

# Wavelet 변환기저 Scalogram을 이용한 주파수 도약신호 분석

박재오\* 이정재\*\*  
\*,\*\* 동의대학교 정보통신공학과

## Analysis of Frequency Hopping Signals using Wavelet Transform-Based Scalogram

Jae O Park\* Jeong Jae LEE\*\*  
\*Dept. of Information & Communication Eng., Dongeui University  
E-mail : jjlee@hyomin.dongueui.ac.kr

### Abstract

In this paper algorithms of frequency hopping sequences generation such as Lempel-Greenberger, optimum Lempel-Greenberger and Kumar sequences for spread spectrum communications are described. Using the scalogram based on wavelet transform, time-frequency characteristics of frequency hopped signals corresponding to the considered hopping sequences are analyzed.

### I. 서론

최근 보안성과 관련하여 주파수 도약기술은 군용과 상업용으로 광범위하게 이용되고 있다. 주파수 도약 대역확산기술에서 주파수 도약 부호계열은 주어진 시간에 주파수를 특성화시키기 위하여 사용되며 직접확산 방식과는 달리 알파벳크기가 큰 비이원 부호계열로 도약패턴이 이루어진다. CDMA나 다중이용자 레이더 시스템에서 둘 또는 그이상의 송신자가 동일 시간에 동일 주파수로 도약할 때 발생되며 특히 발생된 도약신호의 시간-주파수 특성이 좋지 못하면 다중간섭이 발생하여 시스템의 성능을 저하시킨다.

본 논문에서는 Lempel-Greenberger[1], Kumar [2]에 의하여 제안된 부호계열의 발생알고리즘을 분석하고 발생된 부호계열에 의한 주파수 도약신호의 시간-주파수 특성을 웨이브렛 변환에 기저를 둔 스케일로그래프(scalogram) 분석방법을 이용하여 검토한다. 이를 위하여 제 II절에서는 주파수 도약신호의 시간-주파수 특성분석 방식에 대하여 살펴보고 제 III절에서는 주파수 도약 부호계열의 발생알고리즘을 분석하며 제 IV절에서는

$GF(3^4)$ 에서 부호계열의 발생과 그 특성에 대하여 연구하며 제 V절에서는 발생된 부호계열에 따른 주파수 도약신호의 시간-주파수 특성을 검토하며 제 VI절에서는 결론을 맺는다.

### II. 주파수 도약신호의 시간-주파수 분석 방식

신호  $x(t)$ 는 기본 파형으로 특성은 (1), 주기  $N$ 인  $j$ 번째 부호계열에 의해 발생하는 신호  $x_j(t)$ 는 (2)와 같이 정의된다.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 1 \quad (1)$$

$$x_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N x(t - kT) e^{i\omega_j k t} \quad (2)$$

여기서  $T$ 는 기본 파형  $x(t)$ 의 칩 간격이며  $\omega_{j,k}$ 는  $j$ 번째 완전한 신호의  $k$ 번째 기본 파형의 각주파수이다. 한편 시간-주파수 분석을 위한 대표적인 방법은 스펙트로그램(spectrogram), Winger 분석 그리고 웨이브렛 변환이 있다. 스펙트로그램의 경우 시간 국부화 특성을 개선하기 위하여 짧은 창 함수가 요구되지만 주파수 분해능은 떨어지게 되며 시간-분해능력이 뛰어난 다른 분석방법의

하나인 Wigner 분포는 (3)과 같이 정의된다[3].

$$W(t, \omega) = \int x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (3)$$

스펙트로그램에 비하여 시간-주파수 분해능은 개선되지만 발진현상을 갖는 불필요한 간섭성분을 유발시키는 단점이 있다. STFT의 분해능 제한과 Winger 분포의 간섭성분에 대한 단점을 개선하기 위하여 웨이브렛변환을 이용한 다중분해(multiresolution) 방법이 제안되었으며 신호 x(t)에 대한 웨이브렛변환은 (4)와 같이 정의된다.

