다수의 동일부품 중 소수의 고장 데이터를 갖는 부품의 수명분석 및 예비품수 결정

전치혁 · 염세경 *

Abstract

We are concerned in the estimation of lifetime distribution of a component having a few observed failure data and we demonstrate that we can use the maximum likelihood estimation utilizing the censored data when the number of components in use is quite large. Weibull distribution is assumed for the lifetime and a simple estimation procedure is introduced. We also propose the method of determining the optimal number of spares required for a specified period without introducing cost functions. The proposed methods are applied to the photon stop and the water-cooled flange which are major components in Pohang Light Source.

1. 서론

동일한 부품을 다수 사용하는 경우 이 부품의 적절한 수량의 예비품을 확보함이 매우 중요하다. 특히, 부품의 가격이 고가인 경우 필요 이상의 예비품을 보유함은 비용의 낭비를 초래한다. 그러나 너무 적은 수의 예비품을 재고로 갖고 있는 경우 부품의 고장시 적시에 교체하지 못하여 생산활동에 지장을 가져올 수 있다. 이와 같은 예비품의 적정수량을 결정하기 위해서는 우선 부품의 수명을 예측하여야 한다. 수명을 예측하기 위해 과거의 고장데이터를 이용하여 통계적인 방법을 사용하는데, 비교적 신뢰도가 높은 부품의 경우 과거데이터가 부족한 상황을 종종 당면한다. 즉, 부품의 고장이 서너번 정도밖에 관측되지 않은 경우 통계적 기법을 사용할 수 없지 않은가 의문을 가질 수 있다. 그러나, 동일한 부품이 다수있는 경우에는 사용기간 중 고장이 없었다는 정보를 자료로 활용할 수 있으며, 이러한 다수의 중단자료 (censored data)를 사용함으로써 최우추정 (maximum likelihood estimation)과 같은 통계적 방법의 적용이 가능하다.

본 논문에서는 위와 같은 상황을 설정하고 부품의 수명이 와이블분포 (Weibull distribution)를 따름을 가정하여 최우추정법에 의하여 와이블분포의 두 모수 (parameter)를 추정하는 방법을 제시한다. 또한, 이를 바탕으로 향후 주어진 기간동안 몇 개의 예비품을 확보함이 적절한지를 확률적 분석에 의거하여 산출하고자 한다. 그리고 본 분석기법을 방사광가속기의 주요 부품인 광자막이 (photon stop)과 수냉플랜지 (water-cooled flange)에 적용하여 이들의 적절한 예비품 수 결정에 응용한 사례를 소개한다.

* 경북 포항시 남구 효자동 산 31 번지 포항공과대학교 기계산업공학부

2. 고장데이터 및 수명분포 추정

시간 0에 n개의 동일한 부품을 사용하기 시작하였다 하자. i번째 부품은 어떤 이유로 정해진 시간 T_i에 사용이 중지된다 (i=1,...,n). 관측기간 T 내에 처음 r 개의 부품에서 한번씩의 고장이 발생하였다고 하고 나머지 부품에서는 사용기간 종료까지 고장이 없었다고 하자. i번째 부품에서의 고장시각을 t_i라 하자 (i=1,...,r). 고장이 발생한 부품의 경우 고장발생 시각에 즉시 새로운 부품으로 교체되며 그 시각이후부터 사용종료까지 또 다른 고장은 발생하지 않는다고 한다.

부품의 수명은 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는 와이블분포를 따른다고 가정하자.

$$f(t\ ;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\alpha}},\quad t\geq 0 \tag{1}$$

여기서 α와 λ는 양의 모수인데, α는 형상모수 (shape parameter)를 나타내고 λ는 척도모수 (scale parameter)를 나타낸다. 와이블분포는 지수분포를 포함하며 또한 감소고장률, 증가고장률 등을 반영할 수 있는 등 다양한 상황에 적용되므로 수명분포로 널리 사용되고 있다. 참고로 식(1)에 대응하는 분포함수는 다음과 같다.

