단속공정 품질관리도 설계

The Design of Control Chart Based on a Short-run Production Process

김종걸 · 정연승
성균관대학교 시스템경영공학부

Jong-Gurl Kim · Yeon-seung Jung
School of System Management Engineering, Sung Kyun Kwan University

Abstract

Approximately normalized control charts, called Q charts, have been given Quesenberry(1991) for charting in process of short-run, job-shop, etc. We consider a Q chart with inspection error for job-shop floor under geometric distribution, which can be used for processes when a fraction nonconforming is very small. Our results would be applied for designing other control charts with inspection error.

1. 서론

현재 거의 모든 산업의 생산 환경은 단속생산(short-run)이나 다품종 소량 생산(job-shop) 형태를 갖추고 있으며, 그 정도가 더욱 가속화되어가고 있다. 이러한 현상은 생산의 형태가 과거의 생산자 중심의 생산방식에서 소비자 중심의 생산방식으로 변모함으로써 발생된 것으로 현대 산업에서는 보편화된 현상이다. 하지만 이러한 변화는 공정의 분석, 평가, 관리 등의 측면을 더욱 어렵게 만들었고, 기존의 전통적인 관리방식의 실효성을 감소시켰다. 따라서 이를 보완하기 위한 많은 연구들이 학자들에 의해 수행되어졌으며, 현재까지도 계속되고 있다.

본 연구에서는 지금까지 연구된 내용 가운데에 Quesenberry(1991)에 의해 제안된 Q관리도를 다루고자 한다. 이 관리도는 산업 현장에서의 데이터 획득에 대한 어려움을 해결할 수 있고, job-shop 환경에서도 활용이 가능하다.

Q관리도는 scale이 서로 다른 특성치의 값을 표준 변환을 통해 동일한 scale로 변환시켜 이를 같은 chart 위에 타점
함으로써 job-shop 환경에 내재되어 있던 관리도 설계의 문제점을 극복하였다. 더욱이 이 관리도는 파라미터가 알려져 있다는 가정을 전제로 설계되는 전통적인 Shewhart 관리도와는 달리 파리미터의 존재여부에 관계없이 관리도의 설계가 가능하고 실시간으로 작성될 수 있어 과거의 데이터가 충분하지 않은 공정에 대해서도

이를 활용할 수 있다.

Quesenberry의 Q관리도는 계량형(1991)[7]과 계수형으로 나누고 계수형은 이항분포(1991)[8], 포아송분포(1991)[9], 기하분포(1995)[13] Q관리도로 구분된다. 본 연구에서 다룰 내용은 Q관리도중 민감도가 높다고 하는, 극소불량공정의 모니터링에 활용되는 기하분포 Q관리도에 검사오류를 고려하여 보다 효과적이고 효율적인 관리도를 설계하고자 한다.

Notation

$g(x;p)$: 기하분포의 확률함수

$G(x;p)$: 기하분포의 누적확률분포함수

p : 실제 공정 불량률(과거의 데이터에 의해 얻어진 기하분포 Q관리도의 파라미터)

$\tilde{g}(x;t_r,r)$: 확률함수의 추정치

$\tilde{G}(x;t_r,r)$: 누적확률분포함수의 추정치

u_r : 누적확률분포함수를 나타내는 변수

Q_r : Q관리도의 통계치

p_e : 외견상 보여지는 불량률(검사의 오류가 포함된 불량률)

e_1 : 1종 오류가 발생할 확률

e_2 : 2종 오류가 발생할 확률

$g_e(x;p_e)$: 검사오류가 포함된 기하분포의 확률함수

$G_e(x;p_e)$: 검사오류가 포함된 기하분포의 누적확률분포함수

$\tilde{g}_e(x;t_r,r)$: 검사오류가 포함된 확률함수의 추정치

$\tilde{G}_e(x;t_r,r)$: 검사오류가 포함된 누적확률분포함수의 추정치

u_{er} : 검사오류가 포함된 누적확률분포함수를 나타내는 변수

Q_{er} : 검사오류가 포함된 Q관리도의 통계치

2. 기하분포 Q관리도

2.1 기하분포

오늘날의 전자공학 관련 제조업이나 의료기기와 같이 p가 매우 작고, 품질수준이 매우 높은 공정은 기존의 전통적인 관리도로 공정을 관리하는데 다소 무리가 따른다. 여기에서는 높은 품질 공정에 대해 역이항 샘플링이라고 불리는 기하분포를 이

용한다. 기하분포는 베르누이 시행을 따르며, 만일 p가 불량률이고 X를 불량이 발생할 때까지의 제품수라고 한다면, X에 대한 누적확률분포함수 $G(x\,;\,p)$와 확률함수 $g(x\,;\,p)$는 다음과 같다.

$$g(x;p)=p(1-p)^{x-1}\quad,\qquad x\in\{1,2,\ldots\} \tag{1}$$

$$G(x;p)=\begin{pmatrix} 0 & x<1 \\ 1-(1-p)^{[x]} & x\geq 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mu=\frac{1}{p},\quad \sigma=\frac{\sqrt{1-p}}{p}=\sqrt{\mu(\mu-1)}$$

[·]는 가장 큰 정수를 나타낸다. 여기서, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 는 랜덤변수이고 일반적으로 p는 매우 작은 값을 가지게된다.