$$WT(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(\tau)h^*[(\tau - t)/a] d\tau \quad (4)$$

$$= \sqrt{a} \int X(\omega)H^*(a\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

여기서 h(t)는 분석을 위한 웨이브렛이다. X(ω)와 H(ω)는 각각 x(t)와 h(t)의 푸리에 변환이다. 웨이브렛변환을 이용한 분석방식은 주파수에 비례하여 대역폭을 갖는 대역통과 필터로 구성되는 하나의 필터뱅크의 원리로 해석할 수 있으며

$$\frac{1}{a^2} \iint |WT(t, a)|^2 dt da = E_x \quad (5)$$

여기서 E<sub>x</sub>는 신호 x(t)의 에너지를 의미하며 위 (5)를 만족하는 |WT(t, a)|<sup>2</sup>을 스케일로그래프로 정의한다.

### III. 주파수 도약 부호계열 발생알고리즘

주파수 도약을 위한 다양한 부호계열이 있지만 대표적으로 Lempel-Greenberger 알고리즘, 최적 Lempel-Greenberger 알고리즘, Kumar 알고리즘 3종류에 대하여 검토 한다.

#### 1. Lempel-Greenberger 알고리즘

GF(p)상의 차수 n인 원시다항식 h(x)에서 발생된 주기 N=p<sup>n</sup>-1인 M-계열

$$\{b_n\} \text{ 와 } \{c_{j,i}\} = (b_j, b_{j+1}, \dots, b_{k+j-1}),$$

로부터 (6)과 같은 부호계열

$$\{a_j\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} p^i \right\} \quad (6)$$

0 ≤ j < N, 0 ≤ i < k, 1 ≤ k ≤ n가 발생된다.

#### 2. 최적 Lempel-Greenberger 알고리즘

Lempel-Greenberger 최적부호계열은 다음 순서에 의하여 생성될 수 있다. 첫째 n보다 적은 정

수 k를 선택하고 N개의 k 연결 {c<sub>n,i</sub>}군을 형성한다. 둘째 각 정수 r ∈ {0, 1, 2, ..., p<sup>k</sup>-1}에 다음 (7)과 같이 대응되는 k연집

$$\{v_j^{(r)}\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} p^i \right\} \quad (7)$$

로부터 {v<sub>i</sub><sup>(r)</sup>}을 만든다. 이로부터

$$\{d_{n,i}^{(r)}\} = (c_{n,0} + v_0^{(r)}, c_{n,1} + v_1^{(r)}, \dots, c_{n,k-1} + v_{k-1}^{(r)}) \quad (8)$$

여기서 0 ≤ n ≤ p<sup>m</sup>-1, 0 ≤ r < p<sup>m</sup>, 셋째 각 정수 r ∈ {0, 1, 2, ..., p<sup>k</sup>-1}에 대하여 N 개의 k 연결집을 정수집합 {0, 1, 2, ..., p<sup>k</sup>-1}로 사상시킨다. (8)으로 부터 (9)와 같은 부호계열을 형성할 수 있다.

$$a_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{k-1} d_{n,i}^{(r)} p^i \quad (9)$$

최적 Lempel-Greenberger 계열은 부호계열군 M = p<sup>k</sup>, 주기 N = p<sup>m</sup>을 갖는다.

