

직사각형 재하판을 이용한 평판재하시험에 의한 지반의 합성탄성계수 추정에 관한 연구

The evaluation of complex elastic modulus of the foundation by the
rectangular plate loading test

강차훈*
Kang, Cha-Hoon

조현영**
Cho, Hyun-Young

정진환***
Cheung, Jin-Hwan

김성도****
Kim, Seong-Do

ABSTRACT

This paper describes the method of evaluating the elastic modulus of soil medium by using the Rectangular Plate Loading Test. The foundation is considered to be the elastic half-space. The stiffness matrix of elastic half space is derived using Boussinesq's analytical solution. A numerical examples are presented to verify the validity of this procedure. Also, the numerical results are compared with those of the existing study results. The procedure proposed in this theses can be applied to the design of concrete paving resting on the elastic foundation.

1. 서 론

자연상태에 있는 지반은 토립자의 상태, 크기 및 역학적 특성과 지반구조, 지반이력, 지하수위 및 지반의 압밀 등의 영향을 받으므로 이러한 지반상에 놓이는 구조물의 해석은 지반과의 상호작용을 고려한 일체적 방법이 요구된다. 일반적으로 탄성지반상에 놓인 평판의 거동은 Winkler 모델로 가정한 경우에는 스프링상수(k)에, 그리고 Boussinesq의 반무한 탄성체로 가정한 경우에는 지반의 탄성계수(E_s) 및 프와송비(ν_s)와 밀접한 관계가 있다. 특히, 반무한 탄성체상에 놓여 있는 판의 상호작용 해석에서는 지반의 탄성계수 값에 따라 접촉압력 및 변위의 차이가 크기 때문에 지반의 탄성계수 선택에 신중을 기해야 한다⁽¹⁾

본 연구에서는 직사각형평판을 이용한 평판재하시험으로부터 지반의 국소적인 탄성계수를 추정할 수 있는 계산체계를 제안하였다. 중심 수직하중을 받는 직사각형의 강체 재하판과 Boussinesq해를 이용한 유한개의 절점을 갖는 지반전체의 유연도 행렬을 만들어 강체판의 하중-침하 관계식을 구하고 하중-침하 관계를 통하여 합성탄성계수를 구하였다. 또한 수치모델을 통하여 기존이론과 비교하여 신뢰성 및 적용성을 검증하였다.

* 부산대학교 토목공학과 석사과정
** 부산대학교 토목공학과 명예교수
*** 부산대학교 토목공학과 교수
**** 경성대학교 건설·환경공학부 부교수

2. 지반모델 및 가정

모든 구조물은 지반위에 축조되며, 구조물에 작용하는 하중은 구조물 저판을 통해 지반으로 전달된다. 이 경우 구조물과 지반의 상호작용을 고려해야 하며 실제적이고 신뢰성 있는 결과를 얻기 위해서 자연상태의 지반을 충실히 만족시키는 지반모델이 필요하다. 지반의 특수한 점들을 고려하여 이상화시키면 Winkler Model, Two-parameter Model 및 Elastic-solid Model로 크게 분류 할 수 있다.⁽²⁾ 본 연구에서는 지반을 Boussinesq가 제안한 균질이고 등방성인 반무한 탄성체로 가정하여 판과 접하는 판 질점 전체의 수직변위를 자유도로 하는 한 개의 요소로 생각한다. 또한 지반이 비교적 유연하고 판의 강성이 매우 커 지반이 균등하게 침하한다고 가정한다.

3. 반무한 탄성체의 유연도 행렬의 정식화

3.1 분포하중에 의한 지반의 변위

Boussinesq(1885)는 지반을 탄성, 균질 및 등방성이라 가정하고 반무한 탄성체 표면에 한 개의 집중하중이 작용할 때 표면변위를 얻는 식(1)을 구하였다⁽¹⁾(그림 1). 이 식을 이용하면, 상부 구조 저판과 수평 지반의 접촉면의 미소면적 dA 에서의 하중강도를 q_i 라 할 때, 이로 인한 j 점의 변위는 Boussinesq의 해로부터 다음과 같이 유도된다.

