

## 유용방향법에 의한 고유진동수 최적화 Frequency Optimization Using by Feasible Direction Method

조희근\* 박영원\*\*

Cho Hee-Keun Park Young-Won

\* 아주대학교 대학원 시스템공학부

\*\* 아주대학교 시스템공학부

### ABSTRACT

In this paper feasible direction method which is one of the optimization method is adopted to natural frequency optimization. In order to find the optimum design of structures that have characteristic natural frequency range, a numerical optimization method to solving eigenvalue problems is a widely used approach. However most cases, it is difficult to decide the accurate thickness and shape of structures that have allowable natural frequency in design constraints. Parallel analysis algorithm involving the feasible direction optimization method and Rayleigh-Ritz eigenvalue solving method is developed.

The method is implemented by using finite element method. It calculated the optimal thickness and the thickness ratio of each element of 2-D plane element through the parallel algorithm method which satisfy the design constraint of natural frequency.

### 1. 서론

구조물은 정역학적 하중을 지지할 수 있게 설계 되어야 하며 또한 동역학적 측면에서는 구조물 설계에 적절한 진동특성을 가지고 있어야 한다. 설계에 있어서 고유치(Eigenvalue)의 해석은

필연적이며 이를 고려한 설계가 이루어지게 된다. 먼저 구조물을 설계 할 때 공진을 피하기 위하여 특정한 주파수 영역의 진동수를 피하여 설계해야 되는 경우가 많다. 이러한 경우 구조물의 원하는 주파수 대의 고유진동수를 가지는 구조물을 설계하기 위해서는 구조물 각 부분의 두께 비(Thickness Ratio)나 치수를 결정하여야 한다.

본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 최적화 개념을 도입하였다. 유한요소법(Finite Element Method)을 사용하여 Rayleigh-Ritz Method<sup>(8)</sup>(Subspace Iteration Method)에 의해 구조물의 고유치를 구한 다음 이와 평행하게 반복 계산되어지는 유용방향법<sup>(6,11)</sup>(Feasible Direction Method) 최적화 알고리즘에 의해 우리가 원하는 주파수대의 고유치를 가진 구조물 전체의 최적 두께 비 혹은 치수를 얻을 수 있었다.

### 2. Rayleigh-Ritz 방법

여기서는 Subspace Iteration Method(Rayleigh Ritz)로 고유치를 구하는 방법을 소개한다. 구조물의 동적평형방정식 으로부터 해당 구조물이 갖는 고유성질인 고유진동과 고유벡터라는 구조물의 진동패턴을 분석하기 위해서는 고유치 문제와 직면하게 된다. 동적평형 방정식에서 감쇄가 없고( $[C]=0$ ), 외력이 작용하지 않는 경우

((R(t))=0)에는 자유진동은 식(1)과 같다.

$$[M]\{\dot{U}\} = [K]\{U\} = 0 \quad (1)$$

이식의 일반해를  $\{\ddot{u}\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$  라고 하면 표준적인 고유치 형태의 식(2)로 된다.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{u\} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\omega^2 = \lambda$  로 두면  $\lambda$  에 대한 n 차 다항식의 Eigenvalue 평형식으로 나타나게 된다.

$$([K] - \lambda_i[M])\{\phi_i\} = 0 \quad (3)$$

일반적으로 대형구조시스템을 유한요소법으로 해석하고자 할 경우에는 많은 절점과 그와 관련한 많은 자유도를 갖게 된다. 그러나 구조물의 거동에 대해 일반적으로 저차 모드 몇 개의 기여만이 크고 고차모드의 기여는 상대적으로 무시될 수 있을 정도로 작으므로<sup>(8)</sup> 이러한 특성을 활용하여 구조물을 해석하는 것이 효율적이다. 이러한 목적으로 주요한 몇 개의 저차모드만을 구하여 전체 구조의 거동을 근사적으로 구할 수 있는 방법이 Subspace Iteration Method<sup>(8)</sup> 이며 기본수식은 다음과 같다.

