H_2/H_∞ 와 μ 이론을 이용한 유연 빔의 위치제어

최 연욱, 이 형기
부경대학교 제어계측공학과

Robust Positioning Control of a Flexible beam using H_2/H_∞ and μ theory

Yeon-Wook CHOE and Hyung-Ki LEE
Dept. of Control & Instrumentation, Pukyong National Univ.
wook@pknu.ac.kr

Abstracts

The objective of this paper is to present a method for designing robust positioning control systems of a flexible arm using H_2/H_∞ and μ theory. We begin with a description of the flexible arm based on the model identification method and discuss the derivation of the model uncertainty. The validity of the obtained model is confirmed experimentally. Next, a robust controller is designed based on the H_2/H_∞ and μ theory by which we can improve robustness of the entire system. On this occasion, we also propose a general plant formation suitable to H_2/H_∞ control. Finally, the effectiveness of the proposed design method is verified through experimentation.

I. 서론

유연한 빔(beam)의 제어에 있어서 문제로 되는 것은 빔 자체가 자지는 고차모드의 동적 특성이 플랜트의 모델링과정에서 일반적으로 무시된다는 점이다. 따라서 강인한 제어기의 설계를 위해서는 제어기의 설계과정에서 이와 같은 플랜트가 가지는 불확실성을 반영해야 할 필요가 있다. 이러한 플랜트의 불확실성을 이용한 강인한 제어기의 설계이론으로서 H_∞ 제어이론이 상당한 성과를 올리고 있다.

그러나 H_∞ 이론은, 외란에서 평가신호까지의 전달함수행렬의 최대특이값(maximum singular value)을 기초로 하는 이론이므로 설계된 제어기가 보수적으로 될 가능성이 높다. 최근 H_∞ 설계법에 H_2 특성을 도입함으로서 위에서 언급한 보수성의 감소를 어느 정도 해결할 수 있게 되었다. 그렇지만 이 방법 역시 최대특이값을 중심으로 전개되고 있으므로 제어기의 보수성을 피할 수는 없다. 그러나 본 연구의 경우와 같이 플랜트가 가지는 불확실성의 구조를 미리 알 수 있다면 이를 적극적으로 활용함으로서 제어기의 보수성을 상당히 감소시킬 수 있다.

본 연구의 목적은 두 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 유연한 빔과 같이 모델링과정에서 불확실성을 가지는 시스템에 있어 기준모델과 강인한 제어기 설계를 위한 불확실성의 영역을 구하는 간단한 방법을 제안한다. 둘째, H_2/H_∞ 와 μ이론의 적용을 위한 일반화플랜트를 제시하고 시뮬레이션과 실험을 통하여 이것의 유효성을 확인한다.

II. 유연한 빔의 모델링

본 연구에 사용된 빔은 길이 1.2m, 폭 0.2cm 의 알루미늄재질로 이루어져 있으며 수평으로 자유롭게 움직이며, 수직운동은 하지 않는 것으로 간주한다. 빔의 한쪽 끝은 DD모터와 함께 단단한 축 위에 고정되어 있으며, 다른 한쪽은 자유롭게 움직이며 끝 부분에 LED가 부착되어 있다. 축 위에 장착된 PSD카메라가 LED의 움직임을 감지하여 현재의 축의 위치를 검출한다. 그림1에 개략적인 전체 시스템을 표시하였다.

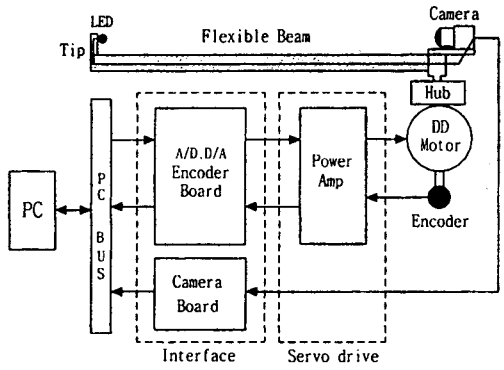

그림1. 실험을 위한 전체 시스템의 구성
Fig.1 The Sketch of experimental devices

본 연구에서는 제어기의 설계를 위한 모델링을 다음과 같이 두 단계, 즉 수학적 및 실험적 단계로 나누어서 실행한다.

(a) **수학적 모델**

먼저 유연한 빔은 균일한 밀도를 가지고 있으며 비틀림 현상에 의한 빔의 움직임은 없는 것으로 가정한다. 이때 축에서 x 만큼 떨어진 점 p에서의 빔의 각도를 $\theta(t)$로 하고 빔의 탄성에 의한 변형을 $w(t,x)$로 하면 현재의 빔의 위치는 다음 식으로 주어진다(그림2 참조).

$$y(x,t) = w(x,t) + \theta(t)x \qquad (1)$$

다음에 빔의 동적인 움직임을 나타내기 위하여 분산파라메터법을 적용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$I_a \ddot{q}_o + D_m \dot{q}_o = K_a T \qquad (2)$$

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = (1/I_a) a_i T \qquad (3)$$

