연속시간 유한정정제어기의 최적설계

김성열, 이금원
관동대학교 정보기술공학부(E_mail : kwlee@mail.kwandong.ac.kr)

Optimal Design of a Continuous Time Deadbeat Controller

Seung Youal Kim and Keum Won Lee
Devision of Information Technologies Eng., Kwandong University

Abstract

Deadbeat property is well established in digital control system design in time domain. But in continuous time system, deadbeat is impossible because of it's ripples between sampling points. But several researchers suggested delay elements .From some specifications such as internal model stability, physical realizations and finite time settling, unknown polynomials with delay elements in error transfer functions can be calculted. For the application to the real system, robustness property can be added.

In this paper, error transfer function is specified with 1 delay element and unkown coefficients are calculated from the specs. Especially, by varying settling time and the user-specified poles, a deadbeat controller with lower order is obtained.

I. 서 론

deadbeat 제어는 유한시간에 신호를 0으로 만드는 제어로 이산 시스템에 기초하여 그 학문적인 기초가 잘 확립이 되어 있다[1]. 그러나 이를 연속계에 응용하면 ripple이 발생하는 등 적용이 어렵다. 이러한 불필요한 리플을 제거하여야 실 시스템에 적용이 가능하다. 최초시도는 1957년 Smith가 Posicast 제어[2]를 제안하면서 연속계 시스템에 대해서도 적용가능성이 연구되기 시작했고, 뒤이어 일본의 학자들이 주로 이 부분에 대해서 많은 연구를 하였다[3]-[8]. 특히 서보시스템설계자인 엔지니어인 Kurosawa는 Posicast 제어가 시스템의 역이 필요하여 실시스템 적용에 어려운 점을 개선하기 위해 지연요소(delay element)를 도입하였다. 일반적으로 유한한 신호는 라플라스변환을 하게되면 e^{-sT}형태의 지연항이 나타나게 되는데, 바로 이 항이 지연요소가 된다. 이런 지연요소를 사용하여 출력이 유한정정이 되는 제어기를 Kurosawa는 연속계 정정제어기(CdbC,Continuous time deadbeat Controller)라고 하였다[3]. CdbC는 지연요소가 포함된 제어기식에서 미지계수를 내부안정, 제어기 실현가능성 등의 적당한 조건을 통하여 구한다.. Nobuyama는 Youla의 파라미터화법을 이용하여 CdbC를 설계하였는데, 지연요소의 선형조합으로 파라메타 다항식을 선정하고 계수들을 내부안정등과 같은 적당한 조건에 따라 구했다[4]. 이때 유한 정정은 최대크기의 지연시간으로 정의가 된다.

또 CdbC를 실시스템에 적용하기 위해서는 견실성(robustness)의 확보가 필요하고, 이에 대해서 Tsumura는 중심해에 대한 자유도 개념을 도입하였고[5],[6], Nobuyama 및 Furuta는 다항식 접근법을 사용한 CdbC를 설계하였다[7],[8]. 견실성을 나타내는 지표는 H_∞놈값과 관련이 있고, 따라서 가법적 섭동등에 대한 견실안정성등 요구되는 식의 최소화를 달성하는 여분의 자유도에 의해 만들어진 파라메타를 구하는 것이다.

본 논문에서는 연속계 유한정정을 위해서 Nobuyama[7]와 같이 오차신호에 대한 유한라플라스변환식에서 내부안정, 제어기 실현가능성 및 유한정정의 조건에서 다항식에 대한 보간 조건

및 차수조건을 설정하고 이로부터 제어기를 얻는는다. 특히 [7][8]과는 달리 설계자가 정하는 정정시간 및 극점에 대한 견실성능과 관계되는 H_∞놈값을 최소로 할 수 있는 최적설계를 하며, 제어입력이 미분가능한 부드러운 곡선이 되게 한다.

II. 문제 설정

그림1은 일반적인 연속계 귀환 제어시스템의 블록도이며, r는 기준입력, e는 오차출력, K는 설계할 제어기, u는 제어입력, G는 제어대상이고 y는 시스템 출력이다.

