

다층 지반의 2차원 압밀 수치해석 II

2-D Consolidation Numerical Analysis of Multi-Layered Soils (II)

류권일¹⁾, Kwon-II Ryu, 김팔규²⁾, Pal-Kyu Kim, 구기욱³⁾, Gi-Wuk Koo, 남상규⁴⁾, Sang-Kyu Nam

¹⁾ 충남대학교 토목공학과 박사수료, Ph. D. Candidate, Dept. of Civil Engineering, Chungnam Univ.

²⁾ 충남대학교 토목공학과 교수, Professor, Dept. of Civil Engineering, Chungnam Univ.

³⁾ (재)한국철도기술공사 부장, General manager, Korea Railroad Technical Corporation

⁴⁾ (주)한국구조안전기술원 부장, General manager, Korea Structural Analysis & Diagnosis Eng.

SYNOPSIS : The problems of discontinuous layer interface are very important in the algorithm and programming for the analysis of multi-layered consolidation using a numerical analysis, finite difference method(F.D.M.). Better results can be obtained by the process for discontinuous layer interface, since it can help consolidation analysis to model the actual ground

Explicit method is simple for analysis algorithm and convenient for use except for applying the operator. Crank-Nicolson method represents implicit method, which have different analysis method according to weighting factor. This method uses different algorithm according to dimension. And, this paper uses alternative direction implicit method.

The purpose of this paper provides an efficient computer algorithm based on numerical analysis using finite difference method which account for multi-layered soils with confined aquifer to determine the degree of consolidation and excess pore pressures relative to time and positions more realistically.

Key Words : Numerical Method, Multi-layered Soil, Finite Difference Method, Layer Interface, Confined aquifer, Alternative Direction Implicit method

1. 서론

자연계에 발생하는 물리적 현상의 해석 및 예측은 초기조건 및 경계조건을 이용한 미분방정식의 해결에 의해서 가능하다. 미분방정식을 공학적으로 이용하기 위해서 수치해석(numerical analysis)을 적용해야 하며, 컴퓨터의 발달은 수치해석의 발전을 가져오게 되었다.

일반적으로, 유한차분법(Finite Difference Method, F.D.M)은 열전도 및 유동해석 등에 많이 사용되고 있으며, 유한요소법(Finite Element Method, F.E.M)은 열전도 및 응력해석 등에 널리 이용되고 있다. 경계요소법(Boundary Element Method, B.E.M)은 최근에 개발하여 응용되기 시작한 수치해석법으로 정상열전도해석에 이용되고 있다.

Explicit 방법은 operator의 제약 조건을 갖는 반면에 해석의 algorithm이 간단하여 사용이 편리하다. Implicit 방법은 weighting factor에 따라 해석 방법을 달리하는데 Crank-Nicolson 방법이 대표적이다.

Crank-Nicolson 방법은 operator의 제약 조건을 갖고 있지는 않지만 차원(dimension)에 따라 다른 algorithm을 사용한다.

본 논문은 explicit 및 implicit의 2차원 압밀해석을 위한 모델링 기법을 개발하고 이에 따른 algorithm을 개발 하고자 한다. 또한, 이를 바탕으로 모든 지반에 적용 가능한 다차원 압밀 수치해석 프로그램을 개발하는 것이 목적이다. Explicit 및 implicit 방법으로 개발된 프로그램을 실제 지반에 적용해 보고 해석 결과의 고찰로 각 scheme의 장단점을 비교해 보았다.

2. 유한차분식

2.1 Terzaghi 식

Crank-Nicolson 방법은 안정적이라는 장점을 가지고 있지만 2차원이나 3차원의 경우에 Double Sweep Algorithm과 같은 해석법을 적용하기에는 계산량이 방대해진다. 따라서, 이러한 문제를 해결하기 위해서 Peaceman and Rachford(1955) 그리고 Douglas(1955)등이 Alternating Direction Implicit(A.D.I) 방법을 개발하였다.