$$w_{ji} = \frac{P_i(1 - \nu_s^2)}{\pi E_s d_{ij}} \quad (1)$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$dw_{ji} = \frac{(1 - \nu_s^2)}{\pi E_s} \frac{q_i dA}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (2)$$

$$w_j = \alpha \int_{A^{(i)}} \frac{q(x, y) dA}{\sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2}} \quad (3)$$

$$\text{여기서 } \alpha = \frac{1 - \nu_s^2}{\pi E_s}$$

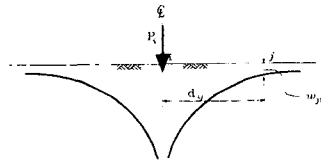


Fig. 1 Surface deflection of half-space due to concentrated loading

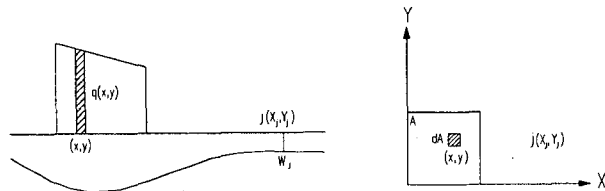
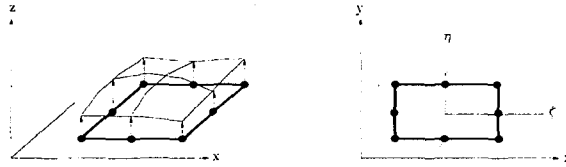


Fig. 2 Surface deflection of half-space due to distributed loading

3.2 지반의 유연도 행렬

상부 평판 요소로부터 지반에 주어지는 분포 반력의 강도를 요소 절점 강도로부터 보간하면 다음과 같다.



(a) Distributed reactions (b) Coordinates

Fig. 3 Distributed reactions under an element

상부 평판요소로부터 지반에 주어지는 분포 반력의 강도를 요소 보간함수 N 을 사용하여 보간하면 저판의 한 요소 e 의 요소영역에 작용하는 분포 반력에 의한 j 점의 변위는 다음과 같은 적분으로 주어진다.

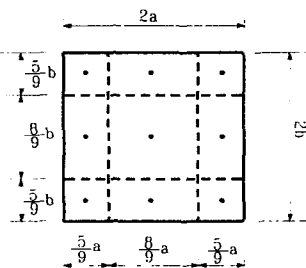
$$w_j^{(e)} = \alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{N_j^{(e)} \det J d\xi d\eta}{\sqrt{(x_j - \sum N_i x_i)^2 + (y_j - \sum N_i y_i)^2}} \quad (4)$$

여기서 J 는 보간 함수 N 의 Jacobian matrix

접촉압력 $q(x, y)$ 의 함수 형태를 알 수 없으므로 적절한 가정을 도입하여 $q(x, y)$ 를 상수 q 로 바꾸면 식 (4)의 적분이 수행 가능하다. 여기서는 소영역분할법을 사용하여 적분한다. 3점 Gauss적분을 수행할 직사각형 판에서 (그림4)와 같은 소영역 내의 접촉압력이 그 소영역 내의 Gauss적분점에서의 접촉압력 q_{Gi} 로서 일정하다고 가정할 수 있다. 이상의 가정을 사용하여 접촉반력을 상수 값으로 만들 수 있다.

식(4)에 이 가정을 도입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$w_j^{(e)} = \alpha \left[q_{G1} \int_{A_{G1}} \frac{dA_{G1}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + q_{G2} \int_{A_{G2}} \frac{dA_{G2}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \dots + q_{G3} \int_{A_{G3}} \frac{dA_{G3}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \right] \quad (5)$$



여기서 q_{Gi} 는 i 번째 Gauss적분점에서의 접촉압력 값이고 A_{Gi} 는 q_{Gi} 가 등분포 한다고 가정되어지는 면적이다.