### 3. Kumar 알고리즘

J<sub>p</sub><sup>m</sup>은 어느 정수 p에 대하여 MOD p가되는 모든 m 연결의 집합을 나타 낸다고 정의하고 p가 소수이고 n이 짝수이면 정수 m=n/2이며 주기 N=p<sup>n</sup>-1이 된다. f<sub>0</sub>(.)를 J<sub>p</sub><sup>m</sup>에서 일반화한 Bent 함수라 하면 f<sub>v</sub>(.)는 V ∈ J<sub>p</sub><sup>m</sup>에서 다음 (10)와 같이 표현된다[2,4,5].

$$f_v(x) = f_0(x) + V^T x, \forall x \in J_p^m \quad (10)$$

여기서 f<sub>0</sub>(x) = x<sub>1</sub>x<sub>2</sub> + x<sub>2</sub><sup>p-1</sup>, ∀ x ∈ J<sub>p</sub><sup>m</sup>다. 그리고

{γ<sub>1</sub>, γ<sub>2</sub>, ..., γ<sub>m</sub>}을 GF(p)에서 GF(p<sup>m</sup>)에 대한 기저, σ ∈ GF(p<sup>n</sup>) \ GF(p<sup>m</sup>)라 하면 p<sup>m</sup>군의 Kumar 부호계열이 다음 (11)과 같이 정의된다.

$$S_v(k) = f_v \{ Tr_{n/1}(a^k \gamma_i), i=1, 2, \dots, m \} + Tr_{n/1}(a^k \sigma) \quad (11)$$

여기서 0 ≤ k ≤ N-1이며 p<sup>m+1</sup> 부호계열군

$$C = \{ C_k^{v,b} = S_v(k) + b, S_v(k) \in G, b \in J_p^1 \} \quad (12)$$

가 발생되며 여기서 G = {S<sub>v</sub>(k) | V ∈ J<sub>p</sub><sup>m</sup>}이다.

### IV. 주파수도약 부호계열의 발생과 특성 분석

부호계열의 발생 예로 p=3, n=4, m=n/2=2, 그리

고 GF(3) 상의 원시다항식은  $h(x) = x^4 + x + 2$  로 설정하면 M-계열발생기는 Fig.1과 같다.

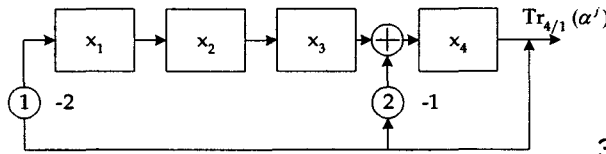


Fig. 1 M-code sequence of  $GF(3^4)$  in GF(3)

이로부터 발생된 M-부호계열

$\{b_n\} = \{0001212201 \ 1122220202$   
 $1120102100 \ 2212022002$   
 $0002121102 \ 2211110101$   
 $2210201200 \ 1121011001\}$

주기  $N = 3^4 - 1 = 80$  이 된다.

### 1. Lempel-Greenberger 부호계열 발생

Lempel-Greenberger 부호계열은  $k=2$ 로 설정하면  $\{c_{j,i}\} = (b_j, b_{j+1})$ 와 (6)으로 부터

$$\{a_j\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} 3^i \right\} \text{ 이므로}$$

$\{a_j\} = \{0037578234 \ 4788826265$   
 $4723165106 \ 8572682062$   
 $0065754168 \ 8544413137$   
 $8516237203 \ 4751341031\}$

를 발생시킬 수 있다.

### 2. 최적 Lempel-Greenberger 부호계열 발생

예로서  $k=2$ , (7)로부터

$$\{v_j^{(n)}\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} 3^i \right\} = c_{j,0} 3^0 + c_{j,1} 3^1$$

$$r = q_1 p + v_0^{(n)} = 3q_1 + v_0^{(n)}, \quad q_1 = q_2 3 + v_0^{(n)},$$

$v_n^{(n)} < 3$ . 한편 (8)으로부터

$$\{d_{n,i}^{(n)}\} = (c_{n,0} + v_0^{(n)}, c_{n,1} + v_1^{(n)}, \dots, c_{n,k-1} + v_{k-1}^{(n)})$$

여기서  $0 \leq n \leq p^m - 1 = 3^4 - 1 = 80$ ,  $0 \leq r < p^m = 3^4 = 81$ 의 값을 갖는다. 그리고 각 정수  $r \in \{0, 1, 2, \dots, 3^4 - 1 = 81\}$ 에 대하여 N 개의 k 연 집합을 정수집합  $\{0, 1, 2, \dots, 3^2 - 1 = 8\}$ 로 사상시킨다. (9)로 부터  $a_n^{(n)} = \sum_{i=0}^{k-1} d_{n,i}^{(n)} 3^i$  발생된 부호계열은 부호계열군  $M = p^k = 9$ , 주기  $N =$

$p^m - 1 = 80$ 을 갖는다.  $r=1$ 일 때 발생된 부호계열은 다음과 같다.

