

# 무요소법을 이용한 다수균열 함유부재의 동적균열전파해석에 관한 연구

## Analysis of Dynamic Multiple-Crack Propagation Problem by Element free-Galerkin Method

이 상 호\*                      김 효 진\*\*  
Lee, Sang-Ho                  Kim, Hyo-Jin

### ABSTRACT

In this study, an algorithm analyzing dynamic multiple-crack propagation problem by Meshfree Method is proposed. A short description of Meshfree Method especially, Element-free Galerkin (EFG) method is presented and the elastodynamic fracture theory is summarized. A numerical implementation algorithm for dynamic analysis by Meshfree Method is discussed and an algorithm for multiple-crack dynamic propagation is also presented.

A couple of numerical examples of dynamic crack propagation problem illustrate the performance of the proposed technique. The accuracy of the algorithm is studied in the first example by being compared with experimental results, and the applicability and efficiency of the developed algorithm is studied in the second example.

### 1. 서 론

균열의 거동을 예측하고 그로 인한 물리적 영향을 파악하고자 하는 연구는 초기에는 수학적, 이론적 접근방법에 의존하여 이루어졌으나, 유한요소법 등과 같은 강력한 수치해석기법이 등장한 이후부터는 복잡한 해를 보다 손쉽게 구하기 위해서 유한요소법이나 경계요소법과 같은 수치해석 기법이 주로 이용되어 오고 있다. 그러나, 기존의 유한요소법이나 경계요소법과 같이 요소개념을 사용하는 수치해석방법은 균열이 진전하는 경우 바뀌는 균열형상에 따라 매 단계별로 요소망을 재구성해야 하는 어려움이 있다. 더욱이 동적균열전파문제와 같이 시간별 해석을 수행하는 경우에 있어 매 단계별로 요소망을 재구성하여 균열의 진전경로를 예측하려면 엄청난 시간과 노력이 요구되며 해의 정확성을 보장하기가 어려운 경우가 있다.

실제로, 기존의 유한요소법이나 경계요소법 등과 같은 수치해석법을 이용하여 균열전파문제를 해석해보려는 시도가 진행되어 오고 있다. Nishioka와 Atluri<sup>1)</sup>는 moving singular element와 요소의 경계를 따라 균열이 전파되도록 하는 nodal release 기법을 개발하였으며, Swenson과 Ingraffea<sup>2)</sup>는 삼각형 요소를 사용하여 균열선단 주변만을 국부적으로 요소재분할 할 수 있는 기법을 제안하였다. 그 뒤 Du 등<sup>3)</sup>은 균열선단을 점성영역으로 모형화하여 콘크리트에서의 동적균열진전문제를 해석하려 하였다. 그러나 이러한 방법들은 매우 세밀한 요소망을 필요로 하며, 복잡한 균열형상을 지닌 경우 해석상의 어려움을 야기시키며, 부분적인 균열전파과정만을 예측할 수 있었다. 아울러 다수의 균열을 함유하고 있는 경우의 해석에 있어서는 그 균열전파과정을 정확하게 예측한다는 것이 매우 힘든 작업이었다.

\* 정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수

\*\* 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

이러한 단점을 극복하기 위해서 본 연구에서는 요소를 사용하지 않고 절점의 상관관계만을 이용하여 근사변위함수를 도출할 수 있는 무요소(EFG)법을 해석의 기본 틀로 사용하여 동적 균열전파해석을 수행한다. 특히, 하나의 해석대상에 다수의 균열이 존재하는 경우에는 균열들이 상호영향을 미치면서 진전하게 되는데 이러한 영향을 보다 효율적이고, 정확하게 예측할 수 있는 해석알고리즘을 제안한다.

