

집중하중을 받는 변단면 고정-이동지점 보의 비선형 거동

Non-Linear Behavior of Tapered Beams with Clamped-Roller Ends, subjected to a Concentrated Load

이 병 구* · 이 종 국** · 최 규 문** · 김 무 영**

Byoung Koo Lee · Jong Kook Lee · Kou Moon Choi · Mu Young Kim

ABSTRACT

This paper explores the non-linear behavior of tapered beam subjected to a floating concentrated load. For applying the Bernoulli-Euler beam theory to this beam, the bending moment at any point of elastica is obtained from the final equilibrium state. By using the bending moment equation and the Bernoulli-Euler beam theory, the differential equations governing the elastica of clamped-roller beam are derived, and solved numerically. Three kinds of tapered beam types are considered. The numerical results of the non-linear behavior obtained in this study are agreed quite well to the results obtained from the laboratory-scale experiments.

1. 서 론

최근에 재료공학의 발달로 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 대변형에 대해서도 안정성이 확보될 수 있기 때문에 구조물의 기하학적 비선형 거동 해석이 필수적이다.^{(1)~(6)}

이 논문은 작용점이 변하는 집중하중을 받는 변단면 고정-이동지점 보의 비선형 거동해석에 연구목적이 있다. 변단면을 구조물에 이용하는 경우에 경제적 이점, 미적 감각 또는 시공상의 이유 등으로 변단면 부재의 사용은 해석상의 어려움에도 불구하고 그 사용이 필수적이다.

이 논문에서는 보가 하중을 받아 최종적으로 평행이 된 상태에서 휨 모멘트 식을 산정하고, 이 식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하여 고정-이동지점 보의 비선형 거동을 해석하였다. 본 연구 방법의 타당성

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 원광대학교 대학원

을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 시행하여 비선형 거동해석의 이론 값과 실험 값을 비교하였다. 이 연구에서 보의 재료는 선형탄성체로, 보의 축은 비압축성으로 가정하였다.

2. 변단면의 정의

그림 1은 지간길이가 l 이고, A 지점의 단면이차모멘트가 I_A , B 지점의 단면이차모멘트가 I_B 인 변단면 보를 나타내고 있다. 점선으로 표시된 하중 재하전의 축방향 길이 s 에서 단면이차모멘트는 I 로 정의한다. 이 논문에서는 단면이차모멘트 I 가 다음 식으로 표시되는 선형 변단면을 채택한다.⁽⁷⁾

$$I = I_A [1 + (n^{1/e} - 1)s/l]^e, \quad n = I_B/I_A \quad (1a,b)$$

식 (1a)에서 n 은 식 (1b)와 같이 I_A 에 대한 I_B 의 단면비이다. e 는 보의 변단면 형상에 따라서 결정되는 형상계수로서 폭 변단면의 경우 $e=1$, 높이 변단면의 경우 $e=3$, 정방형 변단면 또는 원형 변단면의 경우 $e=4$ 를 적용한다.⁽⁸⁾

그림 1에서 실선은 직선 보가 하중 재하후에 최종적으로 평형상태가 된 정확탄성곡선을 나타낸다. 임의 점 (x, y) 에서 보의 곡선길이는 s 이며, 보의 축은 비압축성이기 때문에 (x, y) 에서 I 는 하중을 받기전보의 축 s 에서 I 와 같다. 정확탄성곡선상의 이동지점 B' 에서 $s=l$ 이고, 따라서 B' 에서 I 는 I_B 이다.

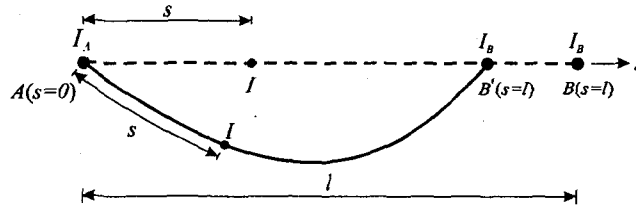


그림 1 변단면 보의 정의

3. 수학적 모형

그림 2는 보가 집중하중 P 를 받아 최종적으로 평형상태를 이룬 정확탄성곡선의 변수들을 나타내고 있다. 해석대상 보에서 A 는 고정지점, B 는 이동지점이며, 지간길이는 l , 하중 재하위치는 al 이다. 하중 재하전에 보의 점선과 같이 직선상태이지만, 하중 재하후에 정확탄성곡선은 실선으로 표시되어 있다.