Vertical traverse에서 x 방향은 explicit로 z 방향은 implicit로 되며 horizontal traverse의 경우에는 반대로 해석한다. 이 방법은 컴퓨터 용량이 적게 들며 정확한 결과를 산출하는 장점이 있다.

드레인재가 포함된 지반과 포함되지 않은 지반의 2차원 압밀 해석을 위해서는 Terzaghi 식과 Barron 식을 사용해야 한다.

우선, Terzaghi의 2차원 압밀 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

여기서, C_h 와 C_v 는 각각 수평방향 및 수직방향 압밀 계수이다.

Terzaghi의 2차원 압밀방정식(1)을 implicit의 Crank-Nicolson 방법으로 차분화 하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{C_h}{2} \left[\frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \\ & \frac{C_v}{2} \left[\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta z^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Vertical traverse는 x 방향이 explicit 형태이며, z 방향은 implicit 형태이다. 식(2)를 vertical traverse로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$-A u_{i-1,j}^{n+1} + (1+2A) u_{i,j}^{n+1} - A u_{i+1,j}^{n+1} = B u_{i,j-1}^n + (1-2B) u_{i,j}^n + B u_{i,j+1}^n \quad (3)$$

여기서,

$$A = \frac{C_v \Delta t}{2\Delta z^2}, \quad B = \frac{C_h \Delta t}{2\Delta x^2}$$

Horizontal traverse는 vertical traverse와 반대로 계산된다. 식(2)를 horizontal traverse로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$-B u_{i,j-1}^{n+2} + (1+2B)u_{i,j}^{n+2} - B u_{i,j+1}^{n+2} = A u_{i-1,j}^{n+1} + (1-2A) u_{i,j}^{n+1} + A u_{i+1,j}^{n+1} \quad (4)$$

A.D.I 방법은 식(3)과 식(4)의 계산으로 완성된다. 또한, Fig. 1은 각각 vertical 및 horizontal traverse의 계산과정을 보여준다.

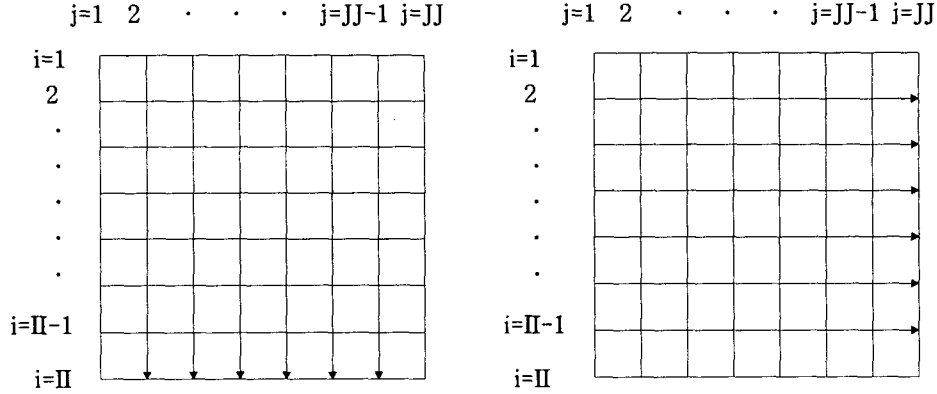


Fig. 1 Vertical and horizontal traverse

2.2 Barron 식

Barron의 2차원 압밀방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$

Barron의 압밀방정식(5)을 implicit의 Crank-Nicolson 방법으로 차분화 하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{C_h}{2} \left[\frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r} \frac{(-u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1})}{\Delta r} \right. \\ & \left. + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r} \frac{(-u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n)}{\Delta r} \right] + \\ & \frac{C_v}{2} \left[\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta z^2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)를 vertical traverse로 나타내면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} -A u_{i-1,j}^{n+1} + (1+2A)u_{i,j}^{n+1} - A u_{i+1,j}^{n+1} = \\ B \left(1 - \frac{\Delta h}{2h} \right) u_{i,j-1}^n + (1-2B)u_{i,j}^n + B \left(1 + \frac{\Delta h}{2h} \right) u_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $A = \frac{C_v \Delta t}{2\Delta z^2}$, $B = \frac{C_h \Delta t}{2\Delta x^2}$