$\{a_n^{(1)}\} = \{1148386045 \ 5866607073$   
 $5804273217 \ 6380760170$   
 $1173835276 \ 6355524248$   
 $6327048014 \ 5832452142\}$

### 3. Kumar 부호계열 발생

GF(3)에서  $GF(3^2)$ 의 기저  $\gamma_1, \gamma_2$ 를  $GF(3^4)$ 의 원시원  $\alpha$ 로 표현하고 Q를  $GF(3^2)$ 에서  $\alpha$ 로 표현되는 가장 적은 거듭제곱의 크기라면  $Q = (p^4 - 1)/(p^2 - 1) = 10$ 이 된다. 따라서

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{\alpha^{10i}, i=0, 1\} = \{1, \alpha^{10}\}, \sigma = GF(3^4) \setminus GF(3^2)$$

이므로  $\alpha$ 를  $\sigma$ 로 정한다. (11), (12)에서

$$s_v(k) = Tr_{4/1}(\alpha^k) Tr_{4/1}(\alpha^{k+10}) + \{Tr_{4/1}(\alpha^{k+10})\}^4 + V_1 Tr_{4/1}(\alpha^k) + V_2 Tr_{4/1}(\alpha^{k+10}) + Tr_{4/1}(\alpha^{k+1})$$

$$C = \{c_k^{v,b} = s_v(k) + b | s_v(k) \in G, b \in J_3\},$$

$V^T = [00]$ ,  $b=0$ 일 때 발생된 부호계열은 다음과 같다.

$\{1001100011 \ 1122011201$   
 $0211121012 \ 0101212212$   
 $2002202022 \ 0021002112$   
 $2010202112 \ 0201122020\}$

### V. 주파수 도약신호의 시간-주파수 특성 분석

시간-주파수 특성분석을 위하여 Rice 대학교에서 제시한 Matlab Toolbox를 사용하여 분석하였다[6]. 주파수 샘플수는 512로 택하고 최저주파수 0.01Hz, 최대주파수 0.5Hz로 정규화 하였다. Fig.2는 시간-주파수 영역에서 Lempel-Greenberger 부호계열을 이용한 도약신호의 에너지의 크기를 Contour로 표현한 것이며 Fig.3은 Mesh의 형태로 표현해본 것이다. 알파벳 크기가 9이므로 9개의 주파수대역이 나타남을 알 수 있다. 그림 4는 최적 Lempel-Greenberger 부호계열에 대한 시간-주파수영역에서의 에너지크기를 Contour로 표현한 것이다. 이 부호계열 역시 알파벳 크기가 9이므로 주파수 도약 대역은 9종류가 발생됨을 알 수 있다. Fig.5는 Kumar 부호계열에 대한 시간-주파수 특성을 Contour형태로 표현한 것이다. Lempel-Greenberger 부호계열에 비하여 알파벳 사이즈가 3으로 적기 때문에 주파수 대역의 범위가 좁은 반면 시간

영역에서는 동일한 알파벳의 반복으로 넓은 에너지 분포를 갖고 신호에너지가 0.15Hz이내에 집중되어 있으나 시간영역에서는 넓게 퍼져 있다.