이 그림에서 (x, y) 는 직교좌표계, s 는 A 로부터 보의 축을 따라 측정한 곡선길이, θ 는 접선각, I 는 앞에서 정의된 단면이차모멘트, M 은 휨 모멘트이다. M_A 은 고정지점의 반력모멘트, R_A 는 A 의 수직반력이다.

이 연구에서 평형상태가 된 후에 집중하중 P 는 수평변위 Δ_P 를 갖는 작용점이 변하는 하중이고, 이동지점 B 의 수평변위는 Δ_R 이다. 보의 축은 비압축성이므로 정확탄성곡선에서 지간길이는 $l - \Delta_R$ 가 되고, P 가 위치하는 곡선길이 s 는 하중 재하위치인 al 을 유지한다. 정확탄성곡선상의 B' 에서 $s=l$ 이며, P 의

x 좌표는 $al - \Delta_P$ 이다.

그림 2의 정확탄성곡선은 Bernoulli-Euler 보 이론의 지배를 받는다. 이 이론을 적용하기 위하여 임의 점에서 휨 모멘트 M 을 산출하여야 하나 Δ_R , Δ_P , R_A , M_A 가 미지수이므로 M 식을 산출할 수 없다. 그러므로 변화위치 집중하중을 받는 보의 비선형 거동에 대한 엄밀해는 아직 알려져 있지 않다. 따라서 이 연구에서는 비선형 거동의 개략해를 산출하는 수치해석 방법을 개발한다. 먼저, 평형방정식을 이용하여 M_A 를 R_A 에 관한 식으로 식 (2a)와 같이 나타내고, Δ_R , Δ_P , R_A 를 미지수인 상태로 임의점 (x, y) 에서 축방향력 A , 전단력 V 및 휨 모멘트 M 식들을 다음 식 (2b-d)와 같이 산출한다.

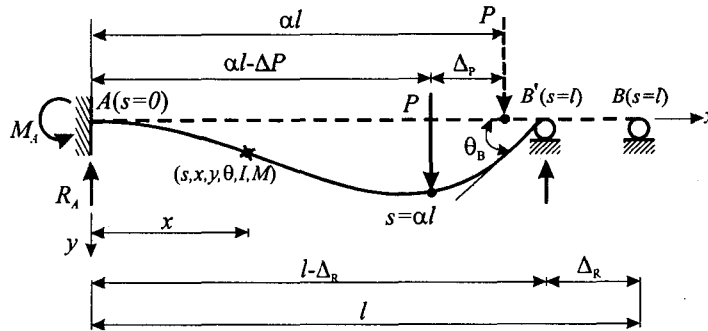


그림 2 보 변수의 기하학적 정의

$$M_A = R_A (l - \Delta_R) - P(l - \Delta_R - \alpha l + \Delta_P) \quad (2a)$$

$$A = \begin{cases} R_A \sin \theta, & 0 \leq s \leq \alpha l \\ (R_A - P) \sin \theta, & \alpha l \leq s \leq l \end{cases} \quad (2b)$$

$$V = \begin{cases} R_A \cos \theta, & 0 \leq s \leq \alpha l \\ (R_A - P) \cos \theta, & \alpha l \leq s \leq l \end{cases} \quad (2c)$$

$$M = \begin{cases} R_A x - M_A, & 0 \leq s \leq \alpha l \\ R_A x - P(x - \alpha l + \Delta_P) - M_A, & \alpha l \leq s \leq l \end{cases} \quad (2d)$$

곡률반경이 ρ 인 정확탄성곡선의 미소 요소에서 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 미분방정식들은 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$dx/ds = \cos \theta, \quad 0 \leq s \leq l \quad (3a)$$

$$dy/ds = \sin \theta, \quad 0 \leq s \leq l \quad (3b)$$

$$d\theta/ds = \rho^{-1} = -M/(EI), \quad 0 \leq s \leq l \quad (3c)$$

위의 식 (3c)에서 E 는 탄성계수이다.

