있는 제품의 현장데이터에 대한 분석방법을 제안

한 의사우도함수

$$L_p(\theta) = \prod_{i \in D_1} \prod_{m=1}^k \left[f_m(t_i | x_i; \theta) \prod_{l \neq m} \overline{F}_l(t_i | x_i; \theta) \right]^{I_{r_i=m}} \cdot \prod_{i \in D_2} \left[\prod_{m=1}^k \overline{F}_m(T^0 | x_i; \theta) \right]^{1/b}$$

를 이용하여 θ 에 대한 추정량을 구한다.

2.2 마스크 데이터를 이용한 신뢰성 분석

다양한 컴포넌트로 구성된 제품의 수명데이터는 각 컴포넌트의 신뢰성을 추정하는데 사용되고 추정된 특성치들의 정보는 제품의 개선과 신뢰성 예측 자료로 이용된다. 이렇게 추정된 특성치들은 제품이 만들어진 후, 컴포넌트의 특성치들이 반영되기 때문에 특정한 조건 하에서만 유용하다고 할 수 있다.

시스템의 구성이 직렬이고 경쟁적 고장이 있다는 가정 하에서 컴포넌트의 신뢰성 추정을 다루는 연구가 많이 진행되어 왔다. 그리고 시스템의 고장이 발생한 고장시간과 고장원인으로 모델을 설정하고 컴포넌트의 특성치를 추정한다.

시스템의 고장원인은 실제로 잘 관측되지 않고, 고비용의 고장원인 분석과 고장원인별 진단이 제대로 이루어지지 않기 때문에 완전한 조사는 이루어지지 못하고 있다.

시스템의 고장원인을 정확히 알 수 없는 고장이 관측된다면 컴포넌트의 특성치는 각 시스템에서 일어나는 고장의 원인에 따른 추정을 할 수밖에 없다. 이렇게 정확한 고장원인을 알 수 없는 데이터를 Masked 데이터라 한다.

Miyakawa(1984)는 경쟁적 고장원인이 있고 두 개의 컴포넌트로 구성된 시스템의 모수 추정과 비모수 수명시간 추정을 다루었고, Usher and Hodgson(1988)은 지수분포를 따르는 컴포넌트의 Masked 데이터를 Newton 방법으로 추정하였다. Doganaksoy(1991)은 3개의 컴포넌트에서 지수분포를 따르는 Masked 데이터에 대수-표본 접근방법을 적용한 신뢰구간 추정에 대해 연구하였다. Lin, Usher and Guess(1993)는 Usher and Hodgson의 내용을 확장하여 지수분포를 따르는 컴포넌트의 Masked 데이터를 이용한 정확한 최우추정량 연구를 하였고, Usher(1996)는 수명분포가 와이블분포를 따르는 경우 IMLEP 방법을 이용하여 최우추정량을 연구하였다.

▶ 사용 기호

사용하는 기호는 다음과 같다.

T_{ij}	시스템 i 의 컴포넌트 j 의 수명시간
X_i	시스템 i 의 수명시간, $X_i = \min(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{in})$
$f_j(t), \overline{F}_j(t)$	컴포넌트 j 의 수명분포(확률밀도함수, 생존함수)
S_i	시스템의 고장을 일으키는 컴포넌트의 부분집합
L	우도함수
\mathcal{L}	대수우도함수

▶ 가정

- ① T_{ij} 는 확률변수
- ② 시스템 i 의 관측수는 n 개의 (x_i, S_i)
- ③ 시스템은 1-out-of-J:F
- ④ Masked은 고장원인들 중 s 개가 독립적으로 발생한다.

▶ 우도함수(Usher and Hodgson(1988))

다른 모든 컴포넌트는 생존해 있고 컴포넌트 j 의 수명 X_i 의 조건부 확률밀도함수는

$$f_j(x_i) \prod_{l=1, l \neq j}^I \bar{F}_l(x_i)$$

n 개 시스템의 우도함수는

$$L = \prod_{i=1}^n \left[\sum_{j \in S_i} \left\{ f_j(x_i) \prod_{l=1, l \neq j}^I \bar{F}_l(x_i) \right\} \right]$$

▶ 지수분포의 경우

$$L = \prod_{i=1}^n \left[\sum_{j \in S_i} \left\{ \lambda_j \exp(-\lambda_j x_i) \prod_{l=1, l \neq j}^I \exp(-\lambda_l x_i) \right\} \right]$$