이제 식(5)에 포함되어 있는 다음의 적분을 수행하면 된다.

$$I = \int_A \frac{dA}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \quad (6)$$

Fig. 4 Influence areas of gauss point

i 번째 Gauss적분점에서 접촉압력 q_{Gi} 는 등매개변수 요소의 형상함수와 절점에서의 접촉압력 $\mathbf{q}^{(e)}$ 로서 보간이 가능하다.

$$q_{Gi} = \mathbf{N}_{Gi} \mathbf{q}^{(e)} \quad (7)$$

식(7)을 식(4)에 대입하여 다시 쓰면 다음 식과 같다.

$$w_j^{(e)} = \alpha (I_{A_{\omega_1}} \mathbf{N}^1 + I_{A_{\omega_2}} \mathbf{N}^2 + \dots + I_{A_{\omega_n}} \mathbf{N}^n) \mathbf{q}^{(e)} \quad (8)$$

저판 전체에 분포하는 반력에 의한 j 점의 처짐은 저판의 각 요소 영역의 분포하중에 의한 j 점의 변위를 중첩하여 다음과 같이 구해진다.

$$w_j = \sum_{(e)} w_j^{(e)} = \mathbf{G}_j \mathbf{q} \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{G}_j = \sum_{(e)} \mathbf{G}_j^{(e)} = [\mathbf{G}_{j1} \mathbf{G}_{j2} \dots \mathbf{G}_{jn}]$, $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ 및

n : 전체절점수 이다.

결국 저판의 분포 반력에 의한 모든 절점에서의 수직 변위는 다음 식과 같이 계산될 수 있다.

$$\mathbf{w} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (10)$$

식(10)의 유연도 행렬 \mathbf{G} 는 분포 접촉력의 모든 절점 강도(intensity)에 대한 각 절점에서의 변위를 계산하는 유연도 행렬이며 반무한 탄성체 전체를 한 개의 요소로 보고 구한 것이다.

3.3 분포 접촉력의 등가 절점력계

상부 평판의 강성도 방정식과 지반의 강성도 방정식을 중첩하여 계 전체의 강성도 방정식을 구성하기 위해서는 지반에 작용하는 접지압을 등가 절점력계로 변환해야 할 필요가 있다. 한 지반 요소에 작용하는 분포 반력 $q(x, y)$ 을 가상 일의 원리에 의하여 정역학적으로 등가인 등가 절점력으로 다음과 같이 변환시킬 수 있다.

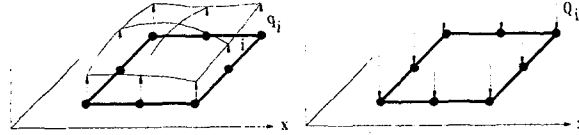
$$\mathbf{Q}^{(e)} = \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \right) \cdot \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{E}^{(e)} \cdot \mathbf{q}^{(e)} \quad (11)$$

$$\text{여기서 } \mathbf{E}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \text{ 이다.} \quad (12)$$

$\mathbf{E}^{(e)}$ 의 적분을 Gauss 수치적분으로 수행하면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}^{(e)} = \sum_k \sum_l (W \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J})_{(k,l)} \quad (13)$$

위의 식에서 우변의 계산은 모든 Gauss 적분 점에서의 값을 합한다는 뜻이고 $W_{(k,l)}$ 은 ξ, η 축에 대한 Gauss 적분 점에서의 두 가중치의 곱이다.



(a) Distributed contact forces (b) Equivalent nodal forces

Fig. 5 Distributed contact forces and corresponding equivalent nodal forces of an element
 상부 평판의 개개 요소 영역에 대한 접촉 분포력의 등가 절점력계를 모두 중첩하면 지반 전체의 등가 절점력계 Q 를 구할 수 있다.

$$Q = \sum Q^{(e)} = \sum E^{(e)} q = E q \quad (14)$$

여기서 $Q = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n]^T$

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$$

$$E = \sum E^{(e)} : \text{변환행렬}$$

n : 평판과 지반이 접촉하는 절점번호 이다.

