

복합재 적층 보의 퍼지 다목적 최적설계 (Fuzzy multi-objective optimization of the laminated composite beam)

이강희^{*}· 구만희^{**}· 이종호^{*}· 홍영기^{*}· 우호길^{***}

Lee Kanghee^{*}, Koo Manwhyoi^{**}, Lee Jongho^{*}, Hong YoungKi^{*}, Woo HoKil^{***}

(^{*}:충남대학교 대학원, ^{**}:국방과학연구소, ^{***}:충남대학교 기계공학과)

Key Words: Structural Optimization, Multi-objective Optimization, Fuzzy Programming, Laminated composite beam, Membership function, Degree of satisfaction,

Abstract

In this article, we presents multi-objective design optimization of laminated composite beam using Fuzzy programming method. At first, the two design objectives are minimizing the structural weight and maximizing the buckling load respectively. Fuzzy multi-optimization problem can be formulated based on results of single optimizations. Due to different relative importance of design objectives, membership functions are constructed by adding exponential parameters for different objective's weights.

Finite element analysis of composite beam for buckling behavior are carried by Natural mode method proposed by J.Argyris and computational time of analysis can be reduced.

With this scheme, a designer can conveniently obtain a compromise optimal solution of a multi-objective optimization problem only by providing some exponential parameters corresponding to the importance of the objective functions.

1. 서 론

섬유강화 복합재료는 기존의 금속재료보다 높은 비강도 및 비강성을 유지하고 피로특성, 고온에서 잘 견디는 성질, 내마모성 등 우수한 기계적 성질을 갖는다. 이러한 이유로 특히 경량화가 요구되는 항공·우주 및 여타의 첨단산업분야에서 구조재료로서 다양하게 적용되고 있다. 특히 복합재 적층 보의 링크 시스템이나 축, 프레임 및 판/셸 구조물의 보강재료로 그 사용의 범위가 증가하고 있는 반면 이에 대한 설계 문제에서의 적용사례는 드물다.

L. A. Zadeh^[1,2]교수에 의해 도입된 퍼지이론은 현실의 설계상황에서 발생할 수 있는 불확실성의 문제를 임의성에 기인한 통계적 기법에서와는 달리 모호성(vagueness) 즉, 퍼지 정도(fuzzyness)를 근거로 설계에 반영하여 기존의 이론을 확정

한 것으로 볼 수 있으며, 이를 이용하면 불확실성의 문제를 체계적으로 설계에 반영할 수 있고 불확실성에 대한 필요성을 만족시킬 수 있는 가능성이 매우 높은 것으로 평가되어 수많은 분야에서 응용되어 오고 있다.

다목적 최적설계 문제에 대한 해석법으로 퍼지 계획법(Fuzzy Programming)에 의한 접근은 Zimmermann^[3]에 의해 처음으로 소개되었다. 그는 다목적 최적설계 문제를 퍼지 선형 계획법에 의해 선형 소속함수를 사용하여 단일 목적으로 변환시키는 방법을 제시하였고 이후 Leberling^[4], Hannan^[5]에 의해 더욱 발전되었다.

본 연구는 복합재 적층 보 구조물의 최적화 설계문제로서 중량 최소화와 특정 하중모드에 대한 하중 부하능력의 최대화(좌굴하중 최대화), 두 가지의 목적을 갖는 다목적 최적화 설계문제를 구성하고 각 목적함수에 대한 가중치에 따라 정의된 비선형 소속함수(membership function)를 이

용하여 퍼지적 합의과정(fuzzy compromising processes)에 의한 절충해(compromise optimal value)를 계산하여 복합재 보 구조물의 다목적 최적화 설계 문제에 있어서의 퍼지집합이론의 적용성을 검토해 보고자 한다. 또한 다목적 설계에 대한 퍼지적 합의 과정에 주목하기 위해서 최초 설계 단계에서의 문제정의에 관한 불확실성의 문제는 논의에서 제외하기로 한다. 아울러 다양한 가중치에 근거해서 계산된 절충해로부터 설계자의 의사에 따라 적절한 설계값을 발취하여 용이하게 설계를 수행할 수 있는 기초자료(data base)를 테이블 형식으로 제공할 수 있으리라 예상된다.

