

**Fractional Step Method 를 이용한 점탄성 유체의 자연대류에 관한
수치해석 연구**

김주민, 이성재*, 이승중
서울대학교 응용화학부
수원대학교 고분자공학과*

**Numerical Analysis on the Natural Convection of a Viscoelastic Fluid
using the Fractional Step Method**

Ju Min Kim, Seong Jae Lee*, and Seung Jong Lee

School of Chemical Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
Department of Polymer Engineering, The University of Suwon, Suwon 445-743, Korea*

서론

본 연구에서는 4-step fractional step method 를 이용하여, 점탄성 유체의 자연대류현상을 수치모사하여 해석하는 기법을 제시하였다. Kim 과 Moin[1]의 연구 이후로 fractional step method 는 많은 연구자들이 이용하는 수치해석 기법으로 각광을 받고 있으며, 뉴튼 유체의 난류해석 등에 성공적으로 적용되고 있다. 이 방법은 우선 연속식을 만족하지 않는 중간단계의 속도장을 구한 뒤에 압력장을 이용하여 divergence-free 속도장을 구하는 방법이다. Choi 와 Moin[2]은 뉴튼 유체의 난류유동을 DNS(direct numerical simulation)방법으로 해석하기 위하여, 수치적으로 내재적인(implicit) 알고리즘을 제시하였다. 특히, 이 방법에서는 경계조건을 부여하는 방식이 Kim 과 Moin[1]이 제시한 방법보다 쉬운 장점이 있다. Choi 등[3]은 Choi 와 Moin[2]이 제시한 4-step fractional step method 를 유한요소법(FEM)에 구현하고, 이전까지 제시된 방법보다는 경계조건을 용이하게 부여할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 연구에서는 일련의 bench-marking 문제를 풀고 이전의 결과와 비교해 그 방법의 타당성을 증명하였다. 또한 Min 등[4]은 Choi 등[3]의 방법을 따라서 Bingham 플라스틱 유체의 열전달 문제를 해석하였다. 본 연구에서는 Choi 등[3]의 연구를 확장하여 이 방법이 점탄성 유체에도 적용될 수 있음을 보였다. 해석의 대상으로 고분자 가공공정에서 중요하게 취급되는 자연대류문제를 다루었다. 수치해석의 결과를 바탕으로 탄성 효과가 유동장에 미치는 효과를 고찰하였다.

지배방정식 및 경계조건

본 연구에서 사용한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_0 \mathbf{g} (1 - \beta (T - T_0)) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \mathbf{D} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (4)$$

여기서 식 (1)은 연속식, 식 (2)는 운동량 보존식, 식 (3)은 유변 구성방정식, 식 (4)는 에너지 보존식을 나타낸다. 본 연구에서는 유변 구성방정식으로 UCM(upper convective Maxwell) 모델을 사용하였다. 위 식에서 \mathbf{u} 는 속도 벡터, p 는 압력, ρ 는 밀도, \mathbf{g} 는 중력장, $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ 는 추가응력(extra stress)의 반대바뀜 흐름변형도 함수(upper convective derivative), λ 는 완화시간(relaxation time), \mathbf{D} 는 변형속도 텐서(deformation rate tensor), T 는 온도, α 는 열확산계수(thermal diffusivity)를 나타낸다. 식 (2)에서 온도차이에 따른 밀도 변화는 Boussinesq 근사를 이용하여 나타내었고 T_0 와 ρ_0 는 각각 기준 온도와 그 때의 밀도, β 는 유체의 열팽창도를 나타낸다. 이 문제에 해당하는 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i|_{\Gamma_{wall}} &= 0 \\ T|_{\Gamma_{wall}} &= T_{given} \quad \text{or} \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이미 Walters 등[5]이 지적하였듯이 추가응력의 경계조건은 inner-cavity 문제의 경우에는 필요하지 않다. 그러나, 본 문제와는 달리 계산영역을 출입하는 유체가 존재할 시에는 입구쪽에서 추가응력에 해당하는 경계조건을 부여해야 한다.