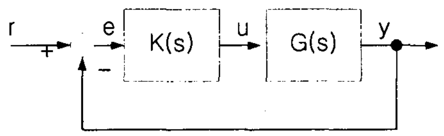

그림 1 제어시스템 블럭도

일반적으로 연속계는 출력이 일반적으로 점근정정특성을 나타내고 있는데 비해 유한정정 제어는 유한시간에 정정됨으로서 빠른 응답을 기대할 수가 있다.

그림 1의 시스템이 시간 T에서 유한정정할 경우 오차신호는

$$\begin{aligned} e(t) &= f(t),\ t < T \\ e(t) &= 0,\ t \geq T \end{aligned} \tag{1}$$

이고, 이의 라플라스 변환은

$$\begin{aligned} E(s) &= \int_0^\infty e(t)e^{-st}dt \\ &= L\{f(t)\} - e^{-sT}L\{f(t+T)\} \\ &\equiv F_0(s) + F_T(s)e^{-sT} \\ &\equiv \frac{N_1(s) + N_2(s)e^{-sT}}{D(s)} \end{aligned} \tag{2}$$

와 같다. 또 (2)식이 유한 라플라스변환[5]이 되기 위해서는 유한한 값을 가져야 한다. 즉 $D(s)$의 p개의 ν_i중근 α_i에 대해서

$$\frac{d^j}{ds^j}N_1(s)|_{s=\alpha_i} = 0,\ \frac{d^j}{ds^j}N_2(s)|_{s=\alpha_i} = 0 \tag{3}$$
$$\text{단},\ i = 1, \ldots, p,\ j = 0, \ldots, \nu_i - 1$$

가 만족되어야 한다. 미분값이 0인 것은 시간영역으로 역변환할 때 t^n형태로 곱해지는 항을 0으로 만들어야 유한정정이 가능하기 때문이다.

한편 오차신호를 이용한 제어기는

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{R(s) - E(s)}{G(s)E(s)} \\ &= \frac{R(s) - F_0(s) - F_T(s)e^{-sT}}{F_0(s)G(s) + F_T(s)G(s)e^{-sT}} \\ &= \frac{\dfrac{R(s) - F_0(s)}{F_0(s)G(s)} - \dfrac{F_T(s)}{F_0(s)G(s)}e^{-sT}}{1 + \dfrac{F_T(s)}{F_0(s)}e^{-sT}} \end{aligned} \tag{4}$$

이다. (4)로 주어지는 제어기는 proper해서 실현가능해야 한다. 다만 분자의 지연항은 strictly proper하여서(실제로는 상대차수가 2이상) 정정시간에서 불연속이 생기지 않게 한다.

제어 목적

유한정정이 추가된 제어목적은

1) 시스템은 내부안정
2) 제어기는 실현가능 및 시간 T에서 미분가능
3) 오차출력은 유한정정

로 한다. 1)과 같이 하기 위해서는 플랜트의 불안정한 극·영점을 제어기가 상쇄하지 않도록 제어기 설계시 제어기 내부에서 미리 플랜트의 불안정한 극·영점이 상쇄되도록 조건을 만든다. 2)와 같이 하면 제어기는 정정시간에서 연속이 당연히 보장되며, 미분가능하기 때문에 부드러운 형태의 곡선을 나타내서 서보시스템등의 설계시 바람직하다고 생각된다. 참고문헌 [7],[8]에서는 연속조건만 사용하고 있다.

(4)로 표현되는 제어기는 지연소자를 1개 사용하고 있어 시간 T에서 정정이 될 수 있으나 Nobuyama[4]나 Tsumura[5][6]와 같이 Youla의 파라미터화법을 제어기에 적용하는 경우는 최대 지연시간값에 정정이 되게 할 수 있다. 지연소자의 선형합으로 표시하면서 생겨난 파라메타들을 계산하기 위해서 [4]에서는 보간법을 이용하고 [5] 및 [6]에서는 견실성 조건을 추가하는 바람에 H_∞놈 조건으로 Q에 관한 식을 변환하고 이

를 상태방정식으로 표현한 뒤 LMI 문제를 푸는 복잡한 과정을 거치고 있다.