< 2개의 컴포넌트 시스템 >

n_i = 고장수 $S_i = \{j\}$, $j=1, 2$, $i=1, 2, \dots, n$

n_{12} = 관측된 Masked의 수 $S_i = \{1, 2\}$

$X_{TTT} = \sum_{i=1}^n x_i$, 총 시험시간

$$\ln L = -X_{TTT}(\lambda_1 + \lambda_2) + n_1 \ln \lambda_1 + n_2 \ln \lambda_2 + n_{12} \ln(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_1} = 0 \Rightarrow -X_{TTT} + \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_2} = 0 \Rightarrow -X_{TTT} + \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0$$

특정한 경우의 고장률

$$\hat{\lambda}_1 = (n_1 + n_{12} \frac{n_1}{n_1 + n_2}) / X_{TTT}$$

$$\hat{\lambda}_2 = (n_2 + n_{12} \frac{n_2}{n_1 + n_2}) / X_{TTT}$$

▶ 와이블분포의 경우(Usher (1996) - IMLEP 방법 적용)

Q_j = j 형태의 컴포넌트 수

$S_{i,j}$ = 시스템 i 에서 고장원인이 있는 j 형태의 컴포넌트 수

$$L = \prod_i \left[\ln \left(\sum_j S_{i,j} h_j(t_i) \right) + \sum_j Q_j \cdot \ln(R_j(t_i)) \right]$$

$$h_j(t) = \frac{\beta_j}{\theta_j} \cdot \left(\frac{t}{\theta_j} \right)^{\beta_j - 1}$$

$$R_j(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\theta_j}\right)^{\beta_j}\right)$$

$$L = \sum_i \left[\ln \left(\sum_j S_{i,j} \cdot \left(\frac{\beta_j}{\theta_j} \right) \left(\frac{t_i}{\theta_j} \right)^{\beta_j-1} \right) - \sum_j Q_j \left(\frac{t_i}{Q_j} \right)^{\beta_j} \right]$$

2.3 Bayesian 신뢰성 분석

제품의 품질특성치를 추정함에 있어 데이터를 측정할 때의 환경은 변하지 않는다는 가정을 두고 있다. 하지만 측정 때마다 환경은 변하고, 분포와 모수도 알지 못한다. 하지만 사전에 주어지는 정보는 알고 있다는 것이다. 알고 있는 최소한의 정보를 이용하여 제품의 특성치를 추정하는 방법이 베이저안 방법이다. 베이저안 추정방법은 전문가의 판단이나 통계데이터 등 기업의 최소한의 다양한 정보를 이용할 수 있다.

Calabria and Pulcini(1990)은 불완전 정보를 갖고 지수분포를 따르는 관측중단 데이터의 베이저안 추정방법을 연구했고, Hart(1991)는 전자제품의 ALT 방법과 베이저안 분석을 다루고, Pathak et al.(1991)는 사용조건 분포와 가속시험 함수의 변환함수를 적용한 베이저안 추정을 다루었다. Erto and Giorgio(1996)은 실제 현장의 공학적 관점을 적용한 PBE의 MPBE를 제안하였고, Sarhan(1999)는 고장률 모델을 일반화 시켜 베이저안 추정을 다루었다. Bris(2000)의 연구는 Type I 관측중단 가속시험에서 신뢰성인증시험(RDT)을 실시할 경우 최적시험방법이 주어졌을 때 모수의 분산과 기대치 그리고 고객위험에 대해 베이저안 추정방법에 관한 것을 다루고 있다. 고장률이 섞여있을 때 모수추정에 베이저안 추정방법을 연구했다. Coolen(1997)은 사전정보가 정확하지 않고, Dirichlet 모델의 경우를 고려하여 강건성을 갖는 베이저안 추정방법을 마련하였고, Siu and Kelly(1998)는 PRA(probabilistic risk assessment)에서 베이저안 모수추정에 관한 기본적인 내용들을 기술하고 있다. Castillo et al.(1999)는 고장목에서의 확률 계산과 베이저안 네트워크에서 최상위 사상의 확률을 근사적으로 계산하는 방법으로 FORM(first order reliability method)과 SORM(second order reliability method)을 제시하고 있다. 강상길과 김달호(2000)는 Berger and Pericchi(1996)가 제시한 베이저안 가설검정 기준을 이용하여 와이블 분포의 noninformative prior와 intrinsic Bayes factor의 비교를 보여주고 있다.