$$F(t\ ;\alpha,\lambda)=1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}}\qquad t\geq 0 \tag{2}$$

또한 부품 수명 X에 대한 기대치는 다음과 같이 산출된다 [1, p.274].

$$E[X]=\frac{1}{\lambda}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1) \tag{3}$$

와이블 분포의 모수인 α, λ를 추정하기 위한 방법으로 최우추정법을 이용한다. 최우추정법은 고장자료와 가정된 부품 수명분포를 바탕으로 우도함수 (likelihood function)을 구성하고 이를 최대로 하는 모수의 추정치를 산출하는 것이다. 이 때 우도함수에는 r 개의 고장데이타 이외에 중단자료를 동시에 고려한다. 즉, 처음 r 개의 부품에 대하여서 고장시점 이후부터 사용기간 또는 관측기간까지 고장이 없을 확률을 고려하며, 나머지 부품에 대하여서는 사용 전기간에 걸쳐 고장이 없을 확률을 고려하여야 한다. 이와 같은 과정은 Pages and Gondran [2]의 여러가지 신뢰도 시험에 대한 우도함수 설정과 유사하다.

$S_i=\min(T,T_i)$로 정의하면, 우리의 경우 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}L(\alpha,\lambda;data)&=\prod_{i=1}^{r}f(t_i;\alpha,\lambda)\overline{F}(S_i-t_i;\alpha,\lambda)\prod_{i=r+1}^{n}\overline{F}(S_i;\alpha,\lambda)\\&=\alpha^{r}\lambda^{r\alpha}(t_1t_2..t_r)^{\alpha-1}e^{-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}t_i^{\alpha}}e^{-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}(S_i-t_i)^{\alpha}}e^{-\sum_{i=r+1}^{n}(\lambda S_i)^{\alpha}}\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\overline{F}(t)=1-F(t)$이다. 식(4)에 자연 대수를 택하면 식(5)와 같은 대수우도함수를 얻는다.

$$\ln L=r\ln\alpha+r\alpha\ln\lambda+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{r}\ln t_i-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}t_i^{\alpha}-\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}(S_i-t_i)^{\alpha}-\lambda^{\alpha}\sum_{i=r+1}^{n}(S_i)^{\alpha} \tag{5}$$

이를 λ와 α에 대하여 각각 편미분하고 0으로 놓으면 식(6), (7)과 같다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{r\alpha}{\lambda} - \alpha\lambda^{\alpha-1}\{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\alpha} + \sum_{i=1}^{r}(S_i - t_i)^{\alpha} + \sum_{i=r+1}^{n}(S_i)^{\alpha}\} = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{r}{\alpha} + r\ln\lambda + \sum_{i=1}^{r}\ln t_i - \lambda^{\alpha}(\ln\lambda)\sum_{i=1}^{r} t_i^{\alpha} - \lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r} t_i^{\alpha}\ln t_i - \lambda^{\alpha}(\ln\lambda)\sum_{i=1}^{r}(S_i - t_i)^{\alpha} \\ - \lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{r}(S_i - t_i)^{\alpha}\ln(S_i - t_i) - \lambda^{\alpha}(\ln\lambda)\sum_{i=r+1}^{n}(S_i)^{\alpha} - \lambda^{\alpha}\sum_{i=r+1}^{n}(S_i)^{\alpha}\ln S_i = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)으로 부터 다음식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lambda^{\alpha} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\alpha} + \sum_{i=1}^{r}(S_i - t_i)^{\alpha} + \sum_{i=r+1}^{n}(S_i)^{\alpha}} \tag{8}$$

두 모수의 추정치를 산출하기 위해서는 식 (7)과 (8)을 연립하여 방정식을 풀어야 하나 각각의 식이 비선형식이라 그다지 용이하지 않다. 따라서 식 (8)을 활용한 탐색기법을 이용하여 모수를 추정하는 것을 제안한다. 즉, α를 0.1 에서 0.1 단위 (필요시 0.01 단위)로 증가시키면서 식 (8)을 이용하여 이에 대응하는 λ값을 산출한다. 이 때 (α, λ)에 대응하는 식(5)의 ln L 값을 산출하여 이 값이 가장 최대가 되는 (α, λ)의 쌍이 두 모수의 최우추정치가 된다.