식(6)를 vertical traverse로 나타내면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned}
 & -B\left(1 - \frac{\Delta h}{2h}\right)u_{i,j-1}^{n+2} + (1+2B)u_{i,j}^{n+2} - B\left(1 + \frac{\Delta h}{2h}\right)u_{i,j+1}^{n+2} = \\
 & Au_{i-1,j}^{n+1} + (1-2A)u_{i,j}^{n+1} + Au_{i+1,j}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{8}$$

2.3 Layer interface

경계층에서의 2차원 Crank-Nicolson 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n = & \frac{1}{M_{v,p} + M_{v,q}} [r_{h,p}M_{v,p} [u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}] \\
 & + r_{h,q}M_{v,q} [u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}] + \\
 & r_{h,p}M_{v,p} [u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n] + r_{h,q}M_{v,q} [u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n]] \\
 & \frac{1}{M_{v,p}\Delta z_p + M_{v,q}\Delta z_q} [r_pM_{v,p}\Delta z_p (u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) + \\
 & r_qM_{v,q}\Delta z_q (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) + r_pM_{v,p}\Delta z_p (u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) + \\
 & r_qM_{v,q}\Delta z_q (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n)]
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{여기서, } r_p = \frac{C_{v,p}\Delta t}{\Delta z_p^2}, \quad r_q = \frac{C_{v,q}\Delta t}{\Delta z_q^2}, \quad r_{h,p} = \frac{C_{h,p}\Delta t}{\Delta x^2}, \quad r_{h,q} = \frac{C_{h,q}\Delta t}{\Delta x^2}$$

경계층에서 A.D.I를 적용한 vertical traverse는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r_pM_{v,p}\Delta z_p}{MZ} u_{i-1,j}^{n+1} + \left(\frac{r_pM_{v,p}\Delta z_p + r_qM_{v,q}\Delta z_q}{MZ} + 1\right)u_{i,j}^{n+1} - \frac{r_qM_{v,q}\Delta z_q}{MZ} u_{i+1,j}^{n+1} \\
 & = \frac{r_{h,p}M_{v,p}}{M_{v,p} + M_{v,q}} u_{i,j-1}^n - \left(\frac{r_{h,p}M_{v,p} + r_{h,q}M_{v,q}}{M_{v,p} + M_{v,q}} - 1\right)u_{i,j}^n + \frac{r_{h,q}M_{v,q}}{M_{v,p} + M_{v,q}} u_{i,j+1}^n
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{여기서, } MZ = M_{v,p}\Delta z_p + M_{v,q}\Delta z_q$$

경계층에서 A.D.I를 적용한 horizontal traverse는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r_{h,p}M_{v,p}}{M_{v,p} + M_{v,q}} u_{i,j-1}^{n+2} + \left(1 + \frac{r_{h,p}M_{v,p} + r_{h,q}M_{v,q}}{M_{v,p} + M_{v,q}}\right)u_{i,j}^{n+2} - \frac{r_{h,q}M_{v,q}}{M_{v,p} + M_{v,q}} u_{i,j+1}^{n+2} = \\
 & \frac{r_pM_{v,p}\Delta z_p}{MZ} u_{i-1,j}^{n+1} + \left(1 - \frac{r_pM_{v,p}\Delta z_p + r_qM_{v,q}\Delta z_q}{MZ}\right)u_{i,j}^{n+1} + \frac{r_qM_{v,q}\Delta z_q}{MZ} u_{i+1,j}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{11}$$