## 2. 무요소법의 정식화

무요소법은 요소개념을 사용하지 않고 경계조건과 절점상호간의 위치에 따른 상관관계를 이용하여 형상함수와 근사변위함수를 도출하는 방법이다. 그 중 본 연구에서 사용하는 Element-free Galerkin(EFG)법은 이동최소제곱근사(Moving Least Squares Approximation)법<sup>4)</sup>을 이용하여 각각의 기준점을 중심으로 일정한 거리의 영향영역(domain of influence)내에 포함되는 절점들만을 이용하여 형상함수를 정의하고, 형상함수와 각 절점들의 계수값을 이용하여 근사변위함수를 도출한 후 기존의 Galerkin방법에 따른 정식화과정을 이루어 나가는 수치해석방법이다.<sup>5)</sup>

## 3. 동적파괴역학 이론

선형 탄성 동적파괴역학문제에 있어서 응력확대계수는 균열이 성장할 때 균열전파 속도와 균열전파 방향을 결정하는 중요한 역할을 한다. 이를 계산하기 위해서 본 연구에서는 면내(in-plane)에서 발생하는 균열의 전파 거동을 파악하고자 하므로 모드 I, 모드 II, 혼합모드상태의 문제들만을 다루도록 한다. 또한, 동적 에너지해방률(Energy Release Rate)에 의해서 동적 응력확대계수를 구하고, 이를 이용하여 혼합모드 응력확대계수를 구하는 과정에 있어서 다양한 면적분법<sup>1),6),7)</sup>에 의해서 에너지해방률을 산정한다.

### 3.1 에너지해방률

본 연구에서는 Moran과 Shih<sup>7)</sup> 그리고 Freund<sup>8)</sup>가 제안한 방법에 의해서 균열선단 주변 영역에서의 에너지 균형관계로부터 에너지해방률을 유도하였다. 즉, 내부에서 발생하는 에너지는 전체적인 역학적 에너지로부터 균열면에서 발생하는 에너지유출량과 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 발생하는 에너지 유출량만큼을 줄인 것과 같다. 이 때, 동적하중이 재하될 때 진전하는 균열 선단의 단위 균열진전량에 따른 에너지해방률은 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 발생하는 에너지 유출량을 균열 선단의 전파속도로 나눔으로써 얻을 수 있다.

$$G = \frac{F}{v} \quad (1)$$

여기서,  $v$  는 균열전파속도를 의미하며,  $F$  는 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 발생하는 에너지 유출량으로 균열 선단에 접근할수록 적분경로에 관계없이 일정한 값을 가지는 국부 경로무관성(local path-independence)을 지니게 되며, 다음과 같이 표현된다.

$$F(\Gamma) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [(W+L)v\delta_{ij} - \sigma_{ij}v u_{i,1}] n_j dS \quad (2)$$

이로부터 최종적으로 에너지해방률  $G$  는 다음과 같이 표현된다.

$$G = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [(W+L)\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1}] n_j dS \quad (3)$$

여기서,  $\Gamma$  는 균열 선단 주변의 적분경로,  $W$  는 변형률에너지,  $L$  은 운동에너지를 의미한다.

식 (3)에서 정의된 에너지해방률은 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 적분이 이루어지는 선적분에 의해서 산정된다. 그러나 수치해석기법에서는 영역에 대한 수치적분을 수행하는 것이 일반적이기 때문에 해석상의 편

의를 위해 Moran과 Shih<sup>7)</sup>가 제안한 다음과 같은 면적분형태의 에너지해방률 계산식을 적용하여 에너지해방률  $G$  를 산정하였다.

$$G = \int_{C_+ \cup C_-} (W+L)\delta_{ij}q m_i dS \quad (4)$$

$$- \int_A [(W+L)\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1}]q_{,j} dA - \int_A [\rho \dot{u}_i \ddot{u}_{i,1} - \rho \ddot{u}_i u_{i,1}]q dA$$

여기서, 적분경로  $\partial A$ 는 그림 1에 도시되어 있듯이  $\partial A = C_0 \cup C_+ \cup C_- \cup \Gamma$ 으로 구성되어 있으며,  $m_i$ 는 적분경로  $\partial A$ 에 대해서 외측으로 수직인 방향벡터이다. 이 때, 함수  $q$ 는 다음의 성질을 만족하는 어떤함수도 사용이 가능하다.