한편 조건 1)을 만족시키기 위해서는 SISO 시스템인 경우는 전달함수

$$\frac{1}{1+K(s)G(s)} \tag{5}$$

가 안정이면 충분조건이 되고, 따라서 $K(s)$와 $G(s)$간 불안정한 극영점 상쇄가 있어서는 안된다. 이를 보장하기 위해서는 (4)에서 제어기는 플랜트의 불안정 극·영점을 미리 내부적으로 상쇄하면 가능한데, 플랜트의 불안정한 영점을 상쇄할 조건은

$$\begin{aligned} &\frac{d^j}{ds^j}(R(s)-F_0(s))|_{s=s_i}=0 \\ &\frac{d^j}{ds^j}F_T(s)|_{s=s_i}=0 \\ &\text{단}, i=1,\ldots,l, j=1,\ldots,\nu_i-1 \end{aligned} \tag{6}$$

이고, 불안정한 극점을 상쇄할 조건은

$$\begin{aligned} &\frac{d^j}{ds^j}F_0(s)|_{s=s_i}=0 \\ &\frac{d^j}{ds^j}F_T(s)|_{s=s_i}=0 \\ &\text{단}, i=1,\ldots,l, j=1,\ldots,\nu_i-1 \end{aligned} \tag{7}$$

이다. (5)식은 또 $E(s)/R(s)$와 같아서 $R(s)$의 불안정한 영점도 $E(s)$가 상쇄해야 한다. (6) 및 (7)을 보면 이 제어기는 불안정 비최소위상계에도 적용될 수 있음을 알 수 있다. 또 조건 2)를 보면 차수조건은 [8]과는 달리

$$\begin{aligned} &\deg_s F_T(s) \ge \deg_s F_0(s) \\ &\deg_s F_T(s) \ge \deg_s F_0(s)+g+2 \\ &\deg_s(R(s)-F_0(s)) \ge g+\deg_s F_0(s) \end{aligned} \tag{8}$$

이다. 여기서 $\deg_s$는 s에 관한 상대차수를 의미하고 $\deg_s G(s) \equiv g, \deg_s R(s) \equiv d$로 하였다. (4)식의 분모, 분자의 각 항들이 proper 또는 strictly proper하여야 할 조건이다. 특히 (8)식의 세 번째 식은 $\deg_s F_0(s)=d$가 되어야 하고, 첫 번째 식은 불필요함을 알 수 있다. 또 (9)식은 오차함수가 무한미분가능할 때 시간영역에서

$$\begin{aligned} &f^{(i)}(0)=r^{(i)}(0), 0\le i\le g+d-2 \\ &f^{(i)}(T)=0, 0\le i\le g+d \end{aligned} \tag{9}$$

로 바꿀 수 있다. [7]과 [8]은 외형상으로는 틀리나 같은 식을 [7]은 (9)과 같은 시간영역을 [8]는 (2)식을 주파수 영역에서 취급했다.

설계절차

1. T 및 오차함수 $f(t)$ 극점의 초기값 선택
2. (9)에서 보간조건으로부터 해 $f(t)$를 구함.
3. 견실성의 지표의 H_∞놈값 계산.
 (1과 3사이를 최적값 얻을 때까지 반복)
4. 제어기를 (4)로부터 구함.

초기조건이 0이 아닌 경우

그림1을 참고로 하면 상태 x, 시스템 행렬이 A, B, C, D인 경우 초기조건 $x(0)=x_0$때문에 생겨난 항은 귀환되어서

$$R(s) \Rightarrow R(s)-C(sI-A)^{-1}x_0 \tag{10}$$

가 되어 R(s)의 불안정한 영점뿐만 아니라 $(sI-A)^{-1}$의 불안정한 영점에 대한 보간조건도 세워야 한다는 점만 틀릴 뿐이다.

III. 시뮬레이션

단위입력($d=1$)에 대한 상대차수가 1인 제어대상은

$$G(s)=\frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \tag{11}$$

로 하고 $T=1$인 경우 제어기의 조건은 [7][8]과는 달리 같은 상대차수의 제어대상에 대해

$$\begin{aligned} &f(0)=r(0), f(1)=f^{(1)}(1)=f^{(2)}(1)=0 \\ &F(0.7)=0, F_T(0.7)=0 \end{aligned} \tag{12}$$

로서 6개의 조건이 만들어 진다. 오차함수로는 [8]에 비해 항수가 더 늘어난

$$f(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} + a_3 e^{\alpha_3 t} + a_4 e^{\alpha_4 t} + a_5 e^{\alpha_5 t} + a_6 e^{\alpha_6 t}, \ \alpha_i < 0, \ i = 1, \ldots, 6 \quad (13)$$