2.2.1 고장률 모델의 Bayes 추정

1) 모델

Sarhan(1999)의 고장률 모델은 선형 고장률 모델을 확장하여 일반적 고장률 모델은 다음과 같다.

$$h(t) = a + bt^{c-1}, \quad a, b, c > 0$$

$a=0$: 와이블분포 모델(c 는 형상모수)

$b=0$ or $c=1$: 지수분포 모델

$c=2$: 선형 모델

▶ 가정

① n 개중 r 개가 고장날 때까지 시험이며 독립

② 관측 시간 : $t_1 < t_2 < \dots < t_r$

③ 각 시험개체는 a, b, c 를 갖는 조건 고장률 모델 : $h(t) = a + bt^{c-1}, a, b, c > 0$

④ c 는 기지, a, b 는 사전 지수밀도함수를 따르는 확률변수

$$g(a, b) = \begin{cases} a\beta \exp[-a\alpha - b\beta], & \text{for } a > 0, b > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a, β 는 기지)

⑤ 이차 손실함수

$$L((a, b), (\hat{a}, \hat{b})) = k_1(a - \hat{a})^2 + k_2(b - \hat{b})^2$$

\hat{a}, \hat{b} 는 a, b 의 추정치

▶ 추정

① 확률밀도함수

$$f(t | a, b, c) = (a + bt^{c-1}) \exp\left[-\left(at + \frac{bt^c}{c}\right)\right], a, b, c > 0, t \geq 0$$

② 누적분포함수

$$F(t | a, b, c) = 1 - \exp\left[-\left(at + \frac{bt^c}{c}\right)\right], a, b, c > 0, t \geq 0$$

③ 시간 T 의 주변확률밀도함수

$$f_T(t | a, \beta) = ca\beta\gamma_1(t) / \gamma_2^2(t)$$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (c+1)t^c + cat^{c-1} + c\beta \\ \gamma_2(t) = (t+a)(c\beta + t^c) \end{cases}$$

④ 우도함수

$n, r, t_1, t_2, \dots, t_r$ 의 값을 x 로 표시하면

$$L(x | a, b, c) = \left(\prod_{i=1}^r f(t_i | a, b, c)\right) (\bar{F}(t_r | a, b, c))^{n-r}$$

위 식들을 적용하여 정리하면,

$$L(x | a, b, c) = \left(\prod_{i=1}^r (a + bt_i^{c-1})\right) \exp\{-aS_1 - bS_2\}$$

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r \\ S_2 = c^{-1} \left[\sum_{i=1}^r t_i^c + (n-r)t_r^c \right] \end{cases}$$

3. 마스크 데이터를 이용한 베이지안 추정

수명 데이터가 마스크 데이터인 지수분포를 따르고, 고장률의 사전 분포로는 감마분포를 갖는 시스템 컴포넌트의 고장률을 추정한다. 또한, 고장률은 시스템의 컴포넌트에 관계없이

동일하고 시스템의 컴포넌트가 모두 고장난다고 가정한다.

▶ 사용 기호

사용하는 기호는 다음과 같다.

j	컴포넌트 j
i	시스템 i
T_{ij}	시스템 i 의 컴포넌트 j 의 수명시간
T_i	시스템 i 의 수명, $T_i = \min(T_{i1}, \dots, T_{in})$
$f_j(t), R_j(t)$	컴포넌트 j 의 확률밀도 함수, 신뢰도 함수
X_i	시스템 i 의 수명시간, $X_i = \min(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{in})$
S_i	i 시스템의 고장을 일으키는 컴포넌트의 고장원인 부분집합
L	우도함수
\mathcal{L}	대수우도함수

3.1 모형설정

▶ 가정

- ① T_{ij} 는 시스템 고장시간으로 동일한 분포를 갖으며 독립인 확률변수이다.
- ② 시스템 i 의 관측수는 n 개의 (x_i, S_i)
- ③ 시스템은 1-out-of-J:F
- ④ 컴포넌트의 수명시간은 지수분포를 따른다.
- ⑤ 마스크 데이터는 독립적으로 발생한다.