2. 복합재 보의 좌굴해석

대칭 복합재 적층보의 임계 좌굴 하중의 계산을 위한 유한요소 해석의 방법으로 J. Argyris^[6]가 제안한 자연모드(natural mode)방법을 이용하여 보의 변위장을 정의하고 각 모드에 대한 기하학적 강성을 유도함으로써 임계 좌굴하중은 전체 구조계에 대한 기하학적 강성행렬과 굽힘강성 행렬로 구성된 다음과 같은 고유치 문제의 첫 번째 고유치로부터 결정할 수 있다.

$$K_B \rho = \lambda K_G \rho \quad (0)$$

여기서, K_B 는 전체 구조계에 대한 굽힘 강성행렬을, K_G 는 기하학적 강성행렬을, λ 는 임계 좌굴하중을, ρ 는 λ 에 상응하는 좌굴 변형모드를 각각 나타내며, 계산된 좌굴 변형모드 ρ 는 강제 운동 모드에 대한 것과 순수 변형에 대한 좌굴 변형 모드를 모두 포함하고 있다.

3 퍼지 다목적 최적 설계

3.1 설계 문제의 수학적 모형

구조물의 중량과 좌굴하중 및 고유진동수, 변위 제한조건 등과 같은 다양한 설계 제한조건을 만족하면서 구조 계의 중량을 최소화시키고 임계 좌굴하중을 최대화하는 설계 값을 찾는 다목적 최적화 문제의 수학적 모형은 다음과 같이 정의

할 수 있다.

$$\text{minimize } \{ f_1(X), f_2(X) \} \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_1 = W \leq W^w \quad (2)$$

$$g_2 = N_{cr} \geq N_{cr}^w \quad (3)$$

$$g_j(X) \leq 0, j=3, \dots, m \quad (4)$$

여기서, 목적함수 f_1 은 구조계 전체의 중량(W)을 나타내고, $f_2 = -N_{cr}$ 로 임계 좌굴하중을 의미한다. W^w 는 보의 중량에 대한 설계 허용치이며, N_{cr}^w 은 임계 좌굴하중에 대한 허용치를 나타내며, 이 두 값은 대개 설계자의 주관에 따라 결정된다. g_j 는 고유진동수나 변위 제한조건 등과 같이 정·동적 구조응답에 대한 설계 제한조건을 의미한다.

3.2 단일목적 최적화

위에서 구성된 다목적 함수 최적화 문제를 풀기 위해서는 우선 각각의 단일목적함수에 대한 최적화 과정이 선행되어야 한다. 먼저 좌굴하중에 대한 설계 제한조건과 여타의 다른 제한 조건을 만족하면서 구조물의 중량을 최소화하는 문제는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\text{minimize } \{ f_1(X) \} \quad (4)$$

$$\text{subject to } g_2 = N_{cr} \geq N_{cr}^w$$

$$g_j(X) \leq 0, j=3, \dots, m$$

다음으로 중량에 대한 설계제한 조건과 그밖의 다른 조건들을 만족하면서 좌굴하중을 최대화하는 문제는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\text{minimize } \{ f_2(X) \} \quad (5)$$

$$\text{subject to } g_1 = W \leq W^w$$

$$g_j(X) \leq 0, j=3, \dots, m$$

위에서 정의된 각각의 단일 목적 최적화 문제는 일반적인 비선형 계획법을 이용하여 풀 수 있으며, 도출된 결과로부터 다목적 구조 설계 문제를 구성하기 위한 이상적인 중량(W^b)과 좌굴하중(N_{cr}^b)을 얻어낼 수 있다.