$$q = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma \\ 0 & \text{on } C_0 \\ \text{임의의 값} & \text{그 외의 영역} \end{cases} \quad (5)$$

식 (4)에서 균열의 성장을 미소구간으로 나누고 각 성장단계마다 직선으로 균열이 성장하는 것으로 가정한다면, 수직 벡터의  $x$ 방향 성분이 0이 되기 때문에 식 (4)에서 첫 번째 항은 0이 된다. 그러므로, 식 (4)의 전체 적분식에서 면적분항만이 남게된다.

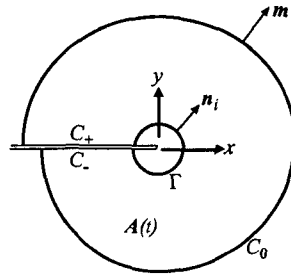


그림 1 균열선단의 좌표계 및 적분영역

### 3.2 응력확대계수의 산정

혼합모드상태의 하중을 받는 경우 에너지해방률  $G$ 는 모드 I과 모드 II 응력확대계수항을 하용하여 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>8)</sup>.

$$G = \frac{1}{E'} [A_I(v)K_I^2 + A_{II}(v)K_{II}^2] \quad (6)$$

여기서,  $E' = E$ 이면 평면응력문제,  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ 이면 평면변형률문제이며,  $A_I$ 와  $A_{II}$ 는 다음과 같다.

$$A_I = \frac{v^2 \alpha_d}{(1-\nu)c_s^2 D}, \quad A_{II} = \frac{v^2 \alpha_s}{(1-\nu)c_s^2 D}, \quad (7)$$

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_d^2}}, \quad \alpha_s = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_s^2}}, \quad D(v) = 4\alpha_d \alpha_s - (1 + \alpha_s^2)^2 \quad (8)$$

이다. 이 때,  $c_d$ 와  $c_s$ 는 각각 압축파(dilatational wave)속도와 전단파(shear wave)속도를 의미한다.

식 (6)의 계산상의 편의를 위해서 응력확대계수  $K_I$ 과  $K_{II}$ 를 분리하는 것이 바람직하며, 수식적으로 보조장(auxiliary field)를 도입하므로써 다음과 같이 분리된  $K_I$ 과  $K_{II}$ 를 얻을 수 있다<sup>9),10)</sup>.

$$K_I = \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{G_{int}^I}{2A_I} \right) \quad K_{II} = \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{G_{int}^{II}}{2A_{II}} \right) \quad (9)$$

여기서,  $G_{int}^I$ 는 모드 I과 보조장의 결합으로 표현되는 에너지해방률,  $G_{int}^{II}$ 는 모드 II와 보조장의 결합으로 표

현되는 에너지해방률을 의미한다.

#### 4. 동적균열전파해석 알고리즘

본 연구에서는 무요소법에 의한 동적 균열전파해석 프로그램을 개발하였다. 해석 알고리즘의 개략적인 흐름도는 그림 2와 같다. 이 때, 동적 시간이력해석에는 explicit 시간적분법이 이용되었으며, 응력확대계수의 산정은 면적분 형태의 J-적분을 사용하였고, 균열의 성장방향을 결정하기 위해서 균열은 최대후프응력의 직각방향으로 진전한다는 maximum hoop stress criterion<sup>8)</sup>을 적용하였다. 그림 3에는 본 연구의 해석 알고리즘 중에서 다수균열의 동적전파해석 부분을 보다 상세하게 설명하고 있다.