고유벡터의 근사치  $\{X_i\}$ 를 Ritz 시험벡터  $\bar{X}$ 의 선형조합으로 나타내면 식(4)와 같다.

$$\{X_i\} = a_1\{\bar{X}_1\} + a_2\{\bar{X}_2\} + \dots + a_n\{\bar{X}_n\} \\ = [\bar{X}]\{a\} \quad (4)$$

이를 모드행렬로 나타내면

$$[X] = [\bar{X}][A] \quad (5)$$

$[X]$ 를 식(3)의  $\{\phi_i\}$  대신에 대입하고 양변에  $\bar{X}^T$ 를 곱하여 강성메트릭스와 질량메트릭스를 변환하여 식 (6-1), (6-2)와 같이 두면 식 (6-3)의 형태로 나타난다.

$$\bar{K} = \bar{X}K\bar{X}^T \quad (6-1)$$

$$\bar{M} = \bar{X}M\bar{X}^T \quad (6-2)$$

$$[\bar{X}]^T([K] - \lambda[M])[\bar{X}][A] \\ = ([\bar{K}] - \lambda[\bar{M}])[A] = 0 \quad (6-3)$$

식(6-3)이 유용해를 가지기 위한 조건  $[\bar{K}] - \lambda[\bar{M}] = 0$  도입하면

$$[\bar{K}] - \lambda[\bar{M}] = \{[\bar{X}]^T\{[K] - \lambda[M]\}\bar{X}\} \\ = |\bar{X}^T\bar{X}| \{[K] - \lambda[M]\} = 0 \quad (7)$$

즉  $[K] - \lambda[M] = 0$ 로 되어 본래의 식에서 구한 고유치와 Sub-space 상에서 구한것과 같게 되므로 구조물의 자유도를 축소하여 해를 구하면 계산상의 효율을 기하면서 본래의 식에서와 같은 고유치를 구할 수 있음을 알 수 있다. 유한요소 평형식에 의한 각 단계별 계산 절차는 다음과 같다.

### 3. 유용방향법 알고리즘(Feasible Direction Method Algorithm)

유용방향법<sup>(6,11)</sup>(The Method of Feasible Direction)은 제약 최적화 문제를 푸는 가장 먼저 개발된 기본법의 한가지이다. 이방법의 기본원리는 한 유용설계에서 보다 개선된 유용설계로 이동시키는 것이다. 따라서 유용설계  $X^{(k)}$ 가 주어지면 개선하는 유용방향  $S^{(k)}$ 를 결정하여 충분히 작은 이동거리  $\alpha > 0$ 에 관하여 다음의 두 성질을 만족하도록 한다

- i) 새로운  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha S^{(k)}$ 는 유용이고,
- ii) 새로운 목적함수는 지난번 것보다 작다, 즉  $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$

유용방향  $S$ 는 조건  $\nabla F^T S < 0$ 와  $g^{(i)T} S < 0$ 을 만족한다. 이것은  $\nabla F^T S < 0$ 와  $g^{(i)T} S < 0$ 최대화시키는 최소화를 통하여 구한다. 이것을

$\beta$  로 최대화를 나타내면 다음과 같이 방향 탐색 부문제가 정의된다.

Minimize  $\beta$   
Subject to :

$$\begin{aligned} \nabla F(X)^T S &\leq \beta \\ \nabla g_j(X)^T S &\leq \beta \quad (8) \\ -1 &\leq S_j \leq 1 \quad j=1, n \end{aligned}$$

식(8)의 마지막 부등식의 정규화제약은 유계해를 얻기 위하여 도입하였다. 다른 정규화제약의 형식도 가능하다.  $(\beta, S)$ 를 앞 문제의 최적해라고 하자. 만약  $\beta < 0$  이면  $S$ 는 개선되는 유용방향이다. 만약  $\beta = 0$  이면 현 설계점이 쿤-터커<sup>(6)</sup> 필요조건을 만족한다.