▶ 우도함수

시간에 독립이고, 고장원인이 마스크 되어 있을 때의 우도함수는 다음과 같다.

$$L_r = \prod_{i=1}^n [\sum_{j \in S_i} [f_j(t_i) \cdot \prod_{j \in J_i} R_j(t_i)]]$$

그리고, 컴포넌트의 수명시간 $t = \{ T_{i1}, \dots, T_{in} \}$ 이 지수분포를 따른다면,

$$f(t | \lambda_s) = \lambda_s e^{-\lambda_s \cdot t} \tag{1}$$

$$L_r = \prod_{i=1}^n [\sum_{s \in S_i} [\lambda_s \exp(-\lambda_s \cdot t_i) \prod_{j \in J_i} \exp(-\lambda_s \cdot t_i)]]$$

$$\ln(L_r) = -\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n t_i\right) + \sum_{i=1}^n \ln\left(\sum_{j \in S_i} \lambda_j\right)$$

▶ 사전분포

$$g(\lambda_s) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda_s^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda_s}, \quad \lambda_s > 0, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2)$$

α : 형상모수, β : 척도모수

▶ 사후분포

수명 데이터가 지수분포이고 사전정보의 분포가 감마분포일 경우의 사후분포와 주변확률밀도함수는 다음과 같다.(Martz and Waller(1982))

① $\lambda \mid t$ 의 사후분포

$$g(\lambda_s \mid t) = \frac{e^{-\lambda_s t} \lambda_s^{n_i+n_{j,k}} \lambda_s^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda_s}}{\int e^{-\lambda_s t} \lambda_s^{n_i+n_{j,k}} \lambda_s^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda_s} d\lambda_s}$$

$$g(\lambda_s \mid t) = \frac{(t+\beta)^{n_i+n_{j,k}+\alpha}}{\Gamma(n_i+n_{j,k}+\alpha)} \lambda_s^{n_i+n_{j,k}+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda_s} \quad (3)$$

② t 의 주변확률밀도함수

$$f(t) = \int f(t \mid \lambda_s) g(\lambda_s) d\lambda_s$$

$$= \frac{\beta^\alpha t^{n_i+n_{j,k}} \Gamma(n_i+n_{j,k}+\alpha)}{\Gamma(\alpha) (n_i+n_{j,k})! (t+\beta)^{n_i+n_{j,k}+\alpha}} \quad (4)$$

③ 평균과 분산

$$E(\lambda_s \mid t) = \frac{n_i+n_{j,k}+\alpha}{t+\beta}$$

$$Var(\lambda_s \mid t) = \frac{n_i+n_{j,k}+\alpha}{(t+\beta)^2}$$

4. 결론

사용현장데이터의 신뢰성 분석 문헌들은 대개 보증기간과 운영시간, 설명변수와 추적 조사, 분포의 모수 추정, 그리고 제품의 고장원인이 하나인 경우에서 다수 고장원인으로 확장 연구되어 왔고, 이후 연구되어야 할 분야로는 비용효과분석, 추적 조사 방법, 고장모드별 신뢰성 분석방법, 적절한 모형의 선택방법, 의사우도함수의 추정량 성질, 사용현장데이터의 수집방법, 그리고 실험실 데이터와 사용현장 데이터를 통합한 베이지안 신뢰성 분석 등이 연구되어야 한다.

▶ 마스크 데이터 분석

시스템 구조	직렬 시스템(1-out-of-J), competing risk system
분포 적용	지수분포, 와이블 분포
고장원인	컴포넌트 고장(2, 3개)
고장확률	동일
추정	고장률(MLE), 구간추정
데이터 종류	마스크 데이터(완비, 관측중단)-실험실, 사용현장

마스크 데이터의 분석에서 확장 될 수 있는 연구분야로는 다수 고장을 갖는 사용현장 자료를 이용한 분석방법과 마스크 데이터 분석방법을 적용한 연구내용, 컴포넌트의 고장이 동일하게 일어나지는 않을 경우, 시간이 지나면서 고장 발생 확률이 변할 경우의 연구내용 등이다. 그리고 같은 시스템이나 비슷한 시스템의 이전 컴포넌트 고장률을 갖고 있을 때, 사전정보를 이용한 베이저안 분석을 고려해 볼 수 있다.