3. 적정 예비품수의 결정

예비품 수를 결정하는 많은 연구가 있으며 보통 비용함수를 도입하는 접근방식을 취하고 있다 [3, p.549]. 고려하는 비용으로 예비품의 재고비용과 재고부족비용 등을 들 수 있다. 그러나, 재고비용 및 재고부족비용은 통상 평가하기 곤란하여 현실적으로 사용하기 어려운 면이 있다. 본 논문에서는 대안으로 확률적 분석을 택하고자 한다. 기본 아이디어는 향후 원하는 기간동안 고장날 부품수를 여유있게 예측하고 이 정도를 예비품으로 확보하자는 것이다. 향후 T_f 년 동안 부품의 고장수가 k 보다 클 확률은 식 (9)의 좌변과 같이 나타낼 수 있는데 이 확률이 주어진 확률 β(허용수준이라 하자)보다 작게되는 최소의 k 값을 적정예비품수로 결정하자는 것이다.

$$P\{\text{향후 } T_f \text{동안 부품의 고장수 } \geq k\} \leq \beta \tag{9}$$

향후 T_f 년 동안 부품의 고장수에 대한 확률을 산출할 때 관측기간 이전에 사용기간이 완료된 부품은 고려에서 제외되며, 관측기간 이후에도 계속 사용될 부품들을 대상으로 하여야 할 것이다. 편이상 향후 관심있는 기간 T_f 가 추가 사용기간보다 짧다고 하고 이 기간동안 고장이 많아야 한 번 발생한다고 하자. 부품 i 가 T_f 동안 고장날 확률은 이 부품이 관측기간 T 이전에 고장이 있었던 경우와 없었던 경우에 따라 달리 산출되는데, 고장이 없었던 부품들에 대하여서는 향후 T_f 동안 고장날 확률이 동일하게 아래와 같이 산출된다.

$$\begin{aligned} p &= P\{X < T + T_f \mid X > T\} \\ &= 1 - e^{-\lambda^{\alpha}\{(T+T_f)^{\alpha} - T^{\alpha}\}} \end{aligned} \tag{10}$$

한편, 관측기간 T 이전 시간 t_i 에서 고장이 있었던 부품 i 에 대하여 향후 T_f 동안 고장날 확률이 아래와 같이 산출된다.

$$p_i = P\{X < T - t_i + T_f \mid X > T - t_i\}$$
$$= 1 - e^{-\lambda^\alpha\{(T-t_i+T_f)^\alpha - (T-t_i)^\alpha\}} \qquad (11)$$

참고로 해당부품에 대하여 식(10) 또는 식(11)의 확률을 모두 합하면 향후 T_f 동안 고장날 부품수의 기대치를 얻을 수 있다.

향후 T_f 년 동안 부품의 고장수가 k 일 확률은 다음과 같은 조합을 고려하여 산출하여야 한다. 즉, 고장이 있었던 부품중에서는 하나도 고장나지않고 고장이 없었던 부품중 k 개가 고장날 확률, 고장이 있었던 부품중 1 개가 고장나고 고장이 없었던 부품중 k-1 개가 고장날 확률 등을 모두 합하여야 한다.

부품의 수가 많고 관측되는 고장의 수는 적은 경우 고장이 있었던 부품 중에서 향후 다시 고장이 발생하는 개수는 상대적으로 매우 적을 것이므로 이를 무시하면 고장이 없었던 부품들을 대상으로 향후 고장개수를 분석하면 될 것이다. 사용기간이 관측기간 이후이고 고장이 없었던 부품수가 m 일 때 이중 k 개 이상이 고장날 확률은 이항분포로부터 다음과 같이 산출된다.

$$P\{\text{향후 } T_f \text{동안 부품의 고장수} \ge k\} = \sum_{j=k}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \qquad (12)$$