변형된 유용방향법 알고리즘은 다음과 같다. 제약조건이 있는 최적화 문제를 풀려고 하면 먼저 목적함수  $F(X)$  제약조건  $g_j(X) \leq 0, j=1, M$  그리고 설계변수의 상한과 하한을 정의한다.

Minimize  $F(x)$   
Subject to :

$$\begin{aligned} g_j(X) &\leq 0 \quad j=1, M \quad (9) \\ X_i^L &\leq X_i \leq X_i^U \quad i=1, N \quad (10) \end{aligned}$$

최적알고리즘은 어떤 문제를 풀고있는지 모르며 단지 주어진 제약조건하에서 목적함수를 최소화 할 뿐이다. 초기의  $X^0$  벡터가 주어지면 식(9)에 따라서 설계를 계속 변경해 나간다. 아래와 같은 방법이 반복적으로 이루어진다.

$$X^q = X^{q-1} + \alpha * S^q \quad (11)$$

전반적인 최적화 프로세스는 다음의 단계에 따른다.

1. Start  $q = 0, X = X^0$
2.  $q = q + 1$
3.  $F(X^{q-1}), g_j(X^{q-1})$  을 계산
4. 결정적인 제약벡터를 확인
5.  $\nabla F(X^{q-1}), \nabla g_j(X^{q-1})$  을 계산
6. 탐색 방향  $S^q$  를 결정
7.  $\alpha$  를 결정하기 위한 1차원 탐색

8.  $X^q = X^{q-1} + \alpha * S^q$  계산
9. 수렴성 확인(수렴(x) 2번 복귀)
10. 계산 완결

#### 4. Frequency 최적화

구속조건으로 주어진 고유치에 대한 구조물의 최적화 수치해석<sup>(1,2,3)</sup>은 크게 두 가지로 나누어진다. 첫째는 최적화 알고리즘의 수치해석이며 둘째는 고유치 해석인 Subspace Iteration<sup>(8,12)</sup> 알고리즘 해석이다. 최적화 알고리즘인 유용방향법(Feasible Direct Method)은 목적함수를 최적화하기 위한 경사도를 계산하기 위하여 두께, 치수, 형상 그리고 밀도등에 의존적인 고유치 구속조건 함수  $f(t_1, t_2, t_3, \dots, l_1, l_2, \dots, \rho_1, \rho_2, \dots)$ 를 Subspace Iteration Method로 넘겨주게 된다. Subspace Iteration Method는 고유치를 반복계산<sup>(4)</sup>하면서 식(12)의 고유치 수렴조건을 만족하면 그 값을 반환하게 된다.

$$\frac{\lambda_{k+1}^i - \lambda_k^i}{\lambda_{k+1}^i} \leq \delta \quad (12)$$

최적화 알고리즘에서 반환되어온 고유치를 다시 제약조건 식으로 검토한다. 반환된 고유치를 가지고 최적화 알고리즘은 새로운 경사도 벡터를 계산하고 유용방향과 크기를 결정한다. 이러한 반복과정을 통하여 결국 목적함수의 최소점에 이르게 된다.

알고리즘<sup>(6,7)</sup>의 구속조건 제약식은 미지의 함수이며 대부분의 구조물인 경우 예측하기가 곤란하므로 고유치 함수  $f(t_i, l_i, \rho_i, i=1, N)$ 를 하부의 함수로 넘겨주게 되는 것이다. Fig. 1는 고유치에 의한 최적화 알고리즘의 계산순서를 나타낸다.

형상이 일정한 구조물이라면 고유치는 구조물 각 부분의 두께 비에 의해서 결정이 된다. 따라서 최적화 알고리즘은 구속조건으로 주어진 각 구조물의 두께 범위 내에서 가장 작은 두께 비를 계산하게되는 것이다. 즉 예를 들면 2 : 4 : 6의 두께비를 계산하는 것이 아니라 1 : 2 : 3의 두께비를 계산한다. 이것이 무게를 최소화하는 목적에 합당하기 때문이다. 본 연구에서 도입한 유용방향법<sup>(10)</sup>(Feasible Direction Method) 최적화

알고리즘은 주어진 구속조건 내에서만 해를 찾기 때문에 이러한 경우는 발생하지 않는다.