식(14)에 식(10)와 식(13)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 지반 전체의 강성도 방정식을 구할 수 있다.

$$\{Q\} = \frac{\pi E_s}{1 - \nu_s^2} [E][G]^{-1} \{w\} \quad (15)$$

$$\{Q\} = \frac{1}{\alpha} [k_s] \{w\} \quad (16)$$

여기서, $[k_s] = [E][G]^{-1}$: 반무한 탄성체 지반전체의 강성도 행렬

3.4 지반의 합성탄성계수의 결정

Q 의 성분력들을 합하면 재하하중 P 가 되고, 재하판이 강체라고 가정하면 판 저면의 수직변위가 일정하게 된다 따라서 판 저면의 수직변위를 w_p 라고 하면 이때 지반의 탄성계수 E_s 와 지반의 프와송비 ν_s 는 분리하여 구해지기가 곤란하므로, 이 두계수의 합성된 형태를 본 논문에서는 합성탄성계수(Complex elastic modulus)라 부르기로 하였다.

$$P = \frac{\pi E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\sum_i \sum_j k_{ij} \right) w_p \quad (17)$$

$$\therefore \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} = \frac{1}{\pi \left(\sum_i \sum_j k_{ij} \right)} \frac{P}{w_p} \quad \text{:지반의 합성탄성계수} \quad (18)$$

즉, 평판재하시험에서 P 와 w_p 를 측정하면 식 (18)로 부터 합성 탄성계수 $\frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$ 를 구할 수 있다.

4. 탄성계수 추정 절차

지반의 국소적인 합성탄성계수 추정을 위하여 반무한 탄성지반에서 판과 지반의 상호작용을 고려한 지반 전체의 강성도 행렬을 구하고 재하하중 및 침하량의 관계식을 구하였다(식(18)).

지반의 유연도 행렬 구성에는 무차원 함수를 이용하였고, 계산과정의 대략적인 흐름을 그림6에 나타내었다.