그림 2의 정확탄성곡선에서 경계조건은 다음과 같다.

$$x_{s=0} = 0, \quad y_{s=0} = 0, \quad \theta_{s=0} = 0, \quad y_{s=l} = 0 \quad (4a-d)$$

$$x_{s=\alpha l} = \alpha l - \Delta_P, \quad x_{s=l} = l - \Delta_R \quad (4e,f)$$

식 (4a-c)는 $A(s=0)$ 에서 수평, 수직변위와 처짐각이 0이고, 식 (4d)는 $B'(s=l)$ 에서 수직변위가 0임을 의미한다. 식 (4e)는 집중하중 P 의 위치에서 s 는 하중의 처음 재하위치 al 을 유지함을 의미하고, 식 (4f)는 B' 의 x 좌표가 $l-\Delta_R$ 임을 의미한다. 경계조건 식 (4d-f)는 다음과 같이 하나의 식으로 정리하여 미분방정식 식 (3a-c)를 시행착오방법으로 해석하는 과정에서 미지수인 Δ_R , Δ_P , R_A 를 찾는 데 이용한다.

$$|y_{s=l}| + |al - \Delta_P - x_{s=al}| + |l - \Delta_R - x_{s=l}| = 0 \quad (5)$$

미분방정식들을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\lambda = s/l, \quad \xi = x/l, \quad \eta = y/l \quad (6a-c)$$

$$\delta_R = \Delta_R/l, \quad \delta_P = \Delta_P/l, \quad \alpha = al/l \quad (6d-f)$$

$$p = Pl^2/EI_A, \quad r_A = R_A l^2/EI_A \quad (6g,h)$$

$$m_A = M_A l/EI_A = r_A(1 - \delta_R) - p(1 - \delta_R - \alpha + \delta_P) \quad (6i)$$

$$i = I/I_A = [1 + (n^{1/e} - 1)\lambda]^e \quad (6j)$$

$$a = Al^2/EI_A = \begin{cases} r_A \sin \theta, & 0 \leq \lambda \leq \alpha \\ (r_A - p) \sin \theta, & \alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (6k)$$

$$v = Vl^2/EI_A = \begin{cases} r_A \cos \theta, & 0 \leq \lambda \leq \alpha \\ (r_A - p) \cos \theta, & \alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (6l)$$

$$m = Ml/EI_A = \begin{cases} r_A \xi - m_A, & 0 \leq \lambda \leq \alpha \\ r_A \xi - p(\xi - \alpha + \delta_P) - m_A, & \alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (6m)$$

여기서 λ , ξ , η , δ_R , δ_P , α 는 s , x , y , Δ_R , Δ_P , al 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원 하중, r_A 와 m_A 는 무차원 반력과 무차원 모멘트반력, i 는 무차원 단면이차모멘트, a , v , m 은 무차원 합응력이다.

미분방정식 식 (3a-c)와 식 (6a-m)을 이용하면 작용점이 변하는 집중하중을 받는 변단면 고정-이동지점보의 비선형 거동을 지배하는 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$d\xi/d\lambda = \cos \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (7a)$$

$$d\eta/d\lambda = \sin \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (7b)$$

$$d\theta/d\lambda = -m/i, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (7c)$$

경계조건식 식 (4a-c)와 식 (5)를 무차원화하면 다음과 같다.

$$\xi_{\lambda=0} = 0, \quad \eta_{\lambda=0} = 0, \quad \theta_{\lambda=0} = 0 \quad (8a-c)$$

$$|\eta_{\lambda=1}| + |\alpha - \delta_P - \xi_{\lambda=\alpha}| + |1 - \delta_R - \xi_{\lambda=1}| = 0 \quad (8d)$$

4. 수치해석방법 및 검증

주어진 단면조건 n , e 및 하중조건 p , α 에 대한 비선형 거동을 해석하기 위하여 미분방정식 식 (7a-c)를 수치해석하는 방법을 개발하였다. 이 연구에서 개발한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