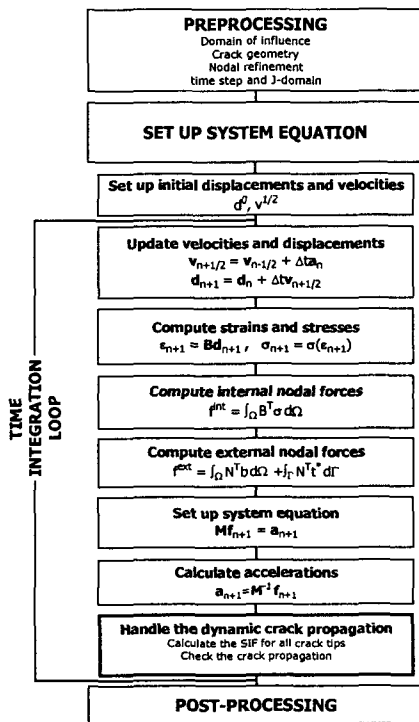


그림 2 무요소법의 explicit 동적균열전파해석 흐름도

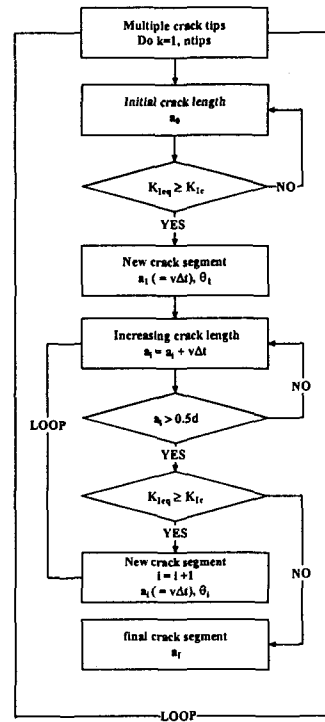


그림 3 동적 다수균열진전해석 흐름도

#### 5. 수치 예제

##### 5.1 다수균열을 지닌 콘크리트 보의 동적균열진전문제

먼저, 본 연구에서 개발된 무요소법을 이용한 동적 다수균열진전해석 프로그램을 검증하기 위해서 그림 4에 도시된 바와 같은 콘크리트 보에서의 혼합모드 균열진전문제를 해석하였으며 John과 Shah<sup>11)</sup>에 의해서 수행된 실험결과와 이를 비교하였다. 본 연구에서는 선형탄성 동적균열전파문제를 해석대상으로 다루고 있기 때문에 콘크리트에서의 균열전파과정을 정확히 예측하기에는 한계가 있지만, 본 연구에서 개발된 동적 균열전파해석 알고리즘을 검증한다는 차원에서 실험결과가 제시된 콘크리트 보의 동적균열전파문제에 본 연구의 해석방법을 적용하게 되었다.

각 시험체는 보의 중앙에서 일정거리간격이 떨어진 노치(notch)를 가지고 있어 혼합모드 파괴가 발생하는 문제이다. 노치의 위치는 정규화된 파라메타  $\gamma$ 에 의해서 표현되며, 이 때  $\gamma$ 는 보의 중앙부에서 노치까지의 거리를 보의 중앙부에서 지점부까지의 거리로 나눈 값으로 정의된다. 그림 4에 도시된 바에 따르면, 보의 길이(L)은 9in(=0.2286m), 보의 깊이(b)는 3in(=0.0762m), 두 지점사이의 거리(S)는 8in(=20.32), 노치의 길이( $a_0$ )는 0.75in(=0.01905m)이다.

무요소법을 이용한 해석을 위해서 본 해석대상문제를 평면변형률문제로 하였으며, 적분셀은  $72 \times 24$ , 절점의 수는 1825개, J-적분영역의 크기는 9개의 절분셀이 포함되는 크기로 하며, John과 Shah<sup>11)</sup>의 실험결과에 의해서 충격속도  $v_0(t)$ 는 식 (10)과 같이 주어진다.

$$v_0(t) = \begin{cases} v_1 t / t_1, & t \leq t_1 \text{ 일때} \\ v_1, & t > t_1 \text{ 일때} \end{cases} \quad (10)$$

여기서,  $v_1 = 0.06 \text{ m/s}$ 이고  $t_1 = 196 \mu\text{s}$ 인데, 이는 응력파가  $v_1$ 의 속도로 보의 깊이를 10회 왕복하는데 소요되는 시간이다. 또한, 균열진전속도는  $v_c = 0.05 C_s$ 로 주어지며, 이 때  $C_s$ 는 전단파속도이다. 해석에 사용된 재료상수는  $K_I^c = 0.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 31.37 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.20$ 이다.