를 사용하거나 [7]에서처럼 (2)를 가지고 보간조건을 만들 수 있다. Matlab Optimization toolbox를 사용하여 해를 구하는데, [7]에서처럼 가중함수 $W(s) = 1/(s+0.001)^2$를 사용한 감도함수의 H_∞ 놈값이 2.4521로 최적해를 구했을 때 a는

$$\{-6.3588, -5.5069, -9.7578, -10.0512, -12.7709, -14.1467\} \quad (14)$$

이다. 그림2는 각 방법에 대한 오차출력이다. 곡선을 보간하는 방법이 차이가 나기 때문에 형태는 틀리나 모두 T=1초에 정정함을 알 수 있다. 제안한 방법은 T=1에서 2계 미분가능하며, 아울러 제어입력도 1계미분가능하다. 그러나 [7],[8]의 방법으로는 T=1초에서 연속만 보장된다. 다만 차수가 1차 더 늘어나는 단점은 있으나, [7],[8]에서와 같이 여유자유도로 견실성 레벨을 달성하기 위할 때는 최적해를 사용하면 차수의 추가증가 없이도 그 레벨을 달성할 가능성이 있다.

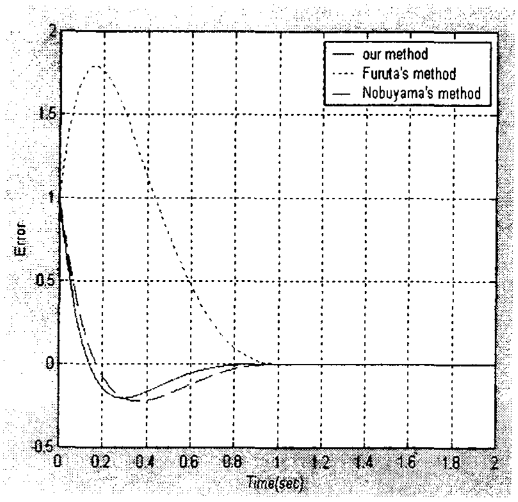

그림 2 오차출력

IV 결 론

1개 지연요소를 갖는 CdbC를 설계한 결과 얻은 결론은 다음과 같다.

- 시스템의 초기치에 관계없이 연속계 시스템의 유한정정을 달성할 수가 있고, 자유도를 도입하면 설계자가 견실성 등과 같은 유한정정외의 조건들도 만족하는 CdbC의 설계가 가능하다.
- 제어입력이 정정시간에서 미분가능한 형태가 되도록 차수를 조정하여 부드러운 곡선형태가 되게 하였다.
- 설계자가 선정하는 오차전달함수의 극과 정정시간에 따라 달성되는 견실성의 척도로 본 감도함수등의 H_∞놈값이 틀려지기 때문에 최적해를 구할 필요가 있다.
- 해 a를 구하는 과정중에 행렬이 singular하게 되기 전까지의 값으로 대략 최적화란 말을 하였는데 좀더 해석적인 방법에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] R. Iserman, Digital Control System, Vol.I, Springer-Verlag, 1989.

[2] O. J. M. Smith, "Posicast Control of Damped Oscillatiory Systems," Proc. of IRE, Vol. 45, pp1249-1255, 1957.

[3] Ryoichi Kurosawa, "Design of Continuous Deadbeat Control," Tr-SICE, Vol.28, No.6, pp680-689, 1992.

[4] E. Nobuyama et. al. " Design of continuous Deadbeat Tracking Systems," Tr-SICE, Vol.28, No.10, pp1201-1208, 1992.

[5] Koji Tsumura et. al. "Multiobjective Continuous Time Deadbeat Control," proc. of ACC, pp3190-3194, 1997.

[6] K. Tsumura, H. Moriata and Y. Sato, " Deadbeat Control of Continuous Time H_∞ Control System," Tr-SICE, Vol.34, No.1, pp13-19, 1998.

[7] E. Nobuyama, " Robust Deadbeat Control of Continuous-Time Systems," Journal-SICE, Vol.38, No.9, pp547-552, 1999.

[8] Satoru Tanaka and Katsuhisa Furuta, " A Design of Continuous Deadbeat Controller, "Tr-SICE, Vol. 35, No.8, pp1078-1084, 1999.