여기서 m 은 비교적 큰 값이며 p 는 작은 값이므로 이항분포를 평균이 mp 인 포아송분포에 근사시킬 수 있다. 따라서 위의 확률은 다시 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$P\{\text{향후 } T_f \text{동안 부품의 고장수} \ge k\} \approx 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-mp}(mp)^j / j! \qquad (13)$$

$$= 1 - \int_{mp}^{\infty} e^{-x} x^{k-1} / (k-1)!\, dx$$

위에서 적분식은 자유도가 2k 인 카이제곱 확률변수 (χ^2_{2k} 이라 하자)가 2mp 보다 클 확률을 나타내므로 위를 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P\{\text{향후 } T_f \text{동안 부품의 고장수} \ge k\} \approx 1 - P\{\chi^2_{2k} > 2mp\}$$
$$= P\{\chi^2_{2k} < 2mp\}$$

식(9)에 의하여 적정 예비품수는 다음을 만족하는 최소의 k 를 찾음으로써 산출될 수 있다.

$$P\{\chi^2_{2k} < 2mp\} \le \beta \qquad (14)$$

자유도가 ϕ인 카이제곱 확률변수에 대하여 $\chi^2_{\phi,q}$ 를 다음을 만족하는 값으로 정의하면,

$$P\{\chi^2_\phi > \chi^2_{\phi,q}\} = q$$

식 (14)는 다음과 같이 된다.

$$2mp \le \chi^2_{2k,1-\beta} \qquad (15)$$

식 (15)를 이용하면 카이제곱분포표을 사용하여 허용수준 β에 대응하는 적정 예비품수를 구할 수 있다.

4. 응용사례

본 논문에서 제시된 상황은 실제 포항방사광가속기의 주요 부품인 광자막이와 수냉플랜지의 보수관리에서 발생한 것을 일반화한 것으로 여기서는 본 논문에서 제시된 수명분포 추정방법과 예비품 결정방법을 이들 부품에 적용한 결과를 제시하고자 한다. 광자막이는 사용하지 않는 방사광을 차단하거나 빔라인이 설치되기 전에 저장링에서 방출되는 방사광을 차단하기 위해 설치한 부품이며, 수냉플랜지는 빔라인 프론트엔드가 설치되기 전에 저장링에서 방출되는 방사광을 차단하는 부품으로 해당되는 빔라인이 설치되면 그 부품의 사용이 중지된다.

4.1. 광자막이의 수명분석 및 예비품수 결정

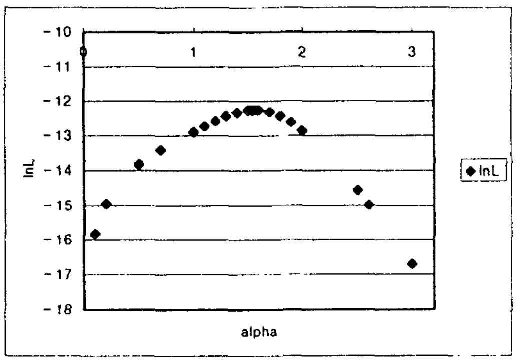
시작시점에서 118 개의 광자막이가 설치되었는데, 현재시점인 T=63.6 (개월)까지 3 개의 부품이 각 1 번의 고장이 발생하여 교체하였으며, 교체이후 현재시점까지는 고장이 발생하지 않았다. 나머지 115 개 부품은 현재까지 고장이 한번도 없었다. 이 경우, 각 부품의 사용기간은 무한이며, r=3, $t_1 = 43, t_2 = 43.8, t_3 = 49.3$ 이다. 따라서, 식(5)에 의한 대수우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L = 3\ln\alpha + 3\alpha\ln\lambda + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{3}\ln t_i - \lambda^\alpha \sum_{i=1}^{3} t_i^\alpha - \lambda^\alpha \sum_{i=1}^{3}(T-t_i)^\alpha - 115(\lambda T)^\alpha$$

그리고 식(8)은 다음과 같이 정리된다.

$$\lambda^\alpha = \frac{3}{(\sum_{i=1}^{3} t_i^\alpha + \sum_{i=1}^{3}(T-t_i)^\alpha + 115T^\alpha)}$$

α를 변화시키면서 윗 식에 의해 λ를 구하고 이 두 모수값에 대응하는 lnL 을 산출하여 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1] alpha 값의 변화에 따른 lnL

따라서 lnL 을 최대로 하는 α와 λ의 값은 다음과 같다.

