

유한요소법과 연속체역학을 이용한 사면안정해석 Slope Stability Analysis Using Continuum/FEM Approaches

서영교¹⁾, Young-Kyo Seo

¹⁾ 부산대학교 전임연구원, Researcher, Pusan National University

SYNOPSIS : A framework alternative to that of classical slope stability analysis is developed, wherein the soil mass is treated as a continuum and in situ soil stresses and strengths are computed accurately using inelastic finite element methods with general constitutive models. Within this framework, two alternative methods of stability analysis are presented. In the first, the strength characteristics of the soil mass are held constant, and the gravitational loading on the slope system is increased until failure is initiated by well-defined mechanisms. In the second approach, the gravity loading on the slope system is held constant, while the strength parameters of the slope mass are gradually decreased until well-defined failure mechanisms developed. Details on the applying both of the proposed methods, and comparisons of their characteristics on a number of solved example problems are presented.

Key words : slope failure, slope stability analysis, finite element method, soil plasticity models, limit state analysis

1. 서론

기존의 사면안정해석은 주로 사면의 실제적인 자중에 대하여 사면을 이루는 토질을 관통하는 최소 안전율을 가지고 있는 미끄럼면 또는 전단파괴면을 찾는 것이다. 이러한 방법을 통하여 안전율을 찾을 때 만약 현장의 실제 토질이 갖는 응력과 이에 따른 전단강도가 고려한다면 균일한 토질에 있어서도 논란의 대상이 될 수 있다. 더구나 최소 안전율을 가지는 연속적인 파괴면의 추정은 결코 간단한 문제는 아니다(Leschinsky 등, 1992). 19세기 후반부터 20세기 중반까지 사면을 이루는 토질의 구성요소들 뿐 만 아니라 사면의 높이, 경사도 등을 고려한 여러 가지 가정 및 특별한 방법들이 연구되고 사용되어 왔다. 기존의 여러 가지 사면 안정에 관한 해석법 및 비교는 Nash(1987)에 의하여 조사된바 있다. 이러한 고전적 방법들의 공통된 단점은 주로 고정된 마찰각을 가진 Mohr-Coulomb 전단강도의 가정으로 되어 있다. 또한 사면을 이루는 토질의 응력과 그에 따른 전단력의 계산에 있어서 사면해석의 기존의 부정정한 연속체역학 문제의 정역학적인 가정도 포함되어 있다.

최근 유한요소법을 이용한 사면, 댐등 부정정 구조물의 응력 및 변위의 예측 등의 많은 연구가 진행되어 왔다(Duncan, 1996). 이러한 연속체역학에 있어서의 유한요소법 사용의 잠재적인 장점들은 다음과 같다. 1) 토질에 있어서의 평형 상태의 응력, 변형률 및 그에 따른 전단강도를 정확히 계산 할 수 있으며, 2) 일반적인 토질의 구성방정식(Mohr-Coulomb 및 여러 가지 등을 포함)을 사용할 수 있고, 3) 이러한 방법은 특히 복잡한 지형뿐만 아니라 여러 층으로 이루어진 토질 등에 쉽게 적용될 수 있다. 4) 그리고 침윤파괴 및 취성토질의 거동해석 및 여러 가지 사면안정 방법들 즉 토목섬유, 배수공, 옹벽 등으로 확장되어 사용될 수 있다.

비선형 사면안정해석에 있어서 두 가지 서로 보완될 수 있는 방법들이 지금까지 사용되어 왔다. 첫 번째 방법은 사면을 구성하는 토질의 실제 강도를 유지한 상태에서 사면의 자중을 점차적으로 증가시

킴으로서 사면파괴를 해석하였다. 두 번째 방법은 사면의 실제 자중을 유지한 상태에서 토질의 강도를 이와 관계되는 변수들을 통하여 점차적으로 감소 시켰다. 일단 이러한 두 가지 기본 방법들이 제시된 후 각각의 사면안정해석 방법의 특성을 여러 가지 예제 문제들을 통하여 비교 분석하였다. 일반적으로 두 방법 모두 기존의 고전적인 Mohr-Coulomb 토질 형식을 가정한 기존의 절편형식에 따른 방법들 보다 더욱더 안정적이고 보편화될 수 있는 방법으로 결론지어 진다. 첫 번째 방법은 Chen과 Mizuno(1990)에 의하여 점성토에 적용되었으나 비점성토에는 적용되지 않았다. 두 번째 방법은 Griffiths와 Kidger(1995)가 Von-Mises의 소성모델을 사용하여 균일한 점성토에 적용되었다. 이보다 앞서 Zienkiewicz 등(1975)은 점소성이론을 사용한 Mohr-Coulomb 토질 모델을 두 번째 방법에 적용시킨 바도 있다.