3. 모델링

Fig. 2에서 지층 단면은 드레인재가 타입된 층을 포함하여 N개의 층으로 구분하였다. 드레인재가 타입된 구간은 Barron의 압밀식을 적용하였고 타입되지 않은 구간은 Terzaghi 압밀식을 적용할 수 있도록

하였다. 각 경계면에서는 경계면의 조건을 적용하여 압밀 해석 할 수 있도록 하였다. 드레인재가 타입된 깊이의 면은 명목상의 경계층이 되거나 실제의 경계층이 되더라도 모두 고려 할 수 있도록 하였다.

지층의 깊이에 따라서 각 층의 수직 분할 간격(dz_i)은 임의로 정할 수 있어서 층마다 그 간격이 다르게 할 수 있도록 하였다. 절점 번호는 $i=1$ 부터 $i=II$ 까지 증가한다. 반면에 수평분할 간격(dx)는 모든 층에서 동일하게 임의의 간격으로 나눌 수 있게 하여, 지층의 연속적인 해석이 쉽게 하였다. 절점 번호는 $j=1$ 부터 $j=JJ$ 까지 증가한다.

배수재가 타입된 깊이까지 $j=1$ 인 column에서 1층부터 $N-1$ 층까지의 $u_{i,1}=0$ 이고, N 번째 층의 간극수압 $u_{i,1}$ 는 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 이다. 이 면과 대칭을 이루고 있는 $j=JJ$ 인 column에서 $i=1$ 부터 $i=JJ$ 까지의 $u_{i,JJ}$ 도 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 의 조건으로 가정하였다. 이때 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ 인 조건을 갖는 면에서는 image method를 적용하여 미지의 간극수압을 계산한다.

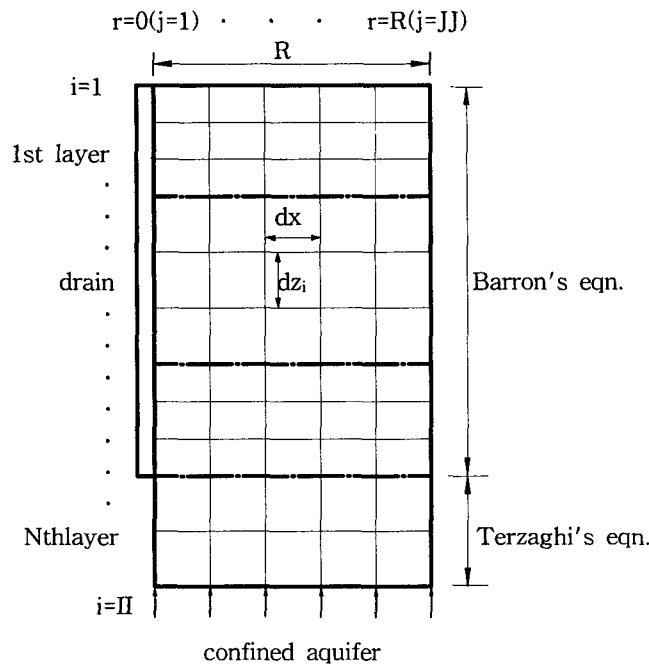


Fig. 2 Modelling profile

상부 $i=1$ 인 row의 면은 $u_{1,j}=0$ 이고, $i=II$ 인 row의 면은 항상 일정한 피압을 받고있으며, 피압 대수층은 압밀 하중을 받는 면적에 비하여 무한하다고 가정하였다.

4. 해석

해석에 적용된 지반은 paper drain이 1m 간격으로 타입된 시험 시공지역으로 피압이 작용하고 있는 지반을 대상으로 하였다. Fig. 3은 4개의 층으로 구성된 지층 단면을 보여주고 있다.