X_1은 첫 번째 불량이 발생할 때까지의 검사 개수이고, X_2는 두 번째 불량이 발생할 때까지의 검사 개수이다. 여기서 만약 p가 알려져 있지 않은 경우에는 기하분포를 따르는 샘플로부터 p를 추정할 수 있다.

$$t=X_1+X_2+\cdots+X_n \qquad \text{일 때}$$

p는 UMVU(uniform minimum variance unbiased) 추정방법에 따라 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{p}=\frac{n-1}{t-1} \tag{3}$$

p와 X의 관계를 살펴보면, p가 증가하면 X는 감소하고, X가 증가하면 p가 감소한다. 기하분포 Q관리도는 위에서 거론한 것과 같이 파라미터 p의 존재여부에 관계없이 설계가 가능한 관리도이다. 따라서 p가 알려진 경우와 그렇지 않은 경우에 대해 각각 살펴보기로 한다.

2.2 $p=p_0$ 일 때의 기하분포 Q관리도 (파라미터가 알려져 있는 경우)

먼저 Q관리도의 기본적인 이론구조를 간략히 소개하면 다음과 같다. 모든 분포의 누적확률 값은 0과 1의 값을 가지는데, 이를 누적 표준정규분포 확률에 대응시키고 여기에 누적 표준정규분포의 역함수를 취하여 Q통계치들을 산출하게되며 이 값들은 표준정규분포 값을 가지게 된다.

그리고 공정의 파라미터 값은 통상적으로 100개이상의 보정 샘플을 통해 추정하는 것이 바람직하다(Hillier(1969)).

이러한 방법들을 토대로, 위에서 설명한 것과 같이, X_1을 첫 번째 불량이 발생할 때까지의 검사 개수, X_2을 두 번째 불량이 발생할 때까지의 검사 개수라고 한다면, Q통계치는 다음과 같이 정의된다.

$$u_r = G(X_r;p_0) = 1-(1-p_0)^{X_r} \qquad r=1,\ 2,... \tag{4}$$

$$Q_r = -\Phi^{-1}(u_r) \tag{5}$$

$p=p_0$ 가 상수일 때, Q_r값들은 대략 독립적인 표준 정규분포 통계치이다. 이러한 정규성은 p_0가 작을수록 더 낮은 근사치를 제공해 준다.

이 관리도의 관리 한계는 다음과 같이 주어진다.

$$UCL=3, \quad CL=0, \quad LCL=-3$$

2.3 p가 알려지지 않은 경우에 대한 Q관리도

관리도를 설계하기 위해 필요한 p값을 생산 전에 항상 알 수는 없다. 따라서 p가 알려져 있다는 가정에 의존하지 않는 관리도 설계방법이 요구된다.

기하분포를 따르는 X_1, X_2, ... , X_r에 대하여, $t_r=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_r$ 일 때 확률함수 $\tilde{g}(x;t_r,r)$ 와 분포함수 $\tilde{G}(x;t_r,r)$ 을 UMVU방법에 의해 추정하면 다음과 같이 주어진다(Lehmann(1983), Patil(1963), O'Reilly와 Quesenberry(1972)).

$$\underset{g}{\sim}(x;t_r,r) = \frac{(r-1)(t_r-r-x+2)\cdots(t_r-x-1)}{(t_r-r+1)\cdots(t_r-1)} \tag{6}$$

$$\underset{G}{\sim}(x;t_r,r) = \begin{pmatrix} 0, & x<1 \\ \sum_{x'=1}^{[x]} \underset{g}{\sim}(x';t_r,r), & 1\le x\le t_r-r+1 \\ 1, & x\ge t_r-r+1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$r\in\{2,3,...\},\ x\in\{1,2,...,t_r-r+1\}$$

위의 추정치를 이용하여 Q 통계치는 다음과 같이 정의된다.

$$u_r = \underset{G}{\sim}(X_r;t_r,r) \tag{8}$$

$$Q_r = -\Phi^{-1}(u_r),\quad r=2,3,... \tag{9}$$

공정이 안정할 때, Q_r값들은 대략 독립된 표준 정규 랜덤 변수로서 분포될 것이다. 관리한계선은 파라미터가 알려져 있는 경우와 같다.

3. 검사오류

3.1 검사오류의 특성

계수 샘플링에는 두 가지 형태의 오류가 존재한다. 양품이 불량으로서 분류되는 1종 오류와 불량품이 양품으로 분류되는 2종 오류가 바로 그것이다.

우선 다음과 같이 변수들을 가정하자.