본 연구는 사면파괴의 시작점을 예측, 계산하기 위한 기본 틀로서 제시되었기 때문에 소변형(small deformation)과 비변형률연화(non-softening) 탄소성 구성모델을 사용하였다. 보다 정확한 파괴 과정 및 파괴후의 예측은 대변형(large deformation)의 사용 등으로 적용될 수 있다. 또한 본 연구에서는 사면을 구성하는 토질을 한 재료로 된 연속체(single phase continuum)로서 규정하여 사면안정해석을 하였고, 제시된 해석방법의 사용과 여러 가지 재료로 된 연속체(multi phase continuum)로 확장되어 배수 등을 고려한 사면안정해석으로 쉽게 확장시킬 수 있다는 점이다(Seo, 1998).

2. 사면안정해석의 두 가지 방법

2.1 한계상태해석의 일반형

다음은 자중에 대한 토질사면의 반응을 일반적인 비선형 타원형 경계치 문제(non-linear elliptic boundary value problem)로 다룬다. 해석 방법의 본질적인 점을 다루기 위하여 여기에서 언급된 토질의 연속체는 배수력(seepage force)이 없는 완전배수 또는 완전비배수 조건하에서 다룬다. 이러한 단순 가정은 간극수압 및 배수효과를 배제하고 전응력과 고체 입자의 변위만을 취급할 수 있는 장점이 있다. 또 하나의 가정은 비점성 구성모델의 사용이고 이에 따라 아래의 시간에 관계된 요소는 어떤 물리적인 성질을 포함하지 않는다.

연속체의 평형으로부터 가상일의 원리를 이용하여 토질 전체에 대한 비선형 평형방정식으로 구성된 유한요소 기본식을 구할 수 있다. A절점의 기본식은

$$(r_A)_{n+1} = (f_A^I)_{n+1} - (f_A^E)_{n+1} = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$(f_A^I)_{n+1} = \int_{\Omega_s} B_A^T \sigma d\Omega_s \quad (2)$$

$$(f_A^E)_{n+1} = \int_{\Omega_s} \rho N_A g d\Omega_s + \int_{\Gamma_h} N_A h d\Gamma_h \quad (3)$$

일반적으로 식(1)은 일련의 비선형 연립방정식을 나타내고 이들은 변위증분($\nabla u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$)에 대하여 반복 계산을 통하여 풀어야 한다. 비선형 연립방정식을 푸는 여러 가지 수치해석적 방법이 있으나 여기에서는 선탐색(line search)을 포함한 Newton 방식을 사용하였다. 여기서 B_A 는 탄성변형률 메트릭스($B_A = \nabla^s N_A(x)$)를 나타내고 N_A 는 A절점 형상함수를 표시한다. 식(2)는 토질내부의 응력에 의한 A절점의 내부력(internal force)을 나타내고, 식(3)은 물체력(body force)과 표면력(surface force)에 의한

A절점의 외부력(external force)을 나타낸다. 수치 해석의 반복 계산중 내부력과 외부력이 같아지는 한 증가된 하중에 대하여 사면은 안정될 것이고 식(1)의 수치해는 존재한다. 이러한 과정의 반복 후 토질의 일정한 강도와 증가된 자중에 대하여 잔류하중이 모두 제하되고 수치해가 더 이상 존재하지 않으면 사면은 파괴의 시작점에 있게되고 불안정한 상태로 된다.