제 1층은 0~3m의 구간으로 매립층으로서 약간 과압밀된 형태를 나타내고 있으며 다른층에 비해 양호한 토질특성을 나타내고 있다. 제 2층은 3~13m의 구간으로 토질의 물리적 특성과 강도특성 및 압밀특성이 좋지 않은 분포를 보여주고 있다. 제 3층은 13~21m의 심도에 분포하고 있으며 4층은 21~30m까지 분포하며 하부로 갈수록 실트 및 모래층이 존재하며 하부 모래층과의 경계면에서는 피압수의 영향을 받고 있다.

해석 대상 지반은 paper drain 공법이 적용되었고, 타입간격은 1m이다. 성토재료의 단위 중량은 $2t/m^3$ 이고 총 5m 높이로 단계 성토하였다. 단계 성토는 여러 차례에 걸쳐서 수행되었으나 계산상의 단순화를 위해서 5단계로 축소하여 적용하였다.

30m 깊이에서 작용되고 있는 피압은 $3.5 t/m^2$ 으로 적용하였다. 수직 방향 및 수평방향의 압밀계수와 투수계수는 각각 동일하게 해석하였다. 마지막 층은 동일한 토질 조건이나 드레인재가 타입된 구간과 타입되지 않은 구간으로 구분하여 전체 층을 총 5개로 분할하였다. 각 층별 깊이와 압밀계수 및 투수계수의 입력자료는 Table 1과 같다

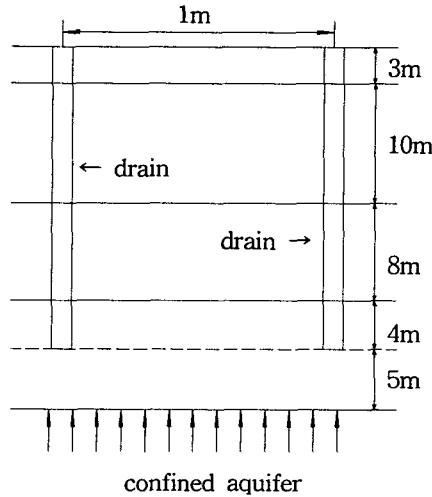


Fig. 3 Ground profile

Table 1 Input data I

Layer	Length(cm)	$c_h=c_v(cm^2/sec)$	$k_v=k_h(cm/sec)$
1	300	$1.0E-3$	$1.35E-7$
2	1000	$8.1E-4$	$1.42E-7$
3	800	$5.0E-4$	$2.60E-8$
4	400	$3.0E-3$	$2.20E-7$
5	500	$3.0E-3$	$2.20E-7$

우선, 개발된 explicit 및 implicit 프로그램을 비교해 보기 위해서 무차원 형태로 압밀도 U와 시간과의 관계를 알아보았다. 입력정수는 Table 1과 동일하게 하고 피압이 작용하지 않는 양면배수 조건을 적용하였다. Fig. 4은 이 결과를 보여준다.

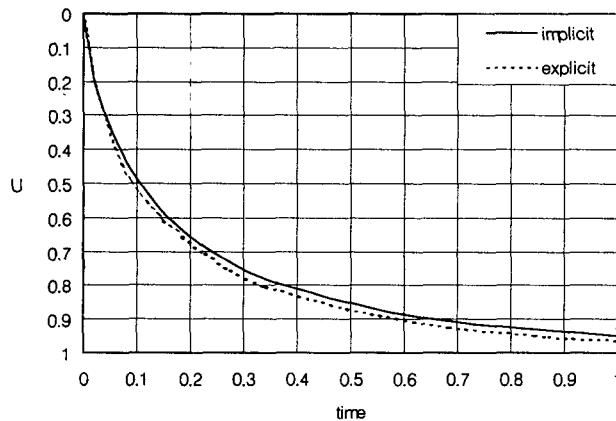


Fig. 4 Comparison between explicit and implicit program

Fig. 4에서 알 수 있듯이 explicit 및 implicit 프로그램은 거의 동일한 해석결과가 도출됨을 알 수 있다.