E_1 = 양품이 불량으로 분류되는 사상

E_2 = 불량품이 양품으로 분류되는 사상

A = 제품이 불량인 사상

B = 제품이 불량으로서 분류되는 사상

이때 제품이 불량으로 분류되는 사상은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(B)=P(A)P(\overline{E}_2)+P(\overline{A})P(E_1) \tag{10}$$

각 사상은 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$p=P(A)$, 실제 불량률

$p_e=P(B)$, 외견상 보여지는 불량률

$e_1=P(E_1)$, E_1이 발생하는 확률

$e_2=P(E_2)$, E_2가 발생하는 확률

위의 네 가지 양에 대한 정의에 따라 외견상 보여지는 불량률에 대한 표현은 매우 합리적으로 다음과 같이 표현된다.

$$p_e=p(1-e_2)+(1-p)e_1 \tag{11}$$

오류 비율 e_1과 e_2의 추정방법은 기존에 제시되어 있다. 그리고 참고로 1종 오류, 다시 말해서, 양품을 불량으로 판단하는 경우는 극히 드물다고 논평하고 있으며 1종 오류는 2종 오류보다 그 발생률이 낮지만 불량률에 미치는 영향은 2종 오류 보다 크며, 반대로 2종 오류는 발생률이 많지만 불량률에 미치는 영향은 1종 오류에 비해 상대적으로 낮은 편이다. 그리고 위의 오류 모델은 자동화된 검사 활동과 검사자에 의한 검사활동에 그 적용이 가능하다[2][3].

3.2 비상수 검사오류

Biegel는 검사오류가 실제 불량률 p의 선형함수로 나타나는 검사공정을 발견하고 이점에 착안하여 각각 1종 오류와 2종 오류에 대한 모델을 다음과 같이 제시하였다.

$$e_1(p)=1-(a_1+b_1p) \tag{12}$$

$$e_2(p)=1-(a_2+b_2p) \tag{13}$$

여기서 a_i는 $p=0$ 일 때 오류 i에 대한 절편 값을 나타내며, b_i는 p의 증가에 대한 e_i의 기울기를 나타낸다.

4. 기하분포 Q관리도에 대한 검사오류의 영향

검사오류를 고려한 기하분포 Q관리도는 다음 두 가지 경우로 나누어 제시된다.

첫 번째로, 알려진 파라미터 p에 검사오류를 고려하는 관리도 설계 방법을 들 수 있다. 이 경우는 파라미터 p도 또한 과거의 데이터에 의해 얻어진 값이므로 검사오류가 포함된 불량률이라고 간주할 수 있다. 따라서 p를 검사오류가 고려된 값으로 변환시켜 관리한계를 설정하게 된다.

두 번째는 관리한계선을 변환시키는 방법이다. 이 경우는 관리한계를 검사오류가 반영된 관리한계로 변환시킴으로써 검사오류를 보정하는 관리도를 설계하게 된다. 이 경우는 위의 첫 번째 경우보다 그 정밀도가 다소 떨어지기는 하나 파라미터가 알려져 있지 않은 경우의 기하분포 Q관리도에 효과적으로 이용할 수 있는 방법이다. 그리고 본 논문에서는 위에서 제시된 두 가지 방법의 수행도 평가를 위해 OC곡선을 이용한다.

4.1 기하분포 Q관리도의 OC곡선

OC곡선은 일반적으로 공정의 관리상태 여부를 탐지할 목적으로 관리도를 사용하는 경우 관리도가 공정변화를 얼마나 잘 탐지하는지를 나타내는 것으로, 공정의 품질수준과 그 수준에서 채취된 통계량이 관리한계선 내에 타점 될 확률과의 관계를 나타낸다. 따라서 OC곡선은 공정품질수준이 변화한 경우에도 관리도상의 한 점이 관리한계선 내에 들어감으로써 공정에 변화가 없다고 잘못 판단할 위험(소비자 위험)을 나타낸다.

이 관리도는 이산형 분포와 연속형 분포가 결합된 형태의 관리도로서 OC곡선은 다음을 통해서 수치적으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr(UCL \le Q \le LCL \mid p=p_0) \\ &= \Pr(3 \le Q \le -3 \mid p=p_0) \\ &= \Pr(Q \le 3 \mid p=p_0) - \Pr(Q < -3 \mid p=p_0)\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Pr(Q \le 3 \mid p=p_0)$$
$$= \Pr\{-\Phi^{-1}(G(X;p_0)) \le 3 \mid p=p_0\}$$
$$= \Pr\{\Phi^{-1}(G(X;p_0)) \ge -3 \mid p=p_0\}$$
$$= \Pr\{G(X;p_0) \ge 0.00135\}$$
$$= 1 - \Pr\{1-(1-p_0)^x < 0.00135\}$$
$$= 1 - \Pr\left\{X < \frac{\ln(1-0.00135)}{\ln(1-p_0)}\right\}$$
$$= (1-p_0)^{[c_{UCL}]},$$
$$c_{UCL} = \frac{\ln(1-0.00135)}{\ln(1-p_0)} \qquad (15)$$

$[c]$은 c보다 작지 않은 가장 작은 정수를 의미한다.

$$\Pr(Q < -3 \mid p=p_0)$$
$$= \Pr\{-\Phi^{-1}(G(X;p_0)) < -3 \mid p=p_0\}$$
$$= \Pr\{\Phi^{-1}(G(X;p_0)) > 3 \mid p=p_0\}$$
$$= \Pr\{G(X;p_0) > 0.99865\}$$
$$= 1 - \Pr\{1-(1-p_0)^x \le 0.99865\}$$
$$= 1 - \Pr\left\{X \le \frac{\ln(1-0.99865)}{\ln(1-p_0)}\right\}$$
$$= (1-p_0)^{[c_{LCL}]} \qquad (16)$$