2.2 자중증가에 의한 한계상태 해석

자중증가에 의한 사면안정해석에 있어서 목적은 사면을 이루는 토질에 대하여 사면의 불안정 상태, 즉 식(1)의 수치해가 수렴하지 않을 때까지 자중을 일정하게 증가시키는 것이다. 자중의 크기 $g(t)$ 를 점차적으로 증가시키면 토질의 최대 저항강도 때까지 외부력의 크기 식(3)의 f^E 또한 증가되고 이점은 불안정한 파괴의 시작점이 된다. 자중증가에 의한 사면안정해석에 있어 중력 벡터는 시간에 대한 다음과 같은 함수로 표시된다.

$$g(t) = \dot{g} \cdot t \quad (4)$$

여기서 \dot{g} 는 자중의 증가 방향에 따른 중력의 시간에 대한 증가분 벡터를 나타낸다. 이러한 방법에 따라 $g(t)$ 가 정의되면 한계상태해석 문제는 단순히 전체 평형에 대하여 식(1)의 수치해가 존재하는 가장 큰 시간 ($t=t_{lim}$)을 찾는 문제로 되고 그때의 한계 중력 가속도는 다음과 같다.

$$g_{lim} = \dot{g} \cdot t_{lim} \quad (5)$$

이러한 방식에 따른 사면파괴 상태의 안전율은 다음으로 표시된다.

$$(FS)_{gi} = \frac{g_{lim}}{g_{act}} \quad (6)$$

여기서 g_{act} 는 실제 중력가속도($g_{act}=9.81 \text{ ms}^{-2}$)로서 예제 계산에 사용되었다.

2.3 강도감소에 의한 한계상태 해석

강도감소에 의한 사면안정해석법의 연속체 평형방정식 및 그에 따른 유한요소 기본식은 자중증가에 의한 사면안정해석과 본질적으로 같고, 비선형 연립방정식을 푸는 수치해석도 같은 방법을 사용하였다. 해석의 기본적인 개념은 각시간 단계(time step)에 토질의 전단강도와 관계된 요소를 감소시키는 것이다. 전단강도 요소의 감소는 이들을 시간에 따른 감소함수로 표시하고 각 시간 단계에 따라 일정하게 감소시킬 수 있다. 예를 들어 토질의 전단강도 요소 Y 는 시간함수로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Y(t) = Y_{base} \cdot f(t) \quad (7)$$

여기서 Y_{base} 는 실제의 토질 강도를 나타낸다. 이 방법 역시 먼저 자중 증가와 마찬가지로 식(1)의 해가 존재 할 때의 때 최대시간 ($t=t_{lim}$)을 찾는 것이 목적이다. 안전율은 다음으로 정의된다.

$$(FS)_{sr} = \frac{Y_{base}}{Y(t)_{lim}} = \frac{1}{f(t_{lim})} \quad (8)$$

3. 비선형 Drucker-Prager 탄소성 모델

3.1 모델의 구성

위에 언급된 사면안정해석 방법들은 여러 가지의 토질 소성모델과 같이 사용될 수 있다. 그리고 증분 형태의 구성모델의 사용으로 보다 빠른 수렴과 의미 있는 결과를 구할 수 있다. 본 연구에서는 실제 토질의 인장, 압축 및 전단을 모두 고려할 수 있는 보다 효과적이고 실제에 가까운 비선형 Drucker-Prager 모델 (그림 1)을 사용하였다.

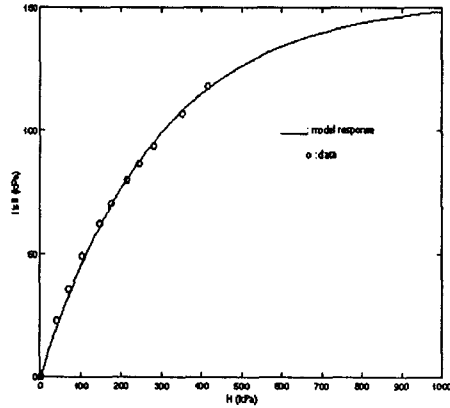


그림 1. 사질토의 Drucker-Prager 수치모델 및 실험치

변형률은 소변형률을 사용했고 전체변형률은 탄성성분과 소성성분으로 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (9)$$

변형률증분과 응력증분의 관계는 다음과 같다.