Explicit 및 implicit 프로그램을 실제 지반의 자료를 이용하여 해석시 수평 및 수직 거리의 분할 간격과 시간 간격은 Table 2와 같이 입력하였다. Explicit에서는 시간간격 Δt 를 1일로 하면 안정조건을 충족시키지 못하므로 0.5일 간격으로 하여 계산하였다. 드레인의 수평 배수거리 r_e 는 배수재가 4각형 배치이므로 다음 식에 의해 계산하였다.

$$r_e = 0.565(\text{drain spacing}) \quad (12)$$

입력자료에 따른 프로그램을 실행해 본 결과 95% 압밀도에 도달하는 시간은 explicit는 286일 implicit는 310일로 24일의 차이를 보였다. 또한, 계산에 소요된 시간은 explicit는 4'27.43''이고 implicit는 2'50.59''로 나타났다. 이는 explicit로 지반 해석시 제약 조건 때문에 시간간격을 0.5일로 하였기 때문에 계산량이 implicit에 비하여 많아졌기 때문이다.

Table 2 Input data II

Layer	Explicit			Implicit		
	$\Delta Z(\text{cm})$	$\Delta H(\text{cm})$	$\Delta t(\text{day})$	$\Delta Z(\text{cm})$	$\Delta H(\text{cm})$	$\Delta t(\text{day})$
1	30.0	19	0.5	30.0	14.3	1
2	66.7			66.7		
3	53.3			53.3		
4	80			80		
5	100			100		

Fig. 5은 해석된 결과와 실측된 현장 자료를 보여준다. Explicit와 implicit의 침하곡선은 거의 일치하는 형태를 보여주고 있다. 실측 자료와 예측치는 상당히 일치하고 있지만 예측자료가 압밀 진행 상태가 다소 빠르게 나타남을 알 수 있다. 이는 실제 지반의 well resistance 및 지반 교란으로 인한 smear effect가 주된 원인으로 판단된다. 또한, 현장상태의 지반 조건을 정확하게 모델링하기 위한 입력 자료의 취득의 오류 및 지반변형의 비선형성등을 정확하게 고려하지 못했기 때문이라 판단된다. 차후, 이러한 문제점을 개선해나간다면 더욱 정확한 해석 결과를 얻을 수 있으리라 판단된다.