$c = \frac{\ln(1-0.99865)}{\ln(1-p_0)}$ 일 때,

$c_{LCL} = c+1$ c가 정수일 때
$c_{LCL} = c$ 정수가 아닐 때

따라서, OC곡선의 식은 식(17)으로 표현할 수 있다.

$$\Pr(Q \le 3 \mid p=p_0) - \Pr(Q < -3 \mid p=p_0)$$
$$= (1-p_0)^{[c_{UCL}]} - (1-p_0)^{[c_{LCL}]} \qquad (17)$$

<예제 1>

예를 들어, p=0.0001인 기하분포에 대한 OC곡선을 작성하면, 식(15)과 (16)에 의해서 각각 $[c_{UCL}]=14$, $[c_{LCL}]=66074$ 로 구해지며, 식(17)에 의해 그림1과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\Pr(Q \le 3 | p=p_0) - \Pr(Q < -3 | p=p_0)$$
$$= (1-p_0)^{14} - (1-p_0)^{66074}$$

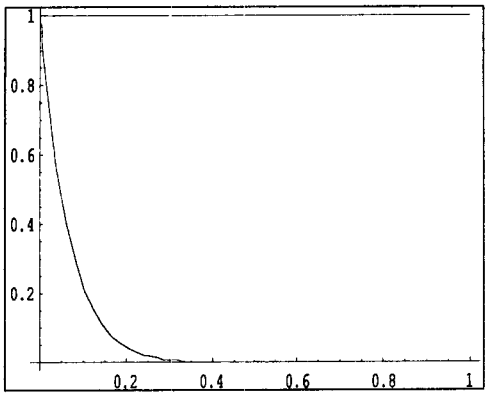

그림 1. p_0 = 0.0001일 때 OC곡선

4.2 검사오류에 의한 OC곡선의 변화

만일 파라미터가 $p=p_0$로 알려져 있는 경우, 관리도 위의 점들은 다음과 같은 변환을 통해서 타점 되어진다.

첫 번째, 식(18)을 통해 z의 값을 구한다.

$$1-(1-p_0)^{[x]} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw \qquad (18)$$

두 번째, 위의 식에 의해 구해진 z값에 음의 부호를 취한 값, 즉 -z값을 $UCL=3$, $CL=0$, $LCL=-3$ 인 표준 관리도 위에 타점 하게 된다. 이러한 변환과정은 식(19)로 간편하게 바꾸어 쓸 수 있다.

$$(1-p_0)^{[x]} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw \qquad (19)$$

이제 이런 변환과정에 검사오류를 고려해보기로 한다.

우선 기하분포의 실제 불량률이 p_0라고 가정할 때 이 불량률은 1종 오류와 2종 오류의 영향에 의해서 식(11)과 같이 외견상으로 보여지는 불량률인 p_e로 식(20)과 같이 나타나게 된다.

$$p_e = p_0(1-e_2) + (1-p_0)e_1 \qquad (20)$$

따라서 기하분포 Q관리도는 아래와 같이 변형된다.

$$u_{er} = G(X_r; p_e) = 1-(1-p_e)^{X_r} \qquad r = 1,\ 2,... \tag{21}$$
$$Q_{er} = -\Phi^{-1}(u_{er})$$

또는

$$(1-p_e)^{[x]} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw \tag{22}$$

앞으로 본 논문에서는 검사오류의 발생 유형에 따라 다음과 같이 분류하기로 한다.

- p_{e0} : **1종 오류(e_1)과 2종 오류(e_2)가 모두 0인 경우**
- p_{e1} : **1종 오류만 발생하는 경우**
- p_{e2} : **2종 오류만 발생하는 경우**
- p_{e3} : **1종 오류와 2종 오류가 모두 발생되는 경우**

따라서 관리한계의 식은 식(23)로 표현할 수 있다.

관리상한 $UCL=3$ **은**

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw = (1-p_{ei})^{[c_{UCL}]}$$

관리상한 $LCL=-3$ 은

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw = (1-p_{ei})^{[c_{LCL}]}$$

$$i = 0,1,2,3 \tag{23}$$

로 표현할 수 있다.

OC곡선의 식은 또한 다음과 같이 변형된다.

$$\Pr(Q \le 3 | p = p_{ei}) - \Pr(Q < -3 | p = p_{ei})$$
$$= (1-p_{ei})^{[c_{UCL}]} - (1-p_{ei})^{[c_{LCL}]} \tag{24}$$

이해를 돕기 위해 다음과 같은 예제를 들어보기로 한다.