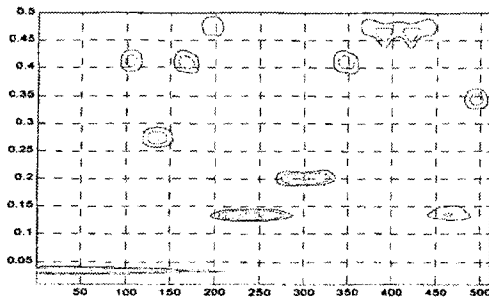


Fig.2. Contour graph (Lempel-Greenberger code sequence)

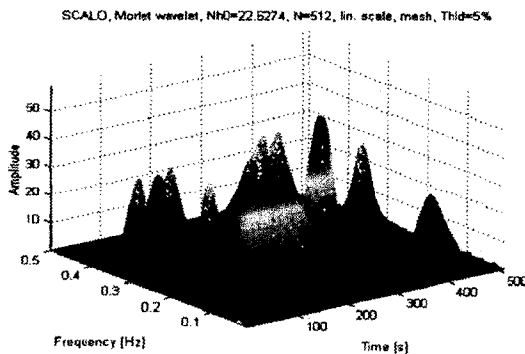


Fig 3. Mesh graph (Lempel-Greenberger code sequence)

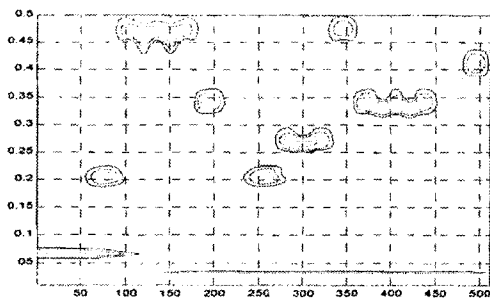


Fig. 4. Contour graph (Optimal Lempel-Greenberger code sequence)

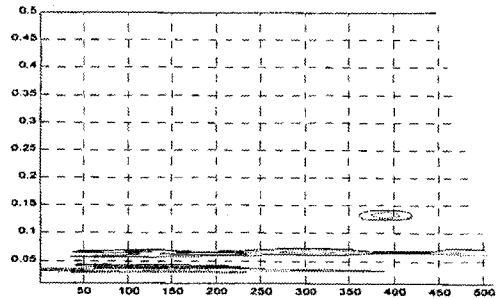


Fig.5. Contour graph(Kumar code sequence)

## VI. 결론

주파수 도약 대역확산 통신을 위한 Lempel-Greenberger, 최적 Lempel-Greenberger 그리고 Kumar 주파수 도약부호계열에 대한 발생알고리즘을 분석하고 부호계열을 발생하였다. 각각의 부호계열에 의하여 발생된 도약신호의 시간-주파수 특성을 웨이블릿변환을 기초로한 스케일로그래프 기법을 이용하여 분석 검토하였다. 도약 패턴의 알파벳 크기가 커지면 시간영역에서의 시간-주파수 특성은 개선되지만 넓은 주파수대역을 포함하는 단점이 있음을 알 수 있었다. 향후 잔여 간섭성분이 제거된 스케일로그래프에 의한 분석 기술은 그 응용범위가 더욱 확대 연구 될것으로 기대된다.

## 참고문헌

- [1] A.Lempel and H. Greenberger, "Families of sequences with optimal hamming c[2] P.V. Kumar,"Frequency hopping code sequence designs having large linear span," GLOCOM 84, Vol.2, pp.989-993, 1984.
- [2] P.V. Kumar,"Frequency hopping code sequence designs having large linear span," GLOCOM 84, Vol.2, pp.989-993, 1984.
- [3] M.Akay,Time frequency and wavelets in biomedical signal processing, IEEE Press, New York, 1998.
- [4] O. S. Rothaus, "On 'bent' functions," J. Comb. Theory Series A20, pp.300-305, 1976
- [5] M.K.Simon and J.K. Omura, Spread Spectrum Communications, Vol. I, Computer Science Press, Maryland, 1984
- [6] F.Auger etc.,Time-Frequency T... Rice-University, 1996.