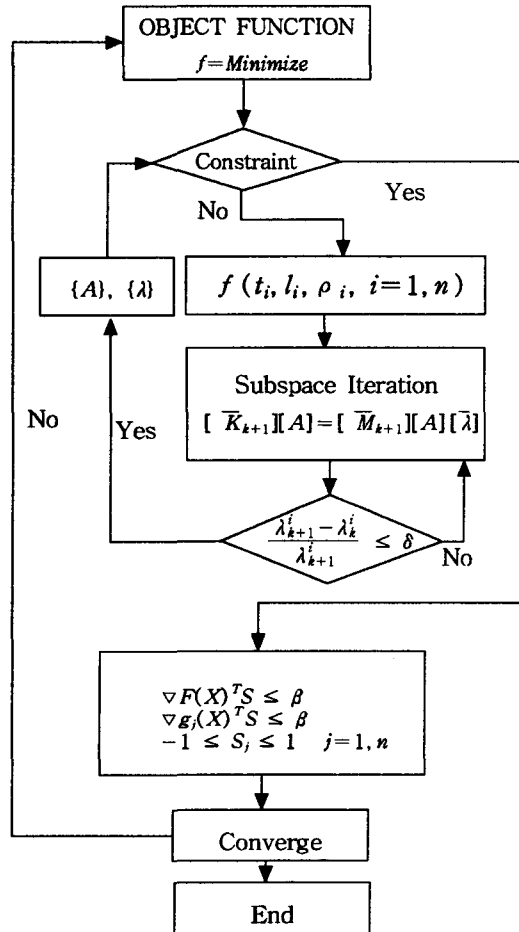


Fig. 1 Optimization Algorithm for Eigenvalue

## 5. 고유치에 의한 최적화 안전성 검토

### 5.1 Subspace Iteration Method<sup>(8,9)</sup> 검토

Fig. 2는 본 논문에서 언급한 Subspace Iteration Method에 대한 신뢰성을 가지기 위하여 상용패키지 NISA II와 평판의 고유치 계산 결과 값을 비교하기 위한 이차원 모델이다. 경계조건은 좌측 부분을 고정된 상태에서 평판의 자유진동 고유치를 구하는 것이다.

Fig. 2의 모델은 각 요소의 두께가 1mm로 일정할 때 Subspace Iteration Method와 상용패

키지 NISA II의 결과 값을 서로 비교하였다. 그 결과 값을 Table 1에 나타내었다. 평판의 고유치 계산 값의 비교로 Subspace Iteration Method의 신뢰성을 입증한다. 고차모드로 갈수록 Subspace Iteration Method와 NISA II의 계산 값이 차이가 있으나 허용 가능한 오차의 범위에 있다.

Table 1 The Results of Subspace & NISA II

	Subspace Iteration Method	NISA II
Mode	(Rad/Sec)	(Rad/Sec)
1	1.7347193E+04	1.729794E+04
2	4.0999633E+04	4.096531E+04
3	4.6988207E+04	4.680637E+04
4	7.5142701E+04	7.377030E+04
5	8.1898867E+04	8.110871E+04

위 Table 1의 결과에서 알 수 있는 것과 같이 Subspace Iteration Method가 NISA II의 잘 일치한다.