<예제 2>

$p_0 = 0.0001$ 이고, 1종 오류(e_1)와 2종 오류(e_2)가 각각 (0, 0), (0.001, 0), (0, 0.05), (0.001, 0.05)인 경우를 생각해보자. 이때 실제측정치 p_0는 검사오류에 의해 아래와

같이 왜곡된 현상이 발생된다.

$$p_{e0}=p_0(1-0)+(1-p_0)\ 0\ =p_0$$

$$p_{e1}=p_0(1-0)+(1-p_0)0.001$$
$$=p_0+(1-p_0)0.001$$

$$p_{e2}=p_0(1-0.05)+(1-p_0)\ 0\ =0.95p_0$$

$$p_{e3}=p_0(1-0.05)+(1-p_0)0.001$$
$$=0.95p_0+(1-p_0)0.001$$

여기서 Q관리도의 한계 즉, 표준정규 분포의 $UCL=3$ 은 식(19)에 의해 기하분포의 누적확률 값 0.00135에 해당되며, $LCL=-3$ 은 0.99865가 된다. 이를 식으로 나타내면,

$UCL=3$ 의 경우

$$\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw=0.99865=(1-p_0)^{[c_{UCL}]}$$

$LCL=-3$ 의 경우

$$\int_{-\infty}^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw=0.00135=1-(1-p_0)^{[c_{LCL}]}$$

이고, 만일 $p_0=0.0001$ 면, $[c_{UCL}]=14$, $[c_{LCL}]=66074$ 이다.

실제 불량률 p_0가 검사오류의 영향으로 인한 불량률 p_{e2}, p_{e3}, p_{e4}로 왜곡된고 관리한계가 그대로 3과 -3이라고 한다면 OC곡선이 어떻게 변하는지 식(22)을 통해서 살펴보자.

p_{e1} 일 때, 관리상한 $UCL=3$ 은 $(1-0.0010999)^{[c_{UCL}]}=\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw$

관리하한 $LCL=-3$ 은 $(1-0.0010999)^{[c_{LCL}]}=\int_{-\infty}^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw$

이므로

$(1-0.0010999)^{[c_{UCL}]}=0.99865$

$(1-0.0010999)^{[c_{LCL}]}=0.00135$

따라서 $[c_{UCL}]=2$, $[c_{LCL}]=6005$

p_{e2} 일 때, 관리상한 $UCL=3$ 은 $(1-0.000095)^{[c_{UCL}]}=\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw$

관리하한 $LCL=-3$ 은 $(1-0.000095)^{[c_{LCL}]}=\int_{-\infty}^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw$

이므로

$$(1-0.000095)^{[c_{UCL}]}=0.99865 \quad ,$$

$$(1-0.000095)^{[c_{LCL}]}=0.00135$$

따라서 $[c_{UCL}]=15$, $[c_{LCL}]=69551$

p_{e3}일 때, 관리상한 $UCL=3$ 은 $(1-0.0010949)^{[c_{UCL}]}=\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw$

관리하한 $LCL=-3$ 은 $(1-0.0010949)^{[c_{LCL}]}=\int_{-\infty}^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw$

이므로

$$(1-0.0010949)^{[c_{UCL}]}=0.99865 \quad ,$$

$$(1-0.0010949)^{[c_{LCL}]}=0.00135$$

따라서 $[c_{UCL}]=2$, $[c_{LCL}]=6032$

검사오류의 영향은 UCL과 LCL에 해당되는 기하분포 확률함수 X값들을 위와 같이 변화시키게 된다. 이러한 영향을 보다 명확하게 표현하기 위해 OC을 작성하여 살펴보기로 한다.

OC 곡선의 식은 검사오류에 의해 변화된 불량률 값 에 따라

p_{e0}인 경우 $(1-p_0)^{14}-(1-p_0)^{66074}$

p_{e1}인 경우 $(1-p_{e1})^{2}-(1-p_{e1})^{6005}$

p_{e2}인 경우 $(1-p_{e2})^{15}-(1-p_{e2})^{69551}$

p_{e3}인 경우 $(1-p_{e3})^{2}-(1-p_{e3})^{6032}$

로 표현될 수 있으며

위의 결과에 따라 OC곡선은 그림 2과 같다.

3.3 파라미터 p를 이용한 보정관리도

이 방법은 파라미터 p값이 p_0로 알려져 있는 경우, 파라미터 값이 검사오류에 의해 왜곡된 값 p_{ei}로 나타날 때, 이를 고려하여 관리도의 한계를 설계하는 방법으로, 표준정

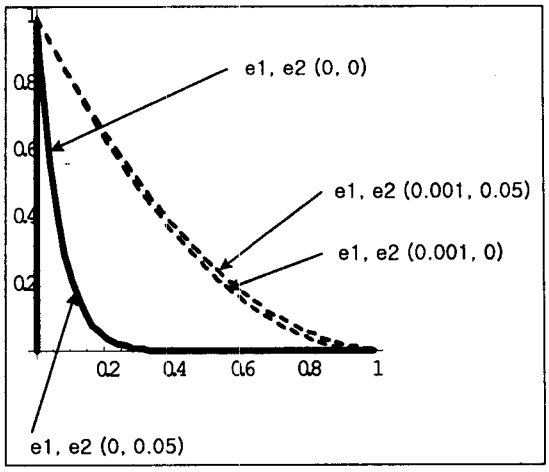

그림 2. OC곡선 - 검사오류의 영향

규분포상의 관리한계 즉, UCL과 LCL 값을 p_{ei}의 변화에 따라 움직여 줌으로써 검사오류를 보정하는 방식이다. 이것을 세부적으로 살펴보면, 우선 검사오류가 파라미터에 영향을 미칠 때 관리한계에 대한 식의 형태는 식(23)과 같다. 하지만, 여기에서는 $[c_{UCL}]$, $[c_{LCL}]$ 값을 고려하는 방법이 다르다.