3.3 퍼지 다목적 최적설계

위에서 정의된 설계 허용치 (W^w, N_{cr}^w)와 단일 목적 최적화 과정을 통해 얻어진 최적 설계 값 (W^b, N_{cr}^b)을 이용하여 다음과 같이 목적함수에 대한 퍼지 소속함수를 정의할 수 있다.

$$\mu_{f_1}(X) = \begin{cases} 1 & f_1(X) \leq W^b \\ \frac{W^b - f_1(X)}{W^b - W^w} & W^w < f_1(X) \leq W^b \\ 0 & f_1(X) \geq W^w \end{cases} \quad (6)$$

$$\mu_{f_2}(X) = \begin{cases} 1 & -f_2(X) \geq N_{cr}^b \\ \frac{-f_2(X) - N_{cr}^b}{N_{cr}^w - N_{cr}^b} & N_{cr}^w < f_2(X) < N_{cr}^b \\ 0 & -f_2(X) \leq N_{cr}^w \end{cases} \quad (7)$$

설계 제한조건에 관한 소속함수는 각 제한조건에 설정된 한계값에 적절한 천이영역을 부여함으로써 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mu_{g_j}(X) = \begin{cases} 1 & g_j(X) \leq b_j \\ 1 - \frac{g_j(X) - b_j}{d_j} & b_j < g_j(X) < b_j + d_j \\ 0 & g_j(X) \geq b_j + d_j \end{cases} \quad (9)$$

여기서 d_j 는 j 번째 제한조건에서 적절히 선정된 한계값의 가능 변화영역이다.

목적함수들에 관한 소속함수와 제한조건에 관한 소속함수가 정의되면 이들에 의해 정해지는 퍼지 가용영역 S 에서의 퍼지 설계영역 D 는 다음과 같다.

$$D = \left\{ \bigcap_{i=1}^2 \mu_{f_i}(X) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{j=3}^m \mu_{g_j}(X) \right\} \quad (10)$$

그런데, 퍼지 집합이론에서 두 개 이상의 퍼지교 집합은 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(X) = \mu_{A_1}(X) \wedge \mu_{A_2}(X) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(X) \\ = \min\{\mu_{A_1}(X), \mu_{A_2}(X), \dots, \mu_{A_n}(X)\} \quad (11)$$

따라서, 퍼지설계영역 D 로부터 최적해 X^* 는 다음을 만족시키는 해로부터 얻을 수 있다.

$$\mu_D(X^*) = \max \mu_D(X) \quad (12)$$

여기서

$$\mu_D(X) = \min\{\mu_{f_1}(X), \mu_{f_2}(X), \mu_{g_3}(X), \dots, \mu_{g_m}(X)\}$$

이다. 위 식 (12)에서 정의한 퍼지 다목적 최적설계 문제는 만족도를 나타내는 인공변수 λ 을 도입하여, 일반적인 단일 목적 최적화 문제로 전환할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda \\ & \text{subject to } \lambda \leq \mu_{f_i}(X) \quad i=1,2 \\ & \quad \quad \quad \lambda \leq \mu_{g_j}(X) \quad j=3, \dots, m \end{aligned} \quad (13)$$

3.4 가중치가 고려된 퍼지 다목적 최적화

일반적으로 구조 계의 다목적 최적화 설계 시 정의된 각각의 목적함수의 중요도는 설계자의 관점에 따라 달라질 수 있으며, 퍼지 다목적 최적설계 문제에서 소속함수가 이러한 다양한 설계 목적에 대한 중요도를 반영할 수 있도록 목적함수 대한 가중치를 부여할 필요가 있다.

따라서 앞서 정의했던 선형 소속함수에 가중치 지수 q_1, q_2 를 지수곱하여 목적함수에 대한 가중치를 고려 할 수 있도록 변환시키면, 변환된 단일목적함수에 대한 소속함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{f_1}(X) = \begin{cases} 1 & f_1(X) \leq W^b \\ \left[\frac{W^b - f_1(X)}{W^b - W^w} \right]^{q_1} & W^w < f_1(X) \leq W^b \\ 0 & f_1(X) \geq W^w \end{cases} \quad (14)$$

$$\mu_{f_2}(X) = \begin{cases} 1 & -f_2(X) \geq N_{cr}^b \\ \left[\frac{-f_2(X) - N_{cr}^b}{N_{cr}^w - N_{cr}^b} \right]^{q_2} & N_{cr}^w < f_2(X) < N_{cr}^b \\ 0 & -f_2(X) \leq N_{cr}^w \end{cases} \quad (15)$$