시간이력해석을 위해 explicit방법의 하나인 중앙차분법을 적용하였으며, 이 때 시간간격  $\Delta t = 0.7 \mu\text{s}$ 로 하였다. 적분은 균열 주변의 적분셀에서는 6 point Gauss Quadrature rule을 사용하였으며, 그 외의 영역에서는 1 point Gauss Quadrature rule을 사용하였다.

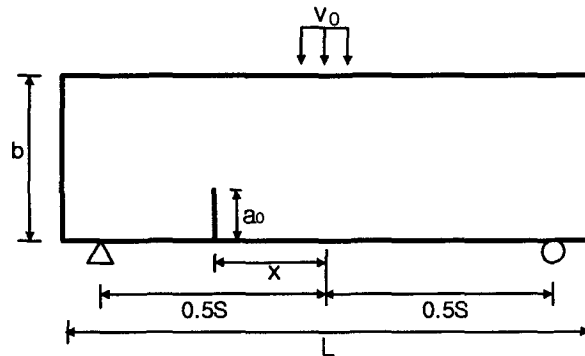


그림 4 혼합모드 콘크리트 시험체

John과 Shah<sup>11)</sup>는  $\gamma$ 를 변화시키면서 균열의 진전경로를 예측하는 실험을 실시하던 중 보의 중앙부에서 균열에 의한 파괴가 발생할지 혹은 일정거리가 떨어진 노치에서 파괴가 발생할지를 결정하는 한계  $\gamma_c$ 를 발견하였다. 실험결과에 따르면  $\gamma_c$ 는 0.7과 0.77사이값에 존재하는 것으로 알려졌다. 이는 노치의 위치에 따라 중앙부의 균열전파와 노치에서의 균열전파가 상호 미치는 영향이 달라짐을 의미 한다. 그림 5에는 노치의 위치에 따라 균열진전경로를 도시하였으며,  $\gamma$ 가 0.672인 경우에는 두 균열사이의 상호 영향에 의해서 노치부에서만 균열이 전파되었으며,  $\gamma$ 가 0.734인 경우에는 중앙부에서의 균열만이 성장하였다. 또한, 그림 5b에 도시되었듯이 해석결과에서는  $\gamma_c$ 가 0.703으로 결정되었다.