우선 검사오류가 발생되지 않을 때, $[c_{UCL}]$, $[c_{LCL}]$ 값을 각각 a와 b하자. 이 a와 b는 하나의 불량이 발견될 때까지의 최대 검사 개수를 나타낸다. 따라서 불량률이 왜곡될 지라도 a와 b를 일정한 상수로 유지시키고, 반대로 관리한계 (LCL=-3 , UCL=3) 값을 변화시켜 줌으로써, 불량의 변화에 따른 탐지 확률을 일정하게 유지시켜 줄 수 있다. 이로써, 불량률에 민감한 관리 한계가 설정될 수 있게 되는 것이다. 위 내용을 수식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(1-p_{ei})^a = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw \qquad (25)$$

$$(1-p_{ei})^b = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw \qquad i=1,2,3,4$$

그리고 OC곡선의 식은 다음과 같이 변환된다.

$$\Pr(Q \le 3 | p=p_e) - \Pr(Q < -3 | p=p_e)$$
$$= (1-p_e)^a - (1-p_e)^b$$

표 1. 파라미터 p를 이용한 관리도 변환과정

변환 전 관리한계	변환 과정	변환 후 새로운 관리한계
UCL=3	$(1-p_e)^{14} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw$	관리 상한 Z값
LCL=-3	$(1-p_e)^{66074} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} dw$	관리 하한 Z값

표 2. 예제의 변환 결과

에러 유형	변환 전 관리한계	변환 과정	변환 후 새로운 관리한계
p_{e1}	$UCL=3$	$(1-0.0010999)^{14}=0.984711$	2.163
	$LCL=-3$	$(1-0.0010999)^{66074}=1$	-3.09
p_{e2}	$UCL=3$	$(1-0.000095)^{14}=0.998671$	3.01
	$LCL=-3$	$(1-0.000095)^{66074}=0.0018786$	-2.90
p_{e3}	$UCL=3$	$(1-0.0010949)^{14}=0.98478$	2.164
	$LCL=-3$	$(1-0.0010949)^{66074}=1$	-3.09

우리는 이와 같은 방법이 측정오류에 비교하여 어느 정도 보정이 이루어지는지를 살펴보기 위해 앞의 예를 인용하기로 한다.

<예제 3>

$p_0=0.0001$ 이고, 1종 오류(e_1)와 2종 오류(e_2)가 각각 (0, 0), (0.001, 0), (0, 0.05), (0.001, 0.05)인 경우에 대해서 살펴보기로 한다.

p_{e0}인 경우, 즉 1종 오류와 2종 오류가 모두 0인 경우 식(22)에 의해 관리한계는

$$\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw=0.99865=(1-0.0001)^{[c_{UCL}]}$$

$$\int_{-\infty}^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw=0.00135=(1-0.0001)^{[c_{LCL}]}$$

으로 표현되며, $[c_{UCL}]=a=14$, $[c_{LCL}]=b=66074$ 이다.

위에서 설명했듯이 a와 b는 왜곡된 불량률 p_{e2}, p_{e3}, p_{e4}에 따른 관리도의 영향을 보정하는데 사용되어진다. 다시 말해서, 관리한계 식에 실제 불량률 p_0대신에 p_{e2}, p_{e3}, p_{e4}값을 각각 대입하고, 표준 정규분포의 UCL과 LCL에 해당되는 기하분포의 누적확률 값 a와 b, 즉, 4와 66074을 각각 대입시킨다. 이 방법을 사용하면, p_{e2}, p_{e3}, p_{e4}값에 따라 관리도의 한계가 변화되면서 검사오류를 보정할 수 있게된다. 지금까지의 내용
을 토대로 관리한계를 계산하면 표1과 표2로나타낼 수 있다.

이런 변환 과정을 거친 후 어느 정도의 보정이 이루어졌는지를 살펴보기 위해 OC곡선을 그려보기로 한다.

OC곡선의 식은 검사오류에 의해 변화된 불량률의 값에 따라,

p_{e0}인 경우 $(1-p_0)^{14}-(1-p_0)^{66074}$

p_{e1}인 경우 $(1-p_{e2})^{14}-(1-p_{e2})^{66074}$

p_{e2}인 경우 $(1-p_{e3})^{14}-(1-p_{e3})^{66074}$

p_{e3}인 경우 $(1-p_{e4})^{14}-(1-p_{e4})^{66074}$

로 표현된다.

위의 수식을 이용하여 OC곡선은 그리면 그림3과 같다.