$$\dot{\sigma} = C : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (10)$$

여기서 C 는 탄성접선 강성텐서($C = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I}_{dev}$)이고 K 는 체적계수이고 μ 는 전단계수이다. 응력의 영역에 있어서 탄성영역은 아래의 비선형 파괴포락선으로 둘러싸여 있다.

$$f(\sigma) = \|s\| - [\alpha + \lambda\{1 - \exp(\beta I_1)\}] \quad (11)$$

여기서 s 는 축차응력텐서($\|s\| = 1/2 J_2$)이고, $I_1 = tr(\sigma)$ 은 응력텐서 제1불변량이고, 압축은 음으로 인장은 양으로 나타낸다. α, λ, β 는 토질의 전단강도와 관계되는 재료상수들이다. 소성 재하 기준은

$$f \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (12)$$

흐름법칙에 따른 소성변형률증분은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (13)$$

이러한 토질 소성모델은 강성 매트릭스(Consistent tangent operators)와 Backward Euler 적분 알고리즘을 적용하여 다음장의 예제들을 계산하였다. Mohr-Coulomb의 항복기준은 고전적인 토질의 전단강도 기준으로 점착력 c 와 마찰각 ϕ 로서 나타난다. 여기서 비선형 Drucker-Prager 파괴기준이 사용된 두 가지 이유는 다음과 같다. 1)구속압의 증가에 따른 토질강도의 수렴치를 예측할 수 있다. Mohr-Coulomb 모델은 수직 구속압에 대하여 비현실적인 전단강도를 나타내기 때문이다. 2) Drucker-Prager 모델은 Mohr-Coulomb 모델이 가지고 있는 항복면의 모서리를 가지고 있지 않다. 이리하여 많은 수치해석적 연구에 있어 Drucker-Prager 또는 Cap 형식의 소성모델이 많이 사용되어 왔고 또한 이러한 소성모델은 연성인장파괴 및 압축전단파괴를 예측할 수 있다.

여기에 제시된 모델과 고전적인 Mohr-Coulomb 항복조건을 사용한 사면안정해석의 결과를 비교하기 위하여 식(11)을 $I_1=0$ 에 대하여 Taylor 전개식으로 표시한 후 작은 값의 I_1 ($I_1 \ll 1$)에 대하여 선형화된 항복면은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$f(\sigma) = \|s\| = (\alpha - \theta I_1) \quad (14)$$

그러므로 Drucker-Prager의 α, θ 는 Mohr-Coulomb의 c, ϕ 와는 다음의 관계로 사용될 수 있다.

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}c}{(1 + 4/3 \tan^2 \phi)^{1/2}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{2} \tan \phi}{3(1 + 4/3 \tan^2 \phi)^{1/2}} \quad (15)$$

3.2 토질모델의 재료상수

예제에서는 두 가지 토질 종류가 사용되었다. 첫 번째는 비배수 상태의 점성토가 고려되었고 두 번째는 점착력이 없는 사질토를 사용되었다. 토질의 Drucker-Prager 모델 재료상수들은 표1에 나타나 있다. 실제의 사질토의 전단강도 반응은 고전적인 Mohr-Coulomb 모델과 다른 반응을 보인다. 그래서 실험과 일치되는 Drucker-Prager 모델의 재료상수 (λ, β)를 구하기 위하여 참고문헌 2에 나타난 사질토의 실제 실험치를 사용하였다. 표1에 제시된 재료상수를 사용한 Drucker-Prager 모델과 실제 실험치의 비교는 그림1에 나타나 있다.

표 1. 사면안정해석에 사용된 재료 상수

재료상수	점성토	사질토
ρ	1800 kg/m ³	1800 kg/m ³
μ	2.00 MPa	12.00 MPa
K	3.33 MPa	20.00 MPa
α	428 and 228 kPa	0.03 kPa
λ	0.00 kPa	153 kPa
β	$3.48 \times 10^{-6} Pa^{-1}$	$3.48 \times 10^{-6} Pa^{-1}$

4. 예 제

본 절에서는 제시된 자중증가법 및 강도감소법에 의한 각각의 파괴 예측면 및 안전율 등의 결과를 비교함에 있다. 예제 해석으로는 토질이 점성토와 사질토 및 이들로 이루어진 다층으로 구성된 사면의 경우에 대하여 각각 해석하였다.