미분방정식의 수치해석 문제는 초기치 문제이므로 경계조건식 식 (8a-c) 이외에 정확탄성곡선에서 미지수인 δ_R , δ_P , r_A 를 가정하고, m_A 는 r_A 의 식으로 나타낸다. δ_R , δ_P , r_A 값이 정의되면 경계조건식 식 (8a-c)를 초기치로 하여 식 (7a-c)의 미분방정식을 Runge-Kutta법⁽⁹⁾으로 $\lambda=0$ 에서 $\lambda=1$ 까지 수치적분한다. 가정한 δ_R , δ_P , r_A 값이 비선형 거동의 참값이면 경계조건식 식 (8d)를 만족하여야 한다. 그림 2에서 δ_R 값은 $0 < \delta_R < 1$, δ_P 값은 $0 < \delta_P < \alpha$, r_A 값은 $0 < r_A < p$ 에 존재함이 명백하므로 이 범위에서 시행착오방법으로 δ_R , δ_P , r_A 값을 찾는다. 첫 번째 시행에서는 $0 < \delta_R < 1$, $0 < \delta_P < \alpha$, $0 < r_A < p$ 의 범위에서 미지수를 찾기 위하여 δ_R , δ_P , r_A 값을 일정 증분씩 증가시키면서 식 (8d)의 좌변값 즉, $D = |\eta_{\lambda=1}| + |\alpha - \delta_P - \xi_{\lambda=\alpha}| + |1 - \delta_R - \xi_{\lambda=1}| = 0$ 를 산출한다. 계산된 D 값 중에서 최소 D 값을 갖는 δ_R , δ_P , r_A 를 선택한 후에 이 값들을 기준으로 δ_R , δ_P , r_A 의 새로운 범위를 찾고, 이 범위에서 D 값들을 다시 산출한다. 다음 시행에서는 더 축소된 δ_R , δ_P , r_A 의 범위가 계산되고 이 과정을 반복하면 수렴한계 $D \leq 1 \times 10^{-15}$ 를 만족하는 δ_R , δ_P , r_A 값을 찾을 수 있다. 이와 같이 δ_R , δ_P , r_A 값을 찾으면 Runge-Kutta법에 의하여 ξ , η , θ , a , v , m 값들이 계산되어 정확탄성곡선과 합용력을 얻을 수 있다.

표 1은 본 연구와 실험 값의 결과를 비교한 표이며, 실험 재료의 기계적 성질과 제원을 표 아래에 기록하였다. 이론 값 δ_R , $\eta_{\lambda=0.5}$ 은 식 (6d,c)를 이용하여 Δ_R , $y_{s=0.3m}$ 로 환산하였다. 본 연구와 실험에 의한 거동 값은 Δ_R 은 1.6%, θ_B 는 1.2% 정도의 오차를 보이며, $y_{s=0.3m}$ 는 오차가 거의 없었다. Δ_R 의 오차가 $y_{s=0.3m}$ 의 오차에 비하여 상대적으로 큰 것은 적은 변위가 발생하여 정확한 값이 측정되지 못한 결과로 사료된다. 거동 값의 평균 오차는 약 0.59%로 나타나 이 연구의 미분방정식과 수치해석방법이 타당함을 알 수 있다.

표 1 비선형 거동의 이론값과 실험값 비교

| 조 건 | 변 수 | 본 연구(A) | 실 험(B) | 오 차(%)*** |
|-------------------------|--------------|----------|----------|-----------|
| $n = 0.5^*$ $p = 2$ | Δ_R | 1.31mm | 1.33mm | 1.53 |
| | $y_{s=0.3m}$ | 13.72mm | 13.66mm | 0.44 |
| | θ_B | 0.085rad | 0.084rad | 1.18 |
| $n = 2^{**}$ $p = 6$ | Δ_R | 2.32mm | 2.30mm | 0.86 |
| | $y_{s=0.3m}$ | 23.77mm | 23.80mm | 0.13 |
| | θ_B | 0.127rad | 0.128rad | 0.79 |

* $e=1$, $\alpha=0.5$, $E=206$ GPa, $I_A=1.7 \times 10^{-11} m^4$, $P=17$ N, $l=0.6$ m

** $e=1$, $\alpha=0.5$, $E=206$ GPa, $I_A=8.5 \times 10^{-12} m^4$, $P=17$ N, $l=0.6$ m

*** 오차(%) = $|B - A| / A \times 100$

5. 수치해석 결과

보의 단면조건 n , e 및 하중조건 p , α 값을 변화시키면서 수치해석하여 이 변수들이 비선형 거동에 미치는 영향을 분석하였다. 표 2에서 형상계수 e 가 무차원 변위와 휨 모멘트의 최대값 m_{max} 에 미치는 영향을 분석하였으며, 거동값 δ_R , δ_P , θ_B , η_{max} 은 $e=4$ (정방향 변단면), 3(높이 변단면), 1(폭 변단면)의 순서로 크다. 여기서, 아래첨자 max는 비선형 거동의 최대 거동값을 의미한다. m_{max} 는 $e=1, 3, 4$ 의 순서로 위의 거동값들과 반대의 순서를 보인다. 이 표의 η_{max} 비율에서와 같이 e 가 비선형 거동에 미치는 영향은 약 3%미만이다.