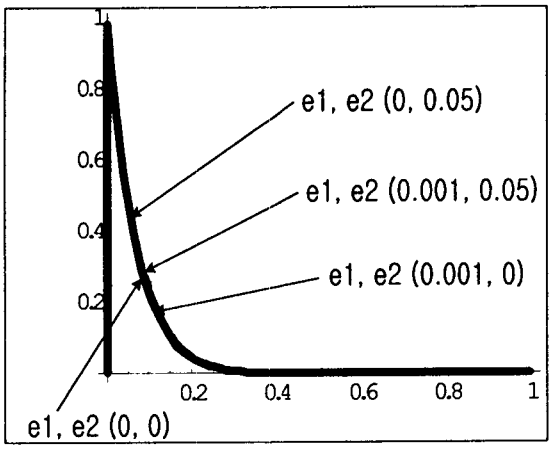

그림 3. 파라미터 p를 이용한 보정 관리도 OC곡선

3.4 관리한계 *UCL*과 *LCL*을 이용한 보정 관리도

이 방법은 위에서 제시된 방법보다 보정의 정도가 낮지만 파라미터 p가 알려져 있지 않은 기하분포 Q관리도에 그 활용이 가능하다는 이점을 가지고 있다. 이 설계방법은 위에서 제시된 방법과는 달리 표준 정규분포의 *UCL*과 *LCL*의 확률 값에 검사오류를 직접 고려하여 *UCL*과 *LCL* 값을 변화시킴으로써 검사오류를 보정하는 방법이다. 이를 수식으로 표현하면,

UCL=3 인 경우

$$\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw = P_{UCL}$$

$$(1-p_0)^{[c_{UCL}]}=P_{UCL}(1-e_2)+(1-P_{UCL})e_1 \qquad (26)$$

LCL=-3 인 경우

$$\int_{-\infty}^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-w^2}{2}}dw = P_{LCL}$$

$$(1-p_0)^{[c_{UCL}]}=P_{LCL}(1-e_2)+(1-P_{LCL})e_1 \qquad (27)$$

Q관리도는 식(26)과 (27)의 변환을 통해 새로운 관리한계를 가지게 된다.
또한 OC 곡선의 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pr(Q \le 3 | p = p_{ei}) - \Pr(Q < -3 | p = p_{ei})$$
$$= (1 - p_{ei})^{[c_{UCL}]} - (1 - p_{ei})^{[c_{LCL}]}$$

이 절차의 이해를 위해 예제를 통해 자세히 살펴보기로 한다.

<예제 4>

예제 3과 같이 $p_0 = 0.0001$ 이고, 1종 오류(e_1)와 2종 오류(e_2)가 각각 (0, 0), (0.001, 0), (0, 0.05), (0.001, 0.05)인 경우 관리한계 다음과 같이 변한다.

$$P_{UCLei} = P_{UCL}(1 - e_2) + (1 - P_{UCL})\ e_1$$

$$P_{UCLe0} = 0.99865(1 - 0) + (1 - 0.99865)\ 0$$
$$= 0.99865$$
$$P_{UCLe1} = 0.99865(1 - 0) + (1 - 0.99865)0.001$$
$$= 0.998651$$
$$P_{UCLe2} = 0.99865(1 - 0.05) + (1 - 0.99865)\ 0$$
$$= 0.948718$$
$$P_{UCLe3} = p_0(1 - 0.05) + (1 - p_0)0.001$$
$$= 0.948719$$

$$P_{LCLei} = P_{LCL}(1 - e2) + (1 - P_{LCL})\ e_1$$
$$P_{LCLe0} = 0.00135(1 - 0) + (1 - 0.00135)\ 0$$
$$= 0.00135$$
$$P_{LCLe1} = 0.00135(1 - 0) + (1 - 0.00135)\ 0.001$$
$$= 0.00234865$$
$$P_{LCLe2} = 0.00135(1 - 0.05) + (1 - 0.00135)\ 0$$
$$= 0.0012825$$
$$P_{LCLe3} = 0.00135(1 - 0.05) + (1 - 0.00135)\ 0.001$$
$$= 0.00228115$$

위의 이 값들은 식(48)의 좌변 값이 되며, 이에 해당되는 관리한계와 기하분포 확률변수 값 $[c_{UCL}]$, $[c_{LCL}]$은 다음과 같다.

$(1-p)^{[c_{UCL}]} = P_{UCLei}$

$(1-p)^{[c_{LCL}]} = P_{LCLei}$

검사 오류에 의해 불량률이 p_{e0}로 변하는 경우,

즉 P_{UCLe0}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{UCL}]} = 0.99865$ 이고 관리상한은 $UCL=3$ 되고

P_{LCLe0}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{LCL}]} = 0.00135$ 관리하한은 $LCL=-3$ 이 된다.

따라서 $[c_{UCL}]=14$, $[c_{LCL}]=66074$

검사 오류에 의해 불량률이 p_{e1}로 변하는 경우, 즉

P_{UCLe1}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{UCL}]} = 0.99865$ 1 관리상한은 $UCL=3$ 이고

P_{LCLe1}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{LCL}]} = 0.00234865$ 관리하한은 $LCL=-2.83$ 이 된다.

따라서 $[c_{UCL}]=24$, $[c_{LCL}]=66084$

검사 오류에 의해 불량률이 p_{e2}로 변하는경우, 즉

P_{UCLe2}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{UCL}]} = 0.948718$ 이 경우 관리상한은 $UCL=1.6328$ 이며,

P_{LCLe2}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{LCL}]} = 0.0012825$ 관리하한은 $LCL=-3.032$ 이 된다.