4.1 마찰각이 없는 점성토

제시된 자중증가법 및 강도감소법은 표1에 나타난 상수들을 사용하여 높이 20m 와 사면각 30° 으로 된 균질의 점성토로 이루어진 사면을 선택하여 해석을 수행하였다. 사면의 유한요소망은 1125개의 요소로 구성되었다. 자중증가법에 있어서 수직중력은 $|g| = 29.626 \text{ ms}^{-2}$ 될 때까지 증가되었고 그때의 파괴예측 시작면의 모양은 두 개로 이루어짐을 알 수 있다. 그때의 안전율은 $(FS)_{gi} = 3.04$ 이었다. 강도감소법에 의한 해석은 실제 사면의 자중의 아래서 점착력 상수 α 를 파괴가 발생할 때까지 점차 감소시켰다. 파괴 발생시의 α 는 141 kPa 이었고 안전율은 $(FS)_{sr} = 3.03$ 으로 나타났다. 이 사면의 표1에 제시된 실제 강도를 사용한 일반적으로 점성토에 많이 사용되는 Fellenius-Taylor(1936) 방법으로 계산된 안전율은 3.17이다.

이러한 결과는 연속체 역학을 이용한 두 가지 제시된 유한요소법이 기존 해석에 많이 사용되는 Fellenius-Taylor 방법보다 보수적인 사면해석의 결과를 보여 주며 또한 이러한 전통적인 해석 방법과 잘 비교 될 수 있음을 나타낸다. 그렇지만 제시된 방법들은 전통적인 해석방법들이 제시하지 못했던 한 사면에 있어서 두 가지의 동시 파괴 형태를 제시하고 있고 이러한 결과는 현장에서의 사면안정화 기법에 대하여 유용이 이용될 수 있다.

유한요소법의 사용에 있어 유한요소망의 크기와 그에 따른 요소의 개수가 파괴에 미치는 영향을 알아보기 위해 그림2에 제시된 사면을 4450개의 요소를 사용하여 사면 안정해석을 수행하였다. 파괴면의 형태 및 안전율은 거의 같은 결과를 보여 주었다(Seo, 1998).

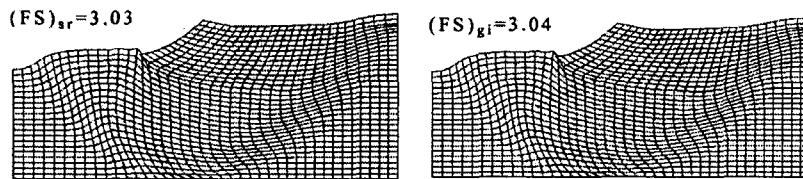


그림 2. 높이 30m, 사면각 49도의 점성토사면의 변형도.
왼쪽은 강도감소법, 오른쪽은 자중증가법의 결과

4.1 균질의 사질토

점성토의 예제와 같이 제시된 사면해석방법들은 사질토에도 똑같이 적용하였다. 사질토로 이루어진 사면은 20° 의 경사로 이루어져 있고 사면의 높이는 각각 6m, 12m, 30m, 60m로 되어 있다. 두 방법의 해석결과는 그림3에 나타나 있다. 이들 해석결과는 사면의 높이가 작을수록 높은 값의 안전율을 나타내었고 강도감소법이 작은 안전율을 보여주었다. 사면의 높이가 커질수록 안전율 및 파괴면은 서로 비슷한 경향을 나타내었다.

사질토의 자중증가법은 자중증가의 특별한 방법이 요구된다. 만약 전통적인 Mohr-Coulomb 또는 선형으로 된 Drucker-Prager의 파괴면을 다소 큰 마찰각과 사용하면, 자중의 증가로 인하여 전단응력 보다 수직 구속압이 더 빨리 증가된다. 이러한 상황 아래에서는 토질의 강도가 전단응력 보다 더욱 빨리 증가 하게되어 사면은 결코 붕괴되지 않는다. 다시 말하면 주어진 사면경사와 마찰력 아래서는 비현실적인 사면모델이 되고 또한 한계상태가 존재하지 않게 된다. 이러한 가능성을 피하기 위하여 자중증가법은 구속압의 증가에 따라 마찰각이 한 점으로 수렴되는 3절에서 제시된 현실적인 토질 소성모델을 필요로 한다. 이에 비하여 강도감소법은 어떤 토질모델에 상관없이 파괴면을 제시하는 안정적인 방법으로 보인다.