- ① competing-risk system인 직렬 시스템
- ② 지수분포 또는 와이블 분포
- ③ 컴포넌트의 고장 발생 확률이 동일한 경우와 다른 경우(가중치 부여)
- ④ 컴포넌트의 고장수의 비율
- ⑤ noninformative prior
- ⑥ 시간에 따라 컴포넌트의 고장 발생확률이 달라지는 경우

이러한 경우를 고려하여 마스크데이터를 이용한 베이저안 신뢰성 분석이 더 유용한 정보를 제공한다. 위의 마스크 데이터 베이저안 분석은 컴포넌트의 고장발생확률이 동일하고 시간에 따라 변하지 않는다는 가정을 통한 분석을 시도해 보았다.

추후 과제로는 현실데이터를 이용하여 각 분석방법의 비교를 통한 검정이 이루어져야 한다.

< 참고문헌 >

- [1] Kang, S. G., Kim, D. H.(2000), "Bayesian Hypotheses Testing for the Weibull Lifetime Data", *Jounal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 28, No. 3, pp 1-10.
- [2] Briš, R.(2000), "Bayes approach in RDT using accelerated and long-term life data", *Reliability Engineering and System Safety*, 67, 9-16.
- [3] Calabria, R., Pulcini, G.(1990), "Bayes Estimation in Exponential Censored Samples with Incomplete Information", *Commun. Statist.-Theory Meth.*, 19(8), 3037-3049.
- [4] Castillo, E., Sarabia, J.M., Solares, C., Gómez, F.(1999), "Uncertainty analyses in fault trees and Bayesian networks using FORM/SORM methods", *Reliability Engineering and System Safety*, 65, 29-40.
- [5] Coolen, F.P.A.(1997), "An imprecise Dirichlet model for Bayesian analysis of failure data including right-censored observations", *Reliability Engineering and System Safety*, 56, 61-68.
- [6] Coolen, F.P.A.(1996), "On Bayesian reliability analysis with informative priors and censoring", *Reliability Engineering and System Safety*, 53, 91-98.
- [7] Martz, H. F., Waller, R. A.(1982), "Bayesian Reliability Analysis", *John Wiley & Sons*.
- [8] Doganaksoy, N.(1991), "Interval Estimation from Censored & Masked System-Failure Data", *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 40, No. 3, 280-286.
- [9] Guess, F., Usher, J., and Hodgson, T.(1991), "Estimating system and component reliabilities under partial information on the cause of failure", *Journal of Statistical*

Planning and Inference, Vol. 29, 75-85.

- [10] Erto, P., Giorgio, M.(1996), "Modified 'Practical Bayes-Estimators'", *IEEE Transactions on reliability*, Vol. 45, No. 1, 132-137.
- [11] Hart, L.(1990), "Reliability of Modified Designs: A Bayes Analysis of an Accelerated Test of Electronic Assemblies", *IEEE Transactions on reliability*, Vol. 39, No. 2, 140-144.
- [12] Lin, D., and Guess, F.(1994), "The effects of dependent masking on reliability estimation", *Microelectronics and Reliability*, Vol. 64.
- [13] Lin, D.K.J., Usher, J.S. and Guess, F.M.(1993), "Exact Maximum Likelihood Estimation Using Masked System Data", *IEEE Transactions in Reliability*, Vol.42, No.4. 631-635.
- [14] Miyakawa, M.(1984), "Analysis of Incomplete Data in Competing Risks Model", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-33, No. 4, 293-296.
- [15] Pathak, P.K., Singh, A.K., Zimmer, W.J.(1991), "Bayes Estimation of Hazard & Acceleration in Accelerated Testing", *IEEE Transactions on reliability*, Vol. 40, No. 5, 615-621.
- [16] Sarhan, A.(1999), "Bayes estimation of the general hazard rate model", *Reliability Engineering and System Safety*, 66, 85-91.
- [17] Siu, N.O., Kelly, D.L.(1998), "Bayesian parameter estimation in probabilistic risk assessment", *Reliability Engineering and System Safety*, 62, 89-116.
- [18] Usher, J.S.(1996), "Weibull Component Reliability-Prediction in the Presence of Masked Data", *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 45, No. 2, 229-232.
- [19] Usher, J.S., and Guess, F.M.(1989), "An iterative approach for estimating component reliability form masked system life test data", *Quality & Reliability Engineering International*, Vol. 5, 257-261.
- [20] Usher, J.S. and Hodgson, T.J.(1988), "Maximum Likelihood Analysis of Component Reliability Using Masked System Life-Test Data", *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 37, No. 5, 550-555.