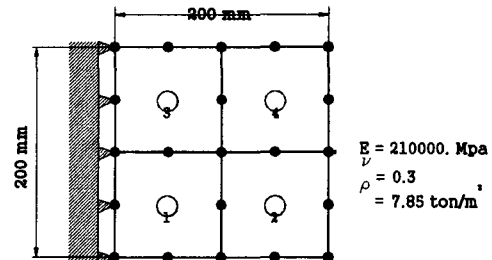


Fig. 2 Eigenvalue Analysis Model

### 5.2 Frequency 최적화 검토

Fig. 3의 모델을 Eigenvalue 구속조건이 주어지는 상태에서 각 요소의 최적 두께를 구한다. 각 요소는 두께 구속조건과 물성치가 각각 다르며 형상 또한 서로 다르다. Fig. 3의 모델에서 Eigenvalue 구속조건이  $13000 \leq \omega_1 \leq 14000$  (Rad/Sec)로 주어질 때 물성치가와 형상이 서로 다른 요소의 각각의 두께를 구하였다. Fig. 3의 각 요소의 물성치는 Table 2와 같다.

반복적으로 계산하는 유용방향법(Feasible Direction Method) 최적화 알고리즘에 의하여 각

요소의 최적 두께비를 찾는다. 목적함수는 때에 따라서 설계 목적에 의해 무게가 아닌 다른 임의의 함수가 될 수 있다. 각 요소 내에서는 두께가 일정하며 평판응력(Plane Stress) 상태하에서의 강성행렬을 구하였다.

Table 2 Element Property

Element	Property	
	1	E(MPa)
$\nu$		0.3
$\rho$ (Ton/m <sup>3</sup> )		7.85
2	E(MPa)	190000
	$\nu$	0.3
	$\rho$ (Ton/m <sup>3</sup> )	6.71
3	E(MPa)	150000.
	$\nu$	0.3
	$\rho$ (Ton/m <sup>3</sup> )	5.55
4	E(MPa)	120000.
	$\nu$	0.3
	$\rho$ (Ton/m <sup>3</sup> )	3.23

Fig. 3의 모델을 최적화하기 위한 정식화는 다음과 같다.  $t_1 \sim t_4$  는 각 요소의 두께이다.

Minimize

$$f = \rho_1 A_1 t_1 + \rho_2 A_2 t_2 + \rho_3 A_3 t_3 + \rho_4 A_4 t_4$$

Subject to :

$$2 \leq t_1 \leq 7$$

$$1 \leq t_2 \leq 6$$

$$2 \leq t_3 \leq 7$$

$$1 \leq t_4 \leq 8$$

$$13000 \leq \omega_1 \leq 14000$$

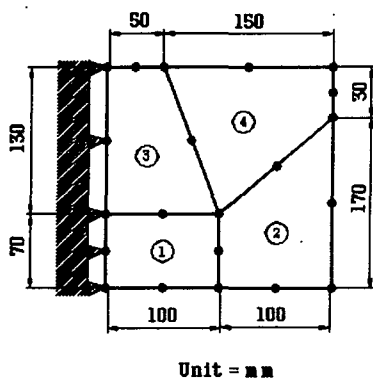


Fig. 3 Optimization Model for Eigenvalue

위의 최적화 정식화에 대한 결과치를 Table 3에 정리하였다. 각 요소의 두께 구속조건, 밀도, 형상이 서로 다른 요소에 대해서도 최적화 계산에 어려움이 없으며 이때 목적함수의 값은  $6.012e-6$  N 이다.

Table 3 Optimum Value of Each Element Thickness & Object Function

Thickness (mm)	$f$ (N)
$t_1 = 2.0000$	6.012e-6
$t_2 = 3.9874$	
$t_3 = 2.0013$	
$t_4 = 1.0010$	

Table 4 Eigenvalue of Plate after Optimization

Mode	Subspace Iteration Method	NISA II
	(Rad/Sec)	(Rad/Sec)
1	1.4001176E+04	1.385651E+04
2	3.3463291E+04	3.324439E+04
3	4.3659836E+04	4.300243E+04
4	8.1548955E+04	7.676728E+0
5	9.2990053E+04	8.685868E+04
6	1.0543652E+05	1.036680E+05