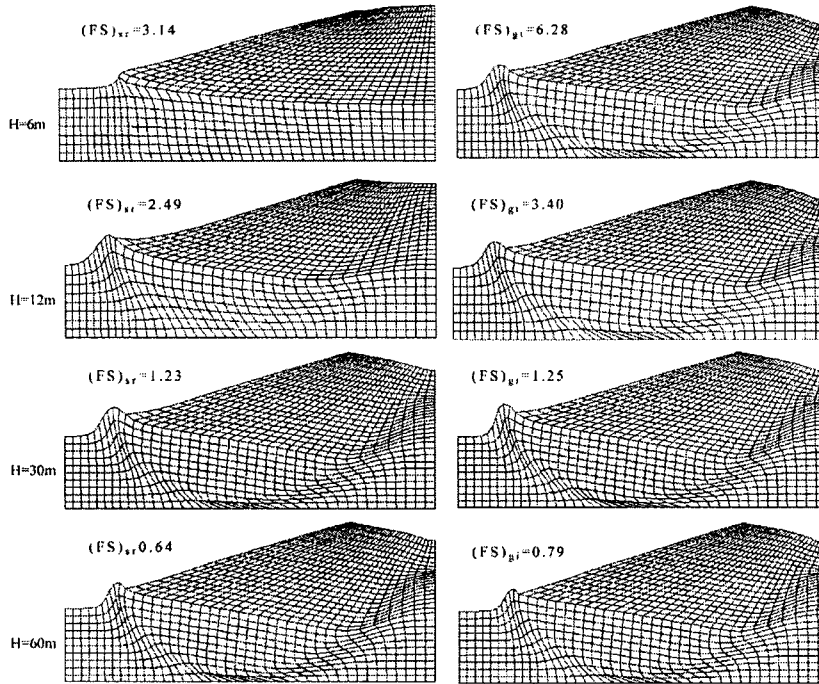


그림 3. 사면각 20도와 여러 가지높이의 사질토사면의 변형도
 왼쪽은 강도감소법 오른쪽은 자중증가법의 결과

4.3 사질토와 점성토로 혼합된 사면

제시된 사면안정해석법의 장점들 중의 하나는 어떤 토질로 이루어진 사면해석에 적용할 수 있다는 점이다. 이 방법은 고전적인 해석들이 다루어온 원주형태 등의 파괴면의 가정이 필요 없다는 점이다. 그 예로서 그림4에서 보여주는 높이 30m 사면각 30°의 사질토와 점성토 두 층으로 이루어진 사면이 고려되었다. 계산 결과 및 파괴예측면 또한 그림4에 나타나 있다. 두 가지의 결론은 다음과 같다. 1) 자중증가법 및 강도감소법 모두 예측된 파괴면은 전통적인 해석법의 결과와 아주 다르다. 파괴면은 원주형태 뿐만 아니라 사질토 및 점성토에 이르는 전단파괴를 동시에 보여준다. 2) 두 가지 방법 모두 안전율은 비슷한 값을 나타내고 있다.