따라서 $[c_{UCL}]=13$, $[c_{LCL}]=29703$

검사 오류에 의해 불량률이 p_{e3}로 변하는경우, 즉

P_{UCLe3}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{UCL}]} = 0.948719$ 이 경우 관리상한은 $UCL=1.633$ 이 되며,

P_{LCLe3}일 때 $(1-0.0001)^{[c_{LCL}]} = 0.00228115$ 관리하한은 $LCL=-2.842$ 이 된다.

따라서 $[c_{UCL}]=23$, $[c_{LCL}]=29703$

위의 결과를 토대로 OC곡선을 작성하면 그림 4와 같다.

$\Pr(Q \le 3 | p=p_{ei}) - \Pr(Q < -3 | p=p_{ei})$

$= (1-p_{ei})^{[c_{UCL}]} - (1-p_{ei})^{[c_{LCL}]}$

$(e_1, e_2)=(0, 0)$ 일 때 $(1-p_0)^{14} - (1-p_0)^{66074}$

$(e_1, e_2)=(0.001, 0)$ 일 때 $(1-p_{e1})^{24} - (1-p_{e1})^{66084}$

$(e_1, e_2)=(0, 0.05)$ 일 때 $(1-p_{e2})^{13} - (1-p_{e2})^{29703}$

$(e_1, e_2)=(0.001, 0.05)$ 일 때 $(1-p_{e3})^{23} - (1-p_{e3})^{29703}$

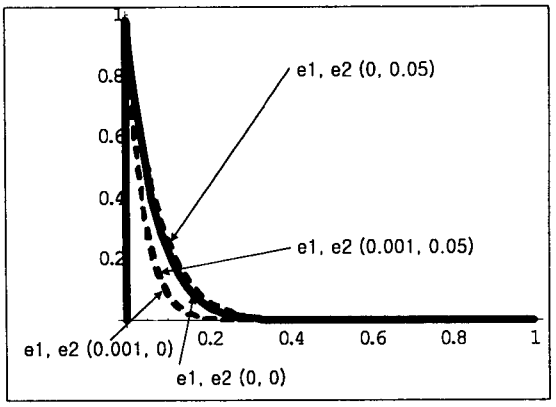

그림 4. 관리한계 설계방법을 이용한
OC 곡선

4. 결 론

검사오류는 실제 산업현장에서 충분히 발생할 수 있는 부분이다. 본 논문에서는 계수치 관리도 즉, 기하분포 Q관리도에서 고려될 수 있는 검사오류인 1종 오류와 2종 오류를 활용하여 그 영향을 살펴보고, 이의 영향에 민감한 관리도의 설계를 통해 효과적인 관리도 작성과 올바른 공정의 모니터링를 위한 하나의 방법론을 제시했다는 데에 의의가 있겠다.

특히 기하분포의 이용은 극소불량이 발생하는 공정을 모니터링 하는데 활용되는 분포들중 가장 많이 이용되는 분포이므로, 이 분포를 이용한 기하분포 Q관리도에 대한 고찰은 다품종 소량화 되어가고 낮은 불량률을 요구하는 현대 산업구조에 있어서 매우 중요하다 할 수 있겠다.

기하분포 Q관리도의 설계방법은 서두에서 제시된 것과 같이 파라미터의 존재 여부에 따라 두가지로 나누어지는데, 본 연구에서는 이를 고려하여 각각의 경우에 대한 검사오류를 고려한 관리도을 설계하여 그 적용성을 일반화 시켰다.

참고문헌

[1] 강상균, 남기원, 전규창(1993), "「매스매티카」 입문에서 활용까지," 성안당

[2] Biegel, J.E.(1974), "Inspector Errors and Sampling Plans," *IIE Transactions*, Vol. 6, No. 4, pp. 284-287.

[3] Case, K.E.(1980), "The p Control Chart Under Inspection Error," *Journal of Quality Technology*, Vol. 12, No. 1, pp. 1-9.

[4] Farnum, N.R.(1992), "Control Charts for Short Runs: Nonconstant Process and Measurement Error," *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No. 3, pp 138-144.

[5] Koons, G.F., Luner, J.J.(1991), "SPC in Low-Volume Manufacturing: A Case

Study," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 4, pp. 287-295.

[6] Pyzdek, T.(1993), "Process Control for Short and Small Runs," *Quality Progress*, Vol. 26, No. 4, pp. 51-60.

[7] Quesenberry, C.P.(1991a), "SPC Q Charts for Start-Up Processes and Short or Long Runs," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 3, pp. 213-224.

[8] Quesenberry, C.P.(1991b), "SPC Q Charts for a Binomial Parameter p: Short or Long Runs," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 3, pp. 239-246.

[9] Quesenberry, C.P.(1991c), "SPC Q Charts for a Poisson Parameter λ: Short or Long Runs," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 4, pp. 296-303.

[10] Quesenberry, C.P.(1995a), "On Properties of Q Charts for Variables," *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 3, pp. 184-203.

[11] Quesenberry, C.P.(1995b), "On Properties of Binomial Q charts for Attributes," *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 3, pp. 204-213.

[12] Quesenberry, C.P.(1995c), "On Properties of Poisson Q Charts for Attributes," *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 4, pp. 293-303.

[13] Quesenberry, C.P.(1995d), "Geometric Q Charts for High Quality Processes," *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 4, pp. 304-315.