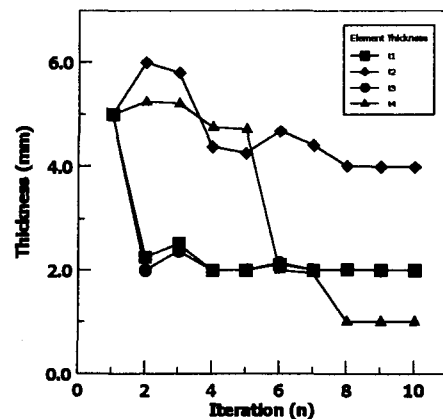


Fig. 4 Thickness Variation of Each Element in Optimization Calculation

Table 3의 두께로 최적화되었을 때의 구조물의

고유치는 Table 4과 같으며 이때 같은 두께와 물성치를 가지고 NISA II에서 계산된 고유치와 비교하였다.

Fig. 4는 Eigenvalue에 의한 최적화 반복 계산 중 각 요소의 두께 변화를 나타낸다. 초기 두께를 5mm로 하여 계산을 시작하였다. 9번 반복 계산하여 수렴했으며 10번째 계산 루틴에서 계산을 끝마쳤다.

## 6. 결론

본 연구에서는 최적화 알고리즘의 하나인 유용방향법을 사용하여 고유진동수의 최적화를 수행하였다. 최적화 알고리즘과 고유치(Eigenvalue)해석 유한요소알고리즘을 동시에 병행하게 실행하여 복잡한 모델의 고유진동수에 의한 최적화가 가능하였다. 고유치는 구조물의 절대적인 두께에 의해 정해지는 것이 아니라 각 부분의 두께 비 혹은 질량 비 등에 의해서 결정되는 것이기 때문에 이 최적화의 결과는 구조물의 최적의 두께비가 되는 것이다.

고유치 구속조건에 대한 구조물의 최적설계에 있어서 구속조건으로 주어지는 구조물의 고유치는 1차원 빔 혹은 단순한 모델인 경우를 제외하고는 대부분 일반화된 수식으로 나타나지 않는다. 따라서 이러한 일반화된 수식으로 나타나지 않는 미지의 구속조건 함수를 유용방향법을 이용한 수치계산에 의하여 해결함으로써 복잡한 모델에 대한 최적화가 가능하였다. 또한 유용방향법을 적용한 최적화 수치해석 방법을 조각시험(Patch Test)으로 타당성을 입증하였다.

## 참고문헌

- 1) M. E. M. El-Sayed, C.-K. Hsiung, "Optimum structural design with parallel finite element analysis", Computer and Structure, Vol. 40, No. 6, pp.1469-1474, 1988
- 2) F. Moses, "Optimum structural design using linear programming", ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 90, No. ST6, pp 89-104, 1964
- 3) J. T. Betts, "A gradient projection-multiplier method for nonlinear programming", Journal of

Optimization Theory and Applications, Vol. 24, No. 4, pp.523-548, 1978

4) J. S. Sobieski, "Sensitivity of complex, internally coupled system", AIAA Journal, Vol. 28, No. 1, pp.153-160, 1990

5) T. S. Jang, "Application of nonlinear goal programming to structural optimization", 자동차 공학회, V. 14, n. 1, pp.64-73, 1992

6) Jasbir S. Arora, "Optimum design", Mc-Grow Hill, pp. 3-625, 1994

7) K. Mcaloon, "Optimization and computational logic", Wiley Interscience, pp.97-331, 1996

8) K. J. Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, pp.66-431, 1981

9) K. H. Huebner, "The finite element method for engineers", Wiley Interscience, pp.62-304, 1982

10) J. L. Kuester, "Optimization techniques with fortran", Mc-Grow Hill, pp.135-286, 1973

11) S. S. Rao, "Engineering optimization", Wiley Interscience, pp.65-556, 1996

12) K.J. Bathe, E.L. Wilson, "Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics", A.S.C.E., Internal Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pp. 213-226, 1973

13) K.J. Bathe, E.L. Wilson, "Eigensolution of large structural systems with small bandwidth", A.S.C.E., Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 99, pp. 467-479, 1973