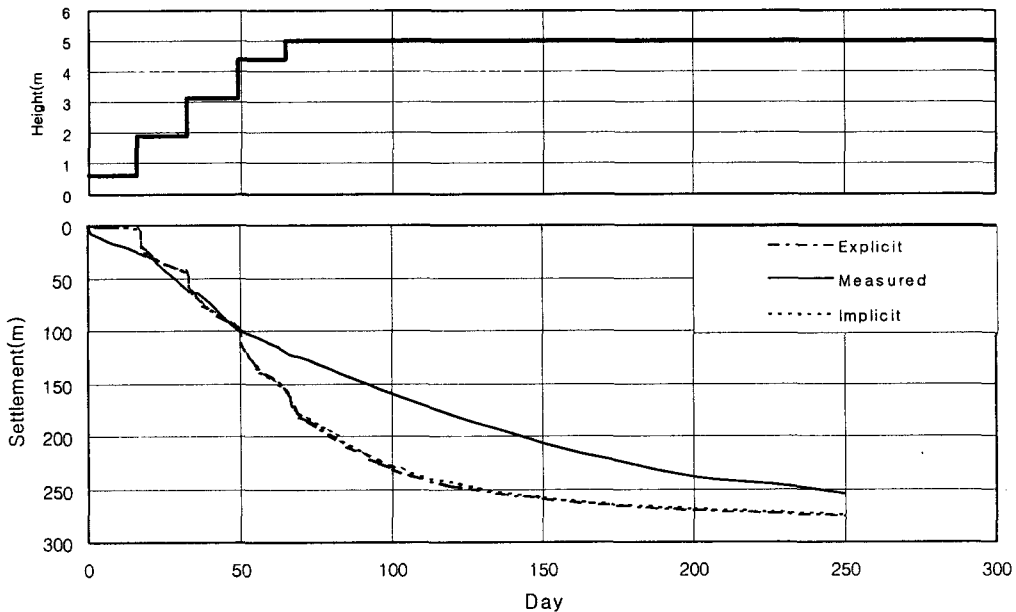


Fig. 5 Comparison of predicted and measured values

5. 결론

Explicit 및 implicit 각각의 scheme으로 개발된 프로그램을 국내 연약지반 시험시공 현장에 적용해본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 프로그램에 적용된 2차원 모델링 방법은 다층으로 구성된 실제의 현장 지반 상태를 쉽게 모델링 할 수 있어 프로그램의 이용 및 적용에 편리하게 사용할 수 있다.
2. Explicit 방법은 operator의 제약으로 인하여 프로그램의 적용에 제약이 따르는 반면, implicit 방법은 operator의 제약이 없어 프로그램의 적용이 우수하다.
3. Explicit 및 implicit로 개발된 프로그램의 계산 결과는 거의 동일하게 나타났으며, 실제 계측자료와도 상당한 일치를 보여준다.
4. 예측 자료의 압밀 진행 상태가 다소 빠르게 나타났다. 이는 실제 지반의 well resistance 및 smear effect가 주된 원인으로 판단되며 향후, 이러한 문제점을 개선해 나간다면 더욱 정확한 해석 결과를 얻을 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

1. 김팔규, 류권일, 구기욱, 남상규(1999), 수치해석에 의한 다층토 압밀의 경계요소면 해석, 99 봄학술발표회 논문집, 한국지반공학회, pp. 349-356
2. 김팔규, 류권일, 남상규, 이재식(2000), 다층지반의 2차원 압밀 수치해석, 00 봄학술발표회 논문집, 한국지반공학회, pp. 467-480
3. 한국토지공사(1997), 연약지반의 처리공법과 침하계측에 관한 연구
4. 한국토지공사(1999), 연약지반의 압밀특성에 관한 연구 I·II
5. Braja M. Das(1997), Advanced Soil Mechanics, Taylor & Francis, pp.258-267
6. Desai C. S. and John T. Christian, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, 1977
7. Gerald Curtis F. and Patrick O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, 1994
8. Nogotov E. F. and Berkovsky B. M.(1978), Applications of Numerical Heat Transfer, McGraw-Hill, pp. 22-30
9. Gibson R. E.(1981), The Theory of One-Dimensional consolidation of saturated clays. II. Finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers, Can. Geotech. J. Vol. 18, pp. 280-293
10. Thoma J. W.(1995), Numerical Partial Differential Equations : Finite Difference Methods, Springer, pp. 147-156
11. Jingde Z., Zhiyoung A. and Huming Z.(1996), "Analytic Solutions of Two-Dimensional and Three-Dimensional Consolidation Problem by Using the Method of Weighted Residuals," Proceeding of second International Conference on Soft Soil Engineering, Vol. 1, pp.193-198
12. Hoffman Joe D.(1993), Numerical Methods for Engineers and Scientists, McGraw-Hill, pp.520-5674.
13. Ozisik M. Necati(1994), Finite Difference Methods in Heat Transfer, CRC press, pp. 99-125
14. Casteleiro Manuel, Raymond J. Krizek and Tuncer B. Edil(1981), Mathematical model for one-dimensional desiccation and consolidation of sedimented soils, Int. Jour. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 5, pp.195-215
15. Craig R. F.(1992), Soil Mechanics, Chapman & Hall, pp.243-289
16. Abott M. B.(1960), One-Dimensional Consolidation of Multi-Layered Soils, Geotechnique, pp. 151-165