여기서, 가중치 지수 q_1 와 q_2 는 0과 1 사이의 값을 갖고, 목적함수에 대한 가중치 w_1, w_2 와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$w_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad w_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}$$

이들 가중치 지수를 포함한 소속함수를 사용할 경우 선형소속함수 외에 로그함수, 지수함수, 쌍곡선 함수등의 비선형 소속함수를 사용하여 해를

구한 결과와 동일한 효과를 설계자의 의도에 의해서 정해지는 가중치값으로 조절할 수 있으므로, 복잡한 비선형 형태의 소속함수를 쓰지 않아도 퍼지계의 절충해를 구할 수 있다. 예를 들어 가중치 지수 q_1, q_2 가 각각 0.6과 0.2 일 때, 식 (14), (15)에서 정의된 비선형 소속함수는 그림 1과 같다.(점선은 선형소속함수)

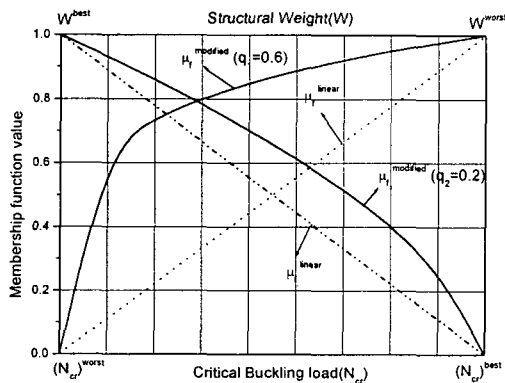


Fig. 1 Modified membership functions($q_1=0.6, q_2=0.2$)

4. 수치예 및 결과 검토

퍼지 다목적 최적설계의 예로 Fig.2에서와 같이 한단이 고정되고 끝단이 단순 지지된 복합재 적층보에 대한 설계 문제를 제시한다. 보는 축방향으로 균일한 압축하중을 받고 있으며, 굽힘(bending)좌굴에 의해서만 불안정화 될 수 있다고 가정한다.

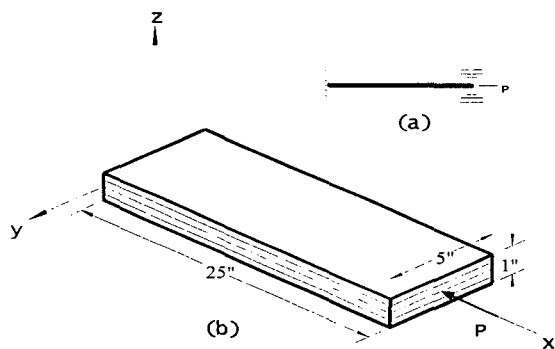


Fig. 2 Laminated composite beam structure subjected by uniformly axial compressive load with clamped/rolling support ends condition.

제시된 예의 대칭 복합재 적층 보는 4개의 층으로 적층되었으며 각 층은 탄소섬유(graphite)과 에폭시(epoxy)로 구성된 섬유강화 복합재료써 재료성질은 다음과 같다.

$$E_1 = 20.6042e6 \text{ psi}, E_2 = 1.56708e6 \text{ psi}, \nu_{12} = 0.3, \\ G = 0.78354e6 \text{ psi}.$$

목적함수로는 중량과 보의 임계 좌굴하중을 선택하였고, 두 개의 목적함수는 서로 상충되는 특성을 갖는다. 설계변수는 복합재 적층보 각 층의 섬유각 (θ_i)과 층두께 (t_i)로 선정하였고, 설계 제한 조건은 단순히 중량과 좌굴하중에 대한 것만을 고려하기로 한다. 설계자의 주관에 의해 주로 결정되는 설계 제한 조건의 한계값 (W^u, N_{cr}^u)은 편의상 중량과 좌굴하중에 대해 각각 초기 설계값의 20% 증가된 중량과 20% 감소된 좌굴하중의 값을 선정하기로 한다.