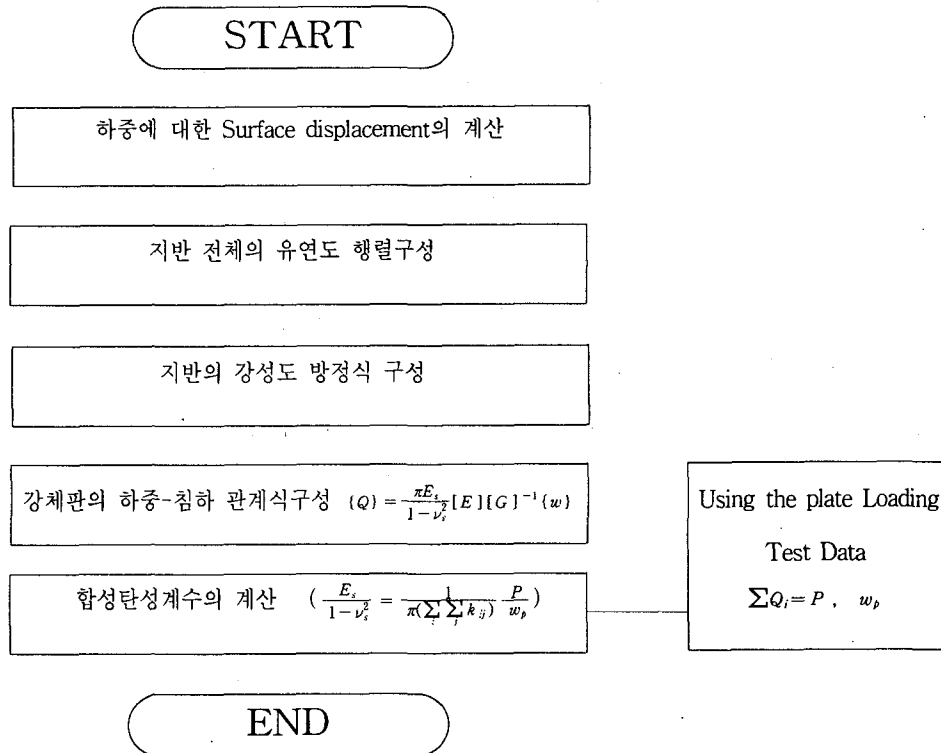


Fig. 6 Flow Chart

5. 수치예제

5.1 기존제안식들과의 비교

Table 1 재하조건과 그에 따른 합성탄성계수값 비교

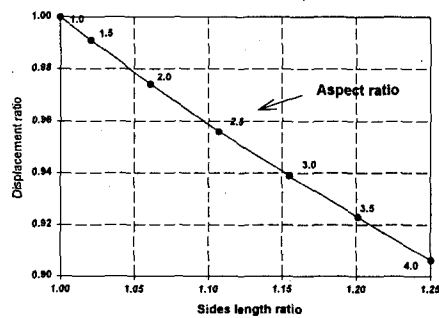
Load (kg)	Area (cm ²)	Displacement (cm)	Borodachev식 $\frac{P}{2R_s w}$ (kg/cm ²)	Barkan식 $\frac{P}{\beta \sqrt{BL} w}$ (kg/cm ²)	This study (kg/cm ²)
1200	40x40	0.126	206.25	222.50	203.81
1800	40x40	0.176	221.49	238.95	218.89
2400	40x40	0.227	228.97	247.03	226.26
3000	40x40	0.280	232.03	250.33	229.29
3600	40x40	0.340	229.30	247.39	226.59
4200	40x40	0.418	217.60	234.76	215.03
AVE			222.60	240.16	219.98

5.2 직사각형의 변장비에 따른관계

합성탄성계수 219.98kg/cm² 하중 1200kg일 때 같은 면적을 가지는 직사각형재하판의 변장비를 달리하여 계산한 결과는 다음과 같다.

Table 2 변장비에 따른 변위와 주변장

Aspect ratio	1 : 1	1.5 : 1	2.0 : 1	2.5 : 1	3.0 : 1	3.5 : 1	4.0 : 1
Displacement (cm)	1.167	1.157	1.137	1.116	1.096	1.077	1.057
Displacement ratio	1.000	1.021	1.061	1.107	1.155	1.203	1.250
Sides length (cm)	160.00	163.30	169.71	177.09	184.75	192.43	200.00
Sides length ratio	1.000	0.991	0.974	0.956	0.939	0.923	0.906



Sides length ratio - displacement ratio relationship

Fig. 7

6. 결론

지반을 반무한 탄성체로 가정하고 지반과 평판의 상호작용을 고려한 합성탄성계수를 구하는 이론을 정립하고 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 지반반력 계수 k 와 지반의 E_s 및 ν_s 와 이론적으로 상관관계를 구할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 재하판 아래의 접촉압력분포를 고려한 E_s 와 ν_s 의 복합적인 합성탄성계수를 구하였다.
- 2) 동일한 하중을 같은 면적을 가진 판에 가했을 때 변위는 변장비가 증가함에 따라 감소한다. 이것은 변의 길이가 길어짐에 따라 반무한 탄성체에서 판의 변을 따라 전단저항이 커지기 때문이다.
- 3) 본 연구 결과를 통해 콘크리트 포장판 설계시 기층 및 보조기층 부근의 평균적 합성탄성계수를 구하여 포장판과 지반의 상호작용을 고려한 포장판의 응력 평가를 해볼 수 있다. 향후, 콘크리트 포장판의 대규모 현장실험을 통한 이론의 검증이 필요하겠다.

참고문헌

1. A.P.S Selvadurai, "Elastic Analysis of soil Foundation Interaction", Elsevier(1979), pp296-402, 349-350
2. F.D.C Henry, "The Design and Construction of Engineering Foundation", Chapman and hall, pp156-157, 147-148
3. Cho. H. Y., Cheung J. W. and Kim. S. C (1995). "A contact pressure analysis between circular plate under axisymmetric loading and elastic half-space considering local separation " EASEC-5. pp161-168
4. Poulos, Davis "Elastic solutions for soil and rock mechanics", John wiley&sons, inc(1974), pp168
5. 김성철, "국소분리영역을 고려한 탄성지반 위에 놓인 평판과 지반의 상호작용 해석에 관한 연구", 부산대학교 박사학위 논문(1998)
6. 조현영, 정진환, 김성도, 한충목 "탄성지반과 판의 접촉압력 해석에 관한 연구", 대한토목학회논문집(1992). 제12권, 제1호, pp1-7
7. 최장렬, "평판재하시험을 이용한 지반의 합성탄성계수 추정에 관한 연구", 부산대학교 석사학위 논문(2000)
8. 장병순, "콘크리트 포장판의 역학적 특성에 관한 연구" 동아대학교 박사학위 논문(1988)
9. Hinton.E. and Owen.D.R.J.(1977), "Finite element programming." Academic, New York.
10. Zienkiewicz and Taylor, The Finite Element Method ", McGraw Hill.