표 2 형상계수 e 가 비선형거동에 미치는 영향*

| e | δ_R | δ_P | θ_B | η_{max} | m_{max} | 비율** |
|-----|------------|------------|------------|--------------|-----------|-------|
| 1 | 0.00863 | 0.00369 | 0.21093 | 0.05884 | -1.02846 | 1.000 |
| 3 | 0.00910 | 0.00387 | 0.21620 | 0.06039 | -0.98580 | 1.026 |
| 4 | 0.00916 | 0.00391 | 0.21683 | 0.06059 | -0.93218 | 1.030 |

* $p=5$, $n=0.5$, $\alpha=0.5$

** $e=1$ 에 대한 $e=1, 3, 4$ 의 η_{max} 의 비율

그림 3은 $e=1$, $n=0.5$, $\alpha=0.5$ 인 보에 $p=5, 10, 15$ 의 무차원 하중의 작용할 때, 정확탄성곡선의 예를 보여준다. p 가 증가하면 θ_B , δ_R 도 증가하며, p 는 $\alpha=0.5$ 인 대칭하중이지만 단면이 $n=0.5$ 로 비대칭이므로 정확탄성곡선은 비대칭이다.

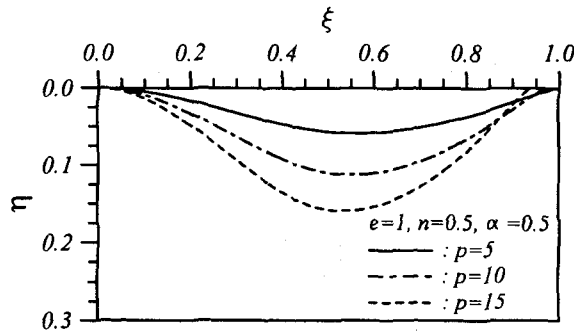


그림 3 정확탄성곡선의 예

그림 4는 그림 3에서 $p=5$ 인 경우에 a , v , m 의 합응력도를 나타낸다. 이 그림에서 전단력 v 는 하중 작용점 이외의 부분에서는 그 변화가 거의 없으나 축방향력 a 는 그 변화가 매우 크게 나타남을 알 수 있다. 이는 θ 값의 변화가 전단력에는 그 영향을 거의 미치지 못하나 축 방향력에는 그 영향이 매우 큼을 의미한다. 또한 휨 모멘트 m 은 보 중앙부분에서 그 값이 크게 나타남을 알 수 있다.

그림 5은 $e=1$, $n=0.5$, $\alpha=0.5$ 인 보에 무차원하중 p 의 크기가 변화할 때, 변위 δ_R , δ_P , η_{max} ,

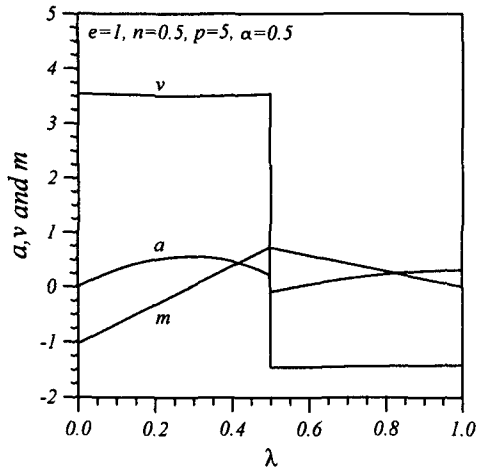


그림 4 합응력도

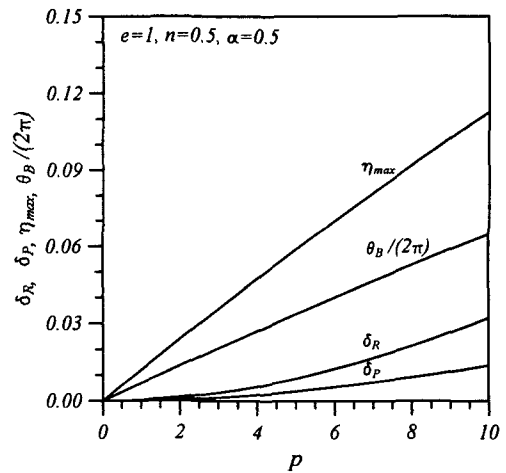


그림 5 하중-변위 관계곡선

$\theta_B/(2\pi)$ 의 변화를 보여주며, 이들의 관계는 비선형이다. δ_R, δ_P 는 작은 하중에서 작은 증가율을, 큰 하중에서 큰 증가율을 보이지만, $\eta_{max}, \theta_B/(2\pi)$ 는 증가율이 거의 일정하다.