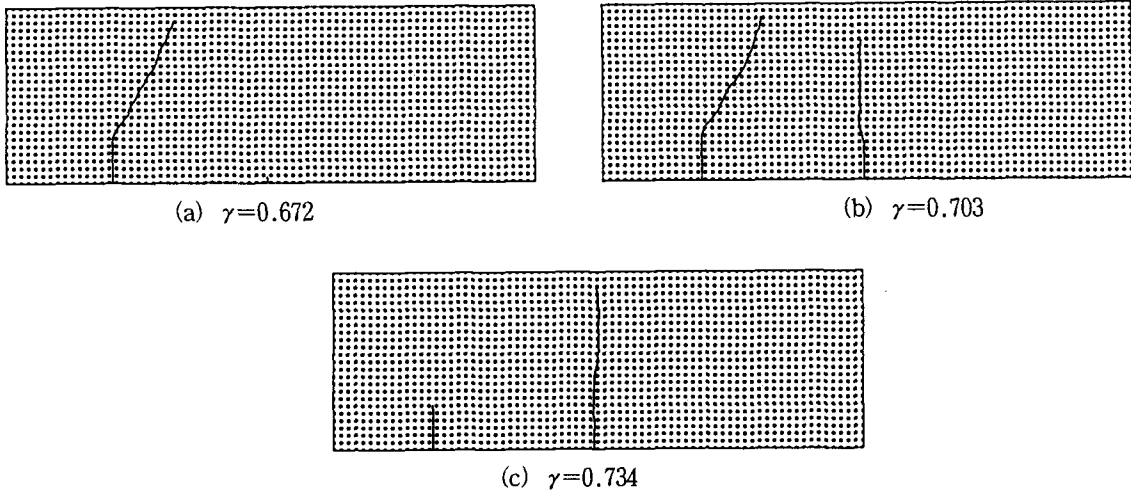


그림 5 노치의 위치변화에 따른 균열진전 양상

### 5.2 다수균열을 함유한 부재의 혼합모드 동적균열전파문제

앞의 예제에서 본 연구에서 개발된 다수균열이 있는 경우의 동적균열전파해석 알고리즘의 정확성을 검증하였으며, 두 번째 예제를 통해서 본 연구결과와 효율성과 적용성을 확인해보고자 한다. 본 절에서 다루는 예제는 그림 6에 도시되어 있듯이 세 개의 균열을 함유하고 있는 인장응력을 받고 있는 부재이다. 세 개의 균열은 그 초기 균열각과 균열길이를 달리하였으며, 균열이 성장하는 동안 상호 균열의 전파방향에 어떠한 영향을 미치게 되는지를 해석하였다. 균열 ①의 초기균열진전각과 초기균열길이는 각각 60도와 0.01m이며, 균열 ②의 경우는 각각 30도와 0.03m이며, 마지막으로 균열 ③의 경우는 각각 50도와 0.05m이다.