제시된 설계 문제에서 보의 중량과 좌굴하중에 대한 두 목적함수 $f_1(X)$ 와 $f_2(X)$ 가 가질 수 있는 최상의 값 (W^b, N_{cr}^b)은 설계제한조건의 한계값을 근거로 수행된 각각의 목적함수에 대한 단일 목적 최적화로부터 계산되며, 제한조건의 등호관계를 거의 만족하는 상태에서 최적 값에 수렴한다. Table 1은 단일목적 최적화에 대한 결과를 나타내고 있으며, 제시된 기초 데이터는 퍼지 다목적 최적화 문제 구성을 위한 중요한 자료로 사용된다.

Table 1 Results of Single Objective Optimization

parameters	Structural weight opt.		Buckling load opt.	
	initial value	optimal value	initial value	optimal value
θ_1	45°	0.0	45°	0.0
θ_2	-45°	0.0	-45°	0.0
t_1 (in)	0.25	0.159876	0.25	0.299944
t_2 (in)	0.25	0.132305	0.25	0.300056
W (in ³)	125	73.0453	125	150.0
N_{cr} (lb)	88933.0	70985.627	88933.0	614705.0

$$N_{cr}^b = 88933.0 \times 80/100 = 71146.4 \text{ (20\% decreased of initial)}$$

$$W^u = 125.0 \times 120/100 = 150.0 \text{ (20\% increased of initial)}$$

앞서 계산된 기초데이터를 식(6), (7)에 대입하고

퍼지 계획법에 의하여 단일목적에 대한 설계문제로 변환한 후, 일반적인 비선형 계획법의 해법 (Modified Feasible Method)을 이용하여 얻어진 최적설계 결과를 Table 2에 제시하였다. Table 2에 제시된 결과는 목적함수들에 대한 소속함수 각각의 가중치 지수 q_1, q_2 를 여러 가지 조합으로 설정하여 그에 따른 퍼지 다목적 최적화 결과를 나타내고 있다.

표에 제시된 결과에서 보듯이 복합재 보 각 층의 섬유각이 거의 모든 경우 0° 값을 갖는데, 좌굴 하중에 대한 목적함수가 정규화된 형태의 퍼지 소속함수로써 퍼지 다목적설계 문제에서 제한 조건으로 사용되기 때문에 좌굴강성의 최대화에 대한 목적이 충분히 설계에 반영된 이유라고 판단된다. 설계변수인 섬유각과 층 두께는 복합재 보의 설계 문제에 있어서 굽힘 좌굴거동에 직접적으로 영향을 미친다.

다목적 최적 설계 문제의 이상적인 해는 중량과 임계 좌굴하중에 대하여 각각 73.0453 in^3 , 614705.0 lb 이며, 각 목적함수가 가질 수 있는 최악의 설계값은 각각 설계제한 조건의 한계치에 거의 일치하는 150.0 in^3 , 70985.6271 lb 인데, Table 2에서 보듯이 제시된 모든 절충해가 이상적인 최상의 해와 최악의 해의 사이에서 결정되고 있다.

중량에 대한 목적함수의 가중치 w_1 을 증가시킬 경우, 퍼지 다목적 설계 문제에 대한 절충해는 최소중량에 대한 단일 목적 설계 문제의 최적 결과에 가까워지고, 반대로 w_2 를 증가시킬 경우 퍼지 다목적 설계문제에 대한 절충해가 최대 좌굴하중에 대한 단일 목적 설계 문제의 최적 값에

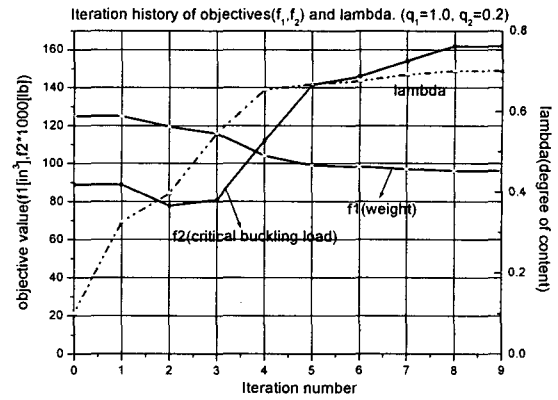


Fig. 3 Iteration history of design objectives (weight, buckling load) and degree of satisfaction