α=1.57, λ=0.000803

그리고 식(3)에 의한 평균수명은 93(년)으로 추정된다. 이는 전문가의 견해와 크게 벗어나지 않는 값으로 평가되고 있다.

적정 예비품수를 구하기 위하여 우선 식(10)에 의한 확률 p 와 식(11)에 의한 p_1을 구하면 [표 1]과 같다. 여기서 3 개의 부품 고장시간이 서로 유사하므로 편이상 동일하게 43(개월)으로 간주하였다.

[표 1] 향후 기간별 부품의 고장확률

	향후 기간	
	T_f=3 년	T_f=5 년
부품 1,2,3	0.00619	0.0118
나머지 부품	0.00953	0.0169

위의 확률에 의하면 향후 3 년이내에 평균 1.11 개의 부품이 5 년이내에는 평균 1.97 개의 부품이 고장날 것으로 예상된다.

적정 예비품수를 결정하기 위하여 제시된 식(15)를 이용할 수 있으나 우선 다음과 같은 보다 정확한 분석을 제시한다. 이항분포에 의거하여 향후 T_f 년간 부품의 개수별 고장확률은 아래와 같이 산출된다.

P_1=향후 T_f년간 1 개 부품이 고장날 확률

$$=3p_1(1-p_1)^2(1-p)^{115}+115(1-p_1)^3 p(1-p)^{114}$$

P_2=향후 T_f년간 2 개 부품이 고장날 확률

$$=3p_1^2(1-p_1)(1-p)^{115}+3(115)p_1(1-p_1)^2 p(1-p)^{114}+{}_{115}C_2(1-p_1)^3 p^2(1-p)^{113}$$

P_j=향후 T_f년간 j 개 부품이 고장날 확률 ($j \geq 3$)

$$={}_{115}C_j(1-p_1)^3 p^j(1-p)^{115-j}+3{}_{115}C_{j-1}p_1(1-p_1)^2 p^{j-1}(1-p)^{115-(j-1)}$$
$$+3{}_{115}C_{j-2}p_1^2(1-p_1)p^{j-2}(1-p)^{115-(j-2)}+{}_{115}C_{j-3}p_1^3 p^{j-3}(1-p)^{115-(j-3)}$$

그러므로 우리가 구하고자 하는 향후 T_f 년간 부품이 k 개 이상 고장 날 확률은 다음 식 (16)에 의해 구할 수 있다.

$$P\{\text{향후 } T_f \text{동안 부품의 고장수} \geq k\} = 1-\sum_{j=0}^{k-1} P_j \qquad (16)$$

식(16)에 의거하여 향후 3 년 및 5 년간 고장갯수별 확률을 산출하면 [표 2]와 같다. 따라서 허용수준을 β=0.05 (5%)로 할 때 식 (9)에 의한 적정 예비품수는 3 년의 경우 4 개, 5 년의 경우 5 개로 판단된다. 또한 이 결과는 식(15)와 [표 1]의 확률 (m=118, p=0.00953, 0.0169)을 사용하여 산출한 것과 동일한 결과임을 확인할 수 있다.