그림 6은 $e=1, p=5, \alpha=0.5$ 의 보에 단면비 n 이 변화할 때, 변위 $\delta_R, \delta_P, \eta_{max}, \theta_B/(2\pi)$ 의 변화를 나타내며 n 값이 증가함에 따라 거동값이 당연히 감소한다. 작은 n 값에 대하여 감소율은 더 크고 n 값이 증가함에 따라 감소율은 감소한다. n 값이 약 1.5이상에서 δ_R, δ_P 는 수평선에 접근하여 일정한 값에 수렴한다.

그림 7은 $e=1, n=0.5, p=5$ 의 보에 하중위치 α 가 변화할 때, α 와 $\delta_R, \delta_P, \eta_{max}, \theta_B/(2\pi)$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. α 값이 약 0.6까지 증가함에 따라 변위들은 증가하고 그 이후에는 감소한다.

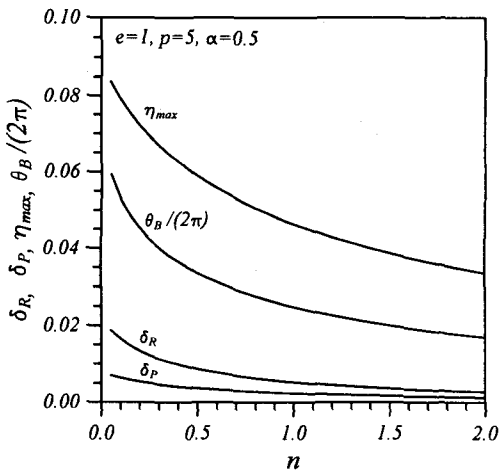


그림 6 단면비-변위 관계곡선

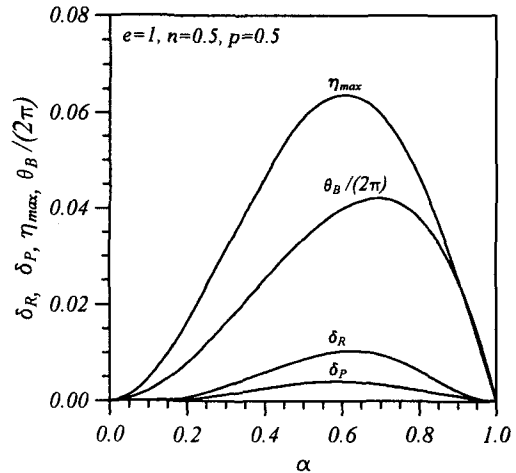


그림 7 하중위치-변위 관계곡선

6. 결 론

이 논문은 변화위치 집중하중이 작용하는 변단면 고정-이동지점 보의 비선형 거동해석에 관한 연구이다. 평형방정식을 이용하여 보의 최종 평형상태에서 미지 변위 δ_R , δ_P , r_A 를 변수로 휨 모멘트 식을 산정하고, 이 식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하여 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식을 수치적분기법과 시행착오방법을 이용하여 수치해석하였다. 본 연구와 실험에 의한 거동 값들이 잘 일치하여 본 연구에서 개발한 수치해석 방법이 비선형 거동해석에 타당함을 입증하였다. 일련의 수치해석을 실시하여 정확탄성곡선, 합응력 및 하중, 단면비, 하중위치 변수가 변위와 합응력에 미치는 영향을 분석하였다. 본 연구의 결과들은 대변형이 발생하는 구조물의 비선형 해석 및 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

1. Rojahan, C., *Large Deflections of Elastic Beams*, Thesis for the Degree of Engineer, Stanford University, 1968.
2. Lau, J.H., "Large Deflection of Cantilever Beam," *Journal Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 107, 1981, pp. 259-264.
3. 이병구, "캔틸레버보의 과대처짐 해석," 대한토목학회 논문집, 제10권 제1호, 1990, pp. 1~7.
4. Lee, Byoung Koo, Wilson, J.F. and Oh, Sang Jin, "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross-Section," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 28, 1993, pp. 579-589.
5. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., "Large Deflection of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to a Point Load," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 4, 1996, pp. 49-59.
6. Lee, Byoung Koo and Oh, Sang Jin, "Elastica and Buckling Load of Simple Tapered Columns with Constant Volume," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 18, 2000, pp. 2507-2518.
7. Gupta, A.K., "Vibration of Tapered Beams," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 111, 1985, pp. 19-36.
8. Wilson, J.F., Lee, Byoung Koo and Oh, Sang Jin, "Free Vibrations of Circular Arches with Variable Cross-Section," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 2, No. 4, 1994, pp. 345-357.
9. Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons. 1969.