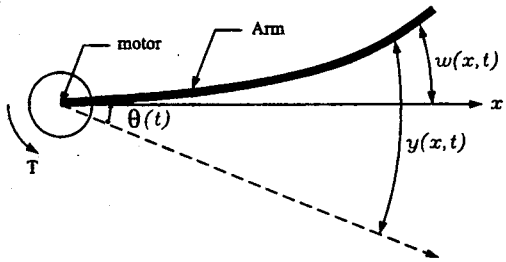

그림2. 유연한 빔의 모델
Fig.2 Model of Flexible Beam

이때 q_o는 고정모드, $q_i(i=1,2,\cdots,\infty)$는 i 번째 유연모드를 의미하고 있다. 또 D_m은 모터축의 감쇄, K_a는 모터정수, ζ_i, ω_i는 i 번째 모드의 감쇄율 및 고유진동수를 각각 나타내고 있다. 이러한 식을 이용하여 유연한 빔을 assumed-mode법을 이용하면 빔 선단의 탄성변형은

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n} q_i(t)\phi_i(x) \qquad (4)$$

로 표시된다. 여기서 $\phi_i(x)$는 빔의 i 번째 모드의 고유함수이다.

상기의 관계식에서 n 번째 모드까지 만을 취하여 이것을 상태방정식으로 표현하면 아래의 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} u \qquad (5)$$

$$y = Cx$$

여기서

$$x_o = \begin{bmatrix} q_o \\ \dot{q}_o \end{bmatrix}, \quad A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D_m}{I_a} \end{bmatrix}, \quad B_o = \frac{K_a}{I_a}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다. $i=1,2,\cdots,n$의 각 모드에 대해서는 위의 고정모드와 유사한 표현식을 가진다. 단

$$C = [L \;\; 0 \;\; \phi_1(L) \;\; 0 \;\; \cdots \;\; \phi_n(L) \;\; 0] \qquad (6)$$

위의 관계식에서 각 물리파라매터를 인가하면 제어기의 설계를 위한 기준모델(nominal model)이 얻어진다.

(b) **실험을 통한 모델링**

수학적인 해석과정을 통하여 얻은 모델에는 상당한 오차가 포함되어 있을 것이다. 왜냐하면 n+1 차이상의 모드를 무시하였으며, 또한 물리파라메터 (예를 들어 관성모멘트 등)도 그의 정확한 값을 알기가 어려운 것이 많다. 이런 관점에서 좀 더 실제에 가까운 모델을 구하고 또 강인한 제어기의 설계 시에 중요한 역할을 하는 불확실성의 영역에 대한 정보를 얻기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 단계를 이용하여 모델링 하였다.

Step1: 플랜트의 주파수영역을 몇 개로 분리하여 실험을 통하여 입출력 데이터를 얻는다.

Step2: 얻은 데이터로부터 기준모델을 계산한다.

Step3: 불확실성영역을 계산한다.

아래 그림3은 상기의 과정을 세 번 반복하여 얻은 결과이다.

이때 불화실성을 나타내는 가중함수는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\left| \frac{\tilde{G}(j\omega)}{G_{nom}(j\omega)} - 1 \right| \le |W_m(j\omega)| \quad (7)$$

여기서 $G_{nom}(j\omega)$는 기준모델의 주파수응답 특성이며, $\tilde{G}(j\omega)$는 상기의 과정을 통하여 실험적으로 얻어진 주파수특성 곡선이다.

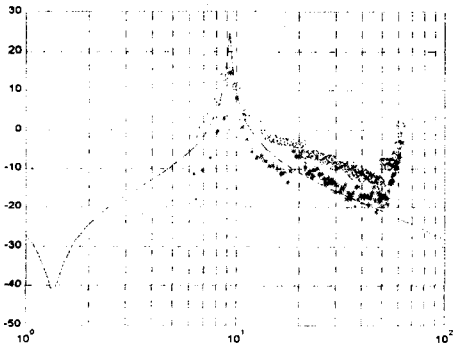

그림3 빔의 주파수 특성

Fig.3 Frequency Response of Flexible beam

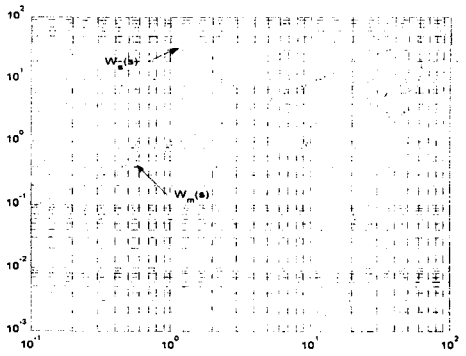

그림4. 불확실성의 영역표현

Fig.4 Uncertainty Weight Am(s)

III. 제어기 설계

제어의 목적은 플랜트가 가지는 불확실성에도 불구하고 빔의 선단을 오차 없이 가능한 신속하게 원하는 위치에 가져가는 것이다. 이를 위해 먼저 H_2/H_∞ 이론을 적용하기 위한 일반화플랜트를 제안하고 여기에 불확실성의 구조를 이용한 μ이론을 대입함으로서 제어기가 가지는 보수성을 감소시킨다.