[표 2] 광자막이의 고장개수별 확률

고장 개수	향후기간	
	3 년내	5 년내
0 개	0.326	0.136
1 개 이상	0.674	0.864
2 개 이상	0.306	0.589
3 개 이상	0.102	0.316
4 개 이상	0.026	0.137
5 개 이상	0.005	0.049
6 개 이상	0.001	0.015
7 개 이상	0	0.002

4.2 수냉플랜지의 수명분석 및 예비품수 결정

수냉플랜지의 경우 시작시점에 22 개의 부품이 설치되었는데 현재시점 T=63.6(개월)까지 이 중 4 개의 부품에 고장이 발생하였으며, 그 중 3 개는 새것으로 교체하였으며, 22 개월에서 고장난 4 번째 부품은 고장 즉시 18.13 개월 쓰던 사용중지된 부품으로 교체하였다. 고장난 부품의 경우 교체이후 현재시점까지는 고장이 발생하지 않았다. 그리고 그 중 10 개의 부품은 중간에 사용중지 되었으며, 나머지 8 개는 아직 고장나지 않고 그대로 사용하고 있다. 또한 현재까지 사용되는 부품의 사용중지기간은 무한으로 간주한다.

따라서 이 경우 대수우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L = 4\ln\alpha + 4\alpha\ln\lambda + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{4}\ln t_i - \lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{4}t_i^{\alpha} - \lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{3}(T-t_i)^{\alpha} - \lambda^{\alpha}\{(T-3.87)^{\alpha} + \sum_{i=6}^{14}T_i^{\alpha} + 8T^{\alpha}\} \tag{17}$$

그리고 식(8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda^{\alpha} = \frac{4}{\sum_{i=1}^{4}t_i^{\alpha} + \sum_{i=1}^{3}(T-t_i)^{\alpha} + (T-3.87)^{\alpha} + \sum_{i=6}^{14}T_i^{\alpha} + 8T^{\alpha}} \tag{18}$$

우도함수를 최대로 하는 α와 λ를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha=1.0, \quad \lambda=0.00352$$

즉, 이 부품의 수명분포는 지수분포를 따르는 것으로 추정되며, 평균 수명은 약 23.7 년으로 추정된다. 현재 사용중인 12 개의 부품의 향후 T_f 년간 고장날 확률은 지수분포의 무기억성에 의하여 동일하게 다음과 같다.

$$p = 1 - e^{-\lambda T_f} \tag{19}$$

따라서 전체 부품을 대상으로 향후 T_f 년내에 고장날 평균 부품수는 다음과 같다.

$$\text{평균 고장 부품의 수} = 12\ (1 - e^{-\lambda T_f})$$

즉, 평균적으로 3 년내에 1.42 개, 5 년내에는 2.28 개의 부품이 고장날 것으로 추정된다.

따라서 향후 T_f 년내에 k 개의 부품이 고장날 확률은 식(12) 또는 (13)에 의하여 산출된다. 이에 따라 63.6 개월 현재로부터 향후 3 년 또는 5 년 내에 나머지 12 개의 부품 중 고장이 나는 개수별 확률은 [표 3]과 같이 계산되며 이를 그림으로 나타내면 [그림 5]와 같다

[표 3] 수냉플랜지의 고장개수별 확률

고장 개수	향후기간	
	3 년 이내	5 년 이내
0 개	0.219	0.079
1 개 이상	0.781	0.921
2 개 이상	0.427	0.697
3 개 이상	0.164	0.407
4 개 이상	0.045	0.181
5 개 이상	0.009	0.06
6 개 이상	0.001	0.015
7 개 이상	2E-04	0.003

따라서 수냉플랜지의 경우 5%의 허용수준에서 3 년을 대비하여 4 개의 예비품, 5 년을 대비하여 6 개의 예비품을 확보하는 것이 적정한 것으로 판단된다. 식(15)를 이용하여도 동일한 결과를 얻을 수 있다.

5. 결 론

사용중지기간이 있는 다수의 동일한 부품에서 소수의 고장이 발생하는 경우 분포추정에 사용할 수 있는 최우추정법을 제시하였으며, 이를 기초로 적정 예비품수 결정방안을 유도하였다. 사용중지기간이 확률분포를 따르는 경우의 적정예비품수 결정에 대한 분석 또한 흥미로운 차후 연구주제가 될 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Kececioglu, D., Reliability Engineering Handbook, vol. I, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
2. Pages, A. and M. Gondran, System Reliability: Evaluation & Prediction in Engineering, North Oxford Academic, London, 1986.
3. Elsayed, E.A., Reliability Engineering, Addison, Reading, 1996.