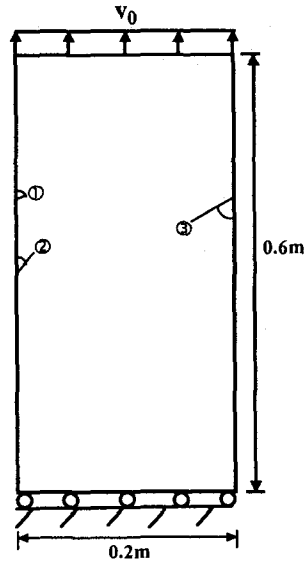


그림 6 동적 혼합모드상태의 다수균열함유 부재

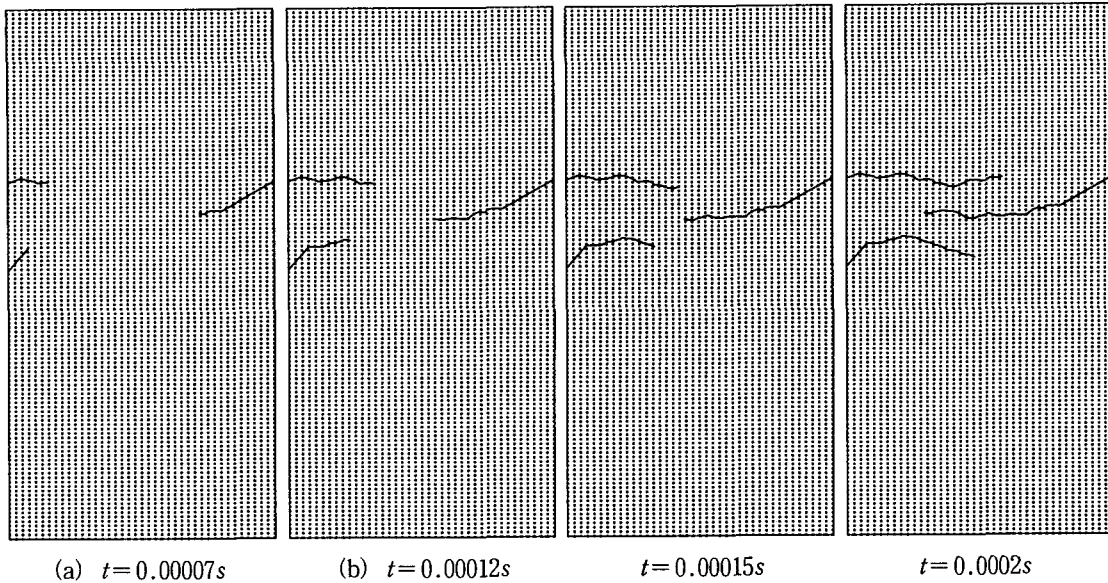


그림 7 다수균열 함유부재에서의 동적균열전파과정

무요소법을 이용한 해석을 위해서 본 해석대상문제를 평면응력문제에 모델링하였으며, 적분셀은  $60 \times 120$  (절점수는 7381개)이며, J-적분영역의 크기는 0.01m, 충격속도  $v_0$ 는 45m/s, 균열진전속도는  $v_c = 0.25C_s$ 로 주어지며, 이 때  $C_s$ 는 전단파속도이다. 해석에 사용된 재료상수는  $K_I^c = 68\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ ,  $E = 190\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.30$ 이다.

시간이력해석을 위해 explicit방법의 하나인 중앙차분법을 적용하였으며, 이 때 시간간격  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}\text{s}$ 로 하였다. 적분은 균열 주변의 적분셀에서는 6 point Gauss Quadrature rule을 사용하였으며, 그 외의 영역에서는 1 point Gauss Quadrature rule을 사용하였다.

그림 7은 다수균열을 함유하고 있는 부재에서의 동적균열전파과정을 시간대별로 도시하였다. 세 개의 균열이 상호 영향을 미치며 서로의 성장을 간섭하며 균열선단이 서로 만나지 않고 진전해 나감을 확인할 수 있었으며, 상기의 문제를 통해서 본 연구에서 개발한 동적 다수균열진전해석 알고리즘이 실제적인 공학적 문제에도 적용될 수 있음을 검증하였다.

## 6. 결론

본 연구에서는 무요소(EFG)법에 의해 다수의 균열이 존재하는 선형 탄성 동적균열전파문제를 효율적이고 정확히 해석할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하였다. 개발된 알고리즘의 정확성 및 효율성을 검증하기 위해서 실험결과가 주어진 benchmark 문제를 해석하고, 임의의 다수균열이 함유된 문제에 적용해본 결과 본 연구에서 제안한 알고리즘은 다수의 균열이 진전하는 문제에서 전파되는 균열의 상호 미치는 영향을 효율적으로 평가하여 혼합모드상태하의 동적균열전파경로를 예측하는 문제에 효과적으로 적용할 수 있음을 입증하였다.

## 감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구지원사업 핵심전문연구(981-1204-004-2)지원을 받아 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Nishioka, T. and Atluri, S. N., (1984), "Path-Independent Integral and Moving Isoparametric Elements for Dynamics Crack Propagation", *AIAA Journal* Vol. 22, pp. 409-414.
2. Swenson, D. V. and Ingraffea, A. R., (1988), "Modeling Mixed-Mode Dynamic Crack Propagation Using Finite Elements: Theory and Applications", *Computational Mechanics*, Vol. 3, pp. 381-397.
3. Du, J., Yon, J. H., Hawkins, N. M., Arakawa, K., and Kobayashi, A. S., (1992), "Fracture Process Zone for Concrete for Dynamic Loading", *ACI Materials Journal*, Vol. 89, pp. 252-258.
4. Lancaster, P. and Salkauskas, K., (1981), "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141-158.
5. Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L., (1994), "Element-free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256.
6. Li, F. Z., Shih, C. F. and Needleman, A., (1985), "A Comparison of Methods for Calculating Energy Release Rates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 405-421.
7. Moran, B. and Shih, C. F., (1987), "Crack Tip and Associated Domain Integrals From Momentum and Energy Balance", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, pp. 615-642.
8. Freund, L. B., (1990), *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
9. Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T., (1980), "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341.
10. Shih, C. F. and Asaro, R. J., (1988), "Elastic-Plastic Analysis of Crack on Bimaterial Interface: Part I-Small Scale Yielding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 299-316.
11. John, R. and Shah, S. P., (1990), "Mixed Mode Fracture of Concrete Subjected to Impact Loading", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 116, pp. 585-602.