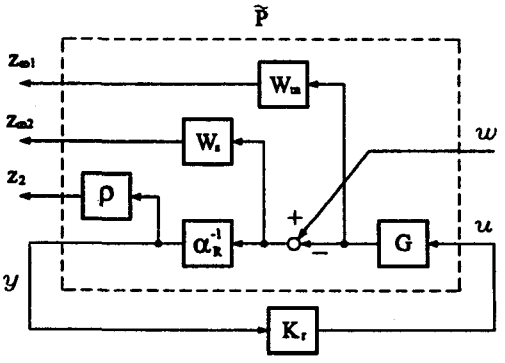

그림5 H_2/H_∞ 제어를 위한 일반화플랜트

Fig.5 The generalized plant for H_2/H_∞ control

그림5는 본 연구에서 제안하는 일반화플랜트이다. 여기서 α_R^{-1}은 내부모델의 원리에 의해 추가

된 일종의 적분기로서 전체 시스템의 강인한 성능(robust performance)향상을 추구한다.

위 그림에서 $z_{\infty 1}, z_{\infty 2}$ ms 각각 폐루프의 강인한 안정성과 기준성능과 관련된 가상적인 신호이며, z_2는 H_2 norm의 평가를 위한 가상신호이다. 그림5의 일반화플랜트에 의한 제어기설계는 다음 두 조건을 만족하는 제어기 $K(s)$를 계산하는 것이다. 즉

$$\left\| \begin{matrix} T_{z_{\infty 1} w}(s) \\ T_{z_{\infty 2} w}(s) \end{matrix} \right\|_\infty < \gamma \quad 및 \quad \| T_{z_2 w} \|_2 < \nu \quad (8)$$

식(8)을 만족하는 제어기는 선형행렬부등식(LMI)의 조건을 이용하여 전개한 뒤, 시판의 소프트웨어를 이용하면 쉽게 해를 구할 수 있다.

다음에 식(8)을 만족하는 해를 일단 LMI를 이용하여 구한 뒤, 유연한 빔이 가지는 불확실성의 구조를 이용하여 여기에 μ 설계법을 적용한다. 불확실성의 구조는 식(5)에서 유도한 빔의 상태방정식에서 빔의 감쇄정수를 정확히 파악하기 어려우므로 이것의 변동범위를 승법적인 불확실성으로 간주하여 이에 대해 μ 설계법을 적용하는 것이다. 이렇게 함으로서 H_2/H_∞설계법이 가지는 보수성을 어느 정도 완화시킬 수 있게 된다.

IV. 시뮬레이션 및 실험결과

시뮬레이션과 실험에 의한 결과를 각각 그림6, 7에 나타내었다. 그림으로부터 본 연구에서 제안한 설계법의 유효성을 확인할 수 있다.

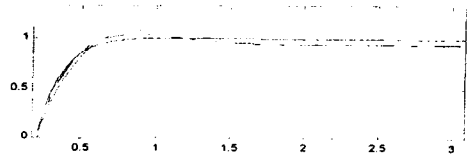

그림6 시뮬레이션 결과

Fig.6 Simulation results of the closed loop

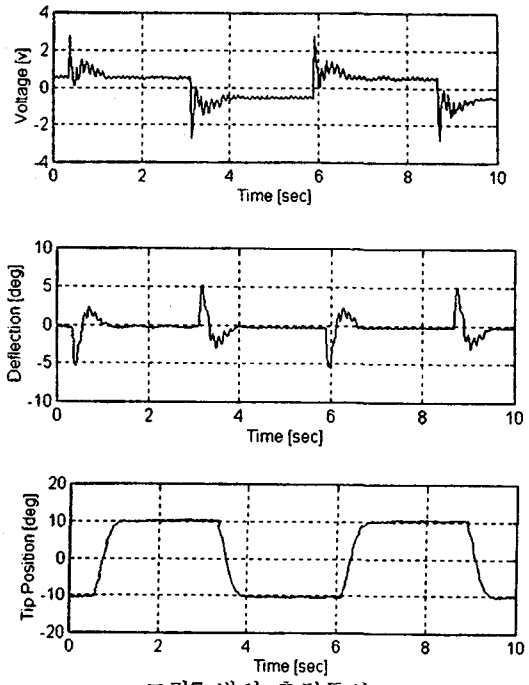

그림7 빔의 출력특성

Fig.7 Response of voltage, deformation and tip position.

V. 결론

플랜트의 불확실성을 적극적으로 활용함으로서 기존의 강인한 제어기법이 가지는 제어기의 보수성을 완화시킴으로서 제어성능을 향상시킬 수 있음을 보였다.

VI. 참고문헌

[1] H. K. Vidyasagar, "Control of single link flexible beam using Hankel norm-based reduced-order model," IEE Proc. Control Theory and Appl., vol.145, no.2 March, pp.151-158 (1998)