수치해석

본 연구의 수치해석 기법은 Choi 등[3]의 선행연구에 근간을 두고 있기 때문

에 기본적인 알고리즘의 구조는 동일하지만, 점탄성 유체에 의한 유변 구성방정식 부분이 추가되었으므로 4 단계 중에서 첫 번째 단계는 다음과 같이 유변 구성방정식과 운동량 보존식을 동시에 만족하는 속도장을 구하여 얻게 된다.

$$\rho \left(\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\hat{u}_j \hat{u}_{i,j} + u_j^n u_{i,j}^n) \right) = -p_{,i}^n + \frac{1}{2} (\hat{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^n)_{,j} + \rho_0 (1 - \beta (T^n - T_0))$$

$$\hat{\tau}_{ij} + \lambda \left(\frac{\hat{\tau}_{ij} - \tau_{ij}^n}{\Delta t} + \hat{u}_k \hat{\tau}_{ij,k} - \hat{u}_{j,k} \hat{\tau}_{ki} - \hat{u}_{i,k} \hat{\tau}_{kj} \right) = 2\eta \hat{D}_{ij}, \quad \hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})$$

(6)

사례연구

고분자 가공공정의 비등온 공정에서는 자연대류 현상이 중요한 문제로 대두된다. 본 연구에서는 상하의 벽은 단열로 유지되고 있고 좌우의 벽은 각기 다른 등온으로 유지되고 있는 문제를 대상으로 삼아 해석하였다. 우선 본 연구를 통해서 구현한 코드의 타당성을 검증하기 위해서 λ 가 0인 뉴턴 유체의 경우를 상정하여, 해석하여 이전의 결과와 비교하여 컴퓨터 코드와 알고리즘을 검증하였다. 본 연구에서는 Ra 수가 10^4 이고 Pr 인 8,383 인 경우를 해석하였다. 이 경우에 λ 가 0인 경우와 15인 경우를 해석하여, 유선(streamline)을 도시하였다(Figs. 1-2). 이 경우 탄성이 있는 경우 유선의 형상이 오른쪽이 약간 들린 모양으로 나타났다. 이것의 원인을 고찰해 보면, Fig. 3 과 같이 벽쪽에서 발달한 T_{xx} 와 T_{yy} 의 영향으로 생각되는데, 이는 벽근처에 존재하는 전단유동으로 인해 분자들이 한쪽 방향으로 배열됨에 기인하는 것으로 판단된다.

결론

본 연구는 Choi 등의 연구를 점탄성 유체의 경우에 대해 확장하여 고찰한 것으로, 본 연구를 통해서 fractional step method가 비등온 점탄성 유동의 경우에도 적용될 수 있음을 자연대류문제를 사례로 검증하였다.

참고 문헌

1. J. Kim and P. Moin, "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-

- Stokes equations”, *J. Comput. Phys.*, **59**, 308 (1985).
2. H. Choi and P. Moin, “Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow”, *J. Comput. Phys.*, **113**, 1 (1994).
 3. H.G. Choi, H. Choi and J.Y. Yoo, “A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **143**, 333 (1997).
 4. T. Min, H.G. Choi, J.Y. Yoo and H. Choi, “Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe. II. Numerical approach - hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**, 3689 (1997).
 5. M.J. Crochet, A.R. Davies and K. Walters, *Numerical simulation of non-Newtonian flow*, Elsevier, New York (1984).

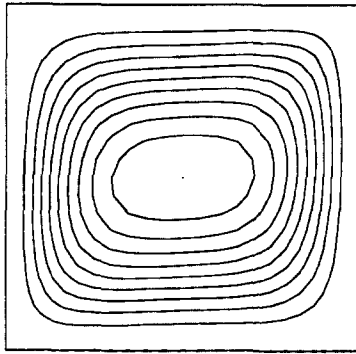


Fig. 1. Streamline contour at $\lambda = 0$.
 $|\psi_{max}| = 3.43, \Delta\psi = 0.343$

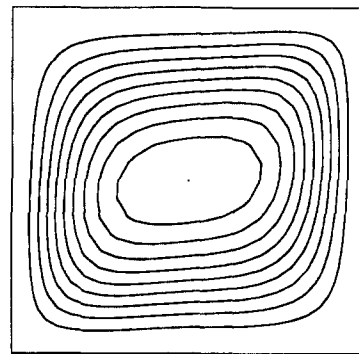


Fig. 2. Streamline contour at $\lambda = 15$.
 $|\psi_{max}| = 3.45, \Delta\psi = 0.345$

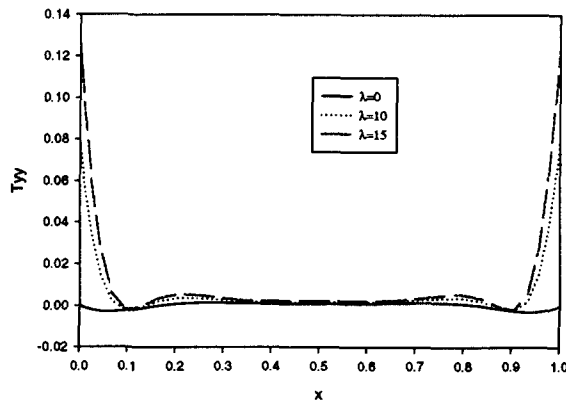


Fig. 3. T_{yy} Distribution along centerline ($y=0$).