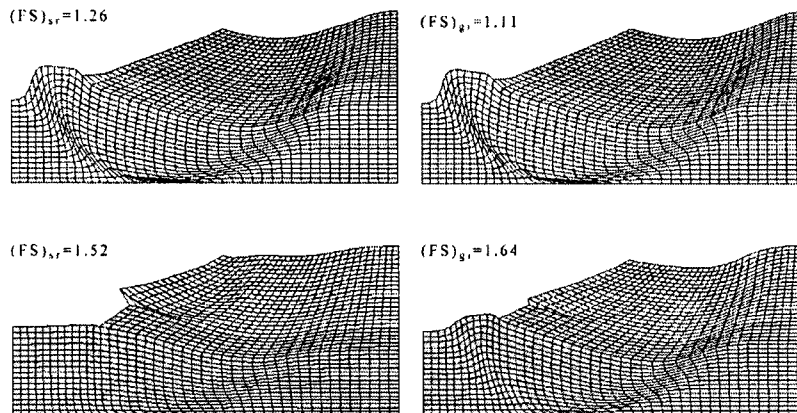


그림 4. 높이 30m, 사면각 30도의 사질토와 점성토로 혼합된 사면의 변형도. 짙은색은 점성토이고 밝은색은 사질토

5. 결 론

사면안정해석 방법의 제시에 있어서 토질의 응력 및 전단강도의 정확한 계산을 위하여 비선형 유한요소중분 모델을 사용하였다. 이러한 모델은 유한요소의 크기 및 자중증가분의 크기에 상관없이 같은 값으로 수렴한다. 자중증가법 및 강도감소법의 장점은 둘 다 한계상태시의 파괴면을 제시할 수 있다. 자중증가법은 사면이 파괴면에 이를 때까지 오직 하나의 중력증가 요소만 증가시키면 되는 반면에, 강도감소법은 토질전체의 전단강도와 관계되는 요소를 하나의 중력 시간함수로 표시하여 감소시키면 된다. 두 방법 모두 하나 이상의 파괴면을 제시할 수 있다.

자중증가법 및 강도감소법으로 계산된 안전율을 서로 비교해보면 강도감소법이 보다 보수적인 결과를 제시하나 때로는 자중증가법이 보수적인 결과를 제시하는 경우도 있다. 그러므로 여기에서 제시된 전응력을 사용한 사면안정해석에 있어서는 어떠한 것이 더욱 더 나은 것인지 결론 지을 수 없다. 만약 이러한 해석방법들이 배수 및 간극압의 영향을 고려한다면 각각의 방법은 토질의 강도를 표시함에 있어 장점을 가지게 될 것이다. 예를 들어 포화토위의 성토사면의 해석은 자중의 점차적인 증가로 적절히 해석할 수 있고, 일축 배수가 일어나고 있는 사면해석은 강도감소법을 사용할 수 있다.

본 연구에서는 다소 간단한 탄소성 모델을 사용하고 있으나, 변형률연화 등을 고려한 취성파괴등과 연계되어 이용될 수도 있다. 연화를 고려한 구성모델의 사용은 타원형 경계치 문제 밖 영역 및 전단띠 (shear band) 고려 등으로 평형방정식의 해를 구하기는 쉽지가 않다. 그럼에도 불구하고 제시된 사면안정방법과 변형률연화를 고려한 해석은 사면 불안정 영향 등을 연구함에 있어 중요한 연구 주제가 될 수 있다.

참고문헌

1. Chen, W. F. and Mizuno, E. (1990) *Nonlinear Analysis in Soil Mechanics: Theory and implementation*, Elsevier, Amsterdam
2. Desai, C. S., Phan, H. V., and Sture, S. (1981), "Procedure, selection and application of plasticity models for soil", *Int. J. Numer. Anal. Mech. Geomech.*, 4, pp. 295-311.
3. Duncan, J. M. (1996), "State of the art: Limit equilibrium and finite-element analysis of slopes", *Journal of Geotechnical Engineering*, 122 No.2, pp. 577-596.
4. Fellenius, F. (1936) "Calculation of the stability of earth dams", *Proceeding, Second Congress on Large Dams*, Washington DC.
5. Griffiths, D. V. and Kidger, D. J. (1995), "Enhanced visualization of failure mechanisms by finite elements", *Computers and Structures*, 55 No.2, pp. 265-268.
6. Leschinsky D. and Haug, C.-C. (1992), "Generalized three dimensional slope-stability analysis", *Journal of Geotechnical Engineering*, 18 (11), pp. 1748-1764
7. Nash, D. F. T. (1987), *A comparative review of limit equilibrium method of stability analysis in Slope Stability: Geotechnical Engineering and Geomorphology*. M. G. Anderson and K. S. Richards (Eds.), John Wiley and Sons, pp. 11-75.
8. Y-K Seo (1998), "Computational methods for elasto-olastic slope stability analysis with seepage", Ph.D dissertation, The University of Iowa, Iowa City, USA.
9. Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C., and Lewis, R. W. (1975), "Associate and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics", *Geotechnique*, 25, pp. 671-689.