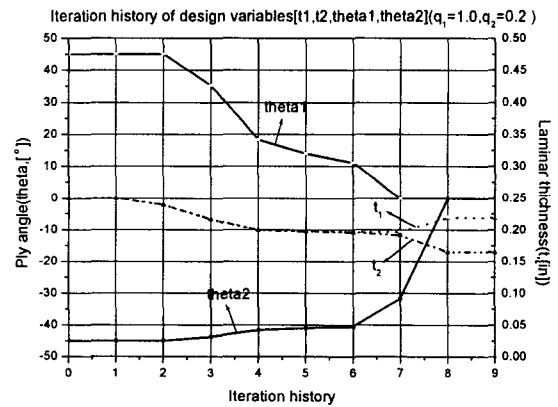


Fig. 4. Iteration history of design variables (ply angle $[\theta_1, \theta_2]$, ply thickness $[t_1, t_2]$)

Table 2 Results of Multi-objective optimization with different objective weight

λ	q_1	q_2	t_1 (in)	t_2 (in)	θ_1 (°)	θ_2 (°)	f_1 (in^3)	f_2 (lb)	w_1	w_2
0.987868	0.0	1.0	0.3002	0.299737	0.0	-6.8	150.0179	612795.4	0.0	1.0
0.876256	0.05	1.0	0.289661	0.288416	0.0	0.0	144.5194	549757.9	0.0476	0.9524
0.806346	0.1	1.0	0.282724	0.281435	0.0	0.0	141.0395	510993.9	0.0909	0.9091
0.710589	0.2	1.0	0.273533	0.27072	0.0	0.0	136.0632	458791.3	0.1667	0.8333
0.591640	0.4	1.0	0.260157	0.257051	0.0	0.0	129.3019	393738.1	0.2857	0.7143
0.515248	0.6	1.0	0.252537	0.245632	0.0	0.0	124.5422	351838.2	0.3750	0.6250
0.459339	0.8	1.0	0.249702	0.234059	0.0	0.0	120.9402	322184.7	0.4444	0.5556
0.417640	1.0	1.0	0.263704	0.207898	0.0	0.0	118.1459	298037.5	0.5	0.5
0.457135	1.0	0.8	0.23703	0.222431	0.0	0.0	114.8652	276031.3	0.5556	0.4444
0.509847	1.0	0.6	0.294431	0.148825	0.0	0.0	110.8138	247842.1	0.6250	0.3750
0.583403	1.0	0.4	0.22784	0.192801	0.0	0.0	105.1604	211811.3	0.7143	0.2857
0.700785	1.0	0.2	0.220698	0.163856	0.0	0.0	96.1386	161840.1	0.8333	0.1667
0.797763	1.0	0.1	0.189224	0.165516	0.0	0.0	88.6850	127040.9	0.9091	0.0909
0.869678	1.0	0.05	0.166314	0.166314	0.0	0.0	83.1569	104734.2	0.9524	0.0476
0.999610	1.0	0.0	0.154585	0.137797	0.0	-2.26	73.0955	71108.9	1.0	0.0

참고문헌

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", Information and Control, Vol. 8, pp. 338~353(1965)
- [2] L. A. Zadeh, "Outline of a New Approach to the Analyses of Complex Systems and Decision Process", IEEE Trans. on Sys. Man and Cybernetics, SMC-3, pp. 28~44.(1973)
- [3] H. J. Zimmermann, "Fuzzy mathematical programming", Comput. & Oper. Res., Vol.13, pp.291~298(1983)
- [4] H. Leberling, "On Finding Compromise Solution in Multi-criteria Problems using the Fuzzy Min-operator", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6, pp. 105~118(1981)
- [5] E. L. Hannan, "Linear Programming with Multiple Fuzzy Coals", Fuzzy Sets and System, Vol. 6, pp. 235~248(1981)
- [6] L. T. Tenek, J. Argyris, "Finite Element Analysis for Composite Structure", Kluwer Academic Publishers, ed. 1, pp 47-133(1998)

근접함을 알 수 있다. 가중치 w_1 또는 w_2 가 1의 값을 가질 경우, 퍼지 다목적 설계의 절충해는 각각의 단일목적에 대한 최적 설계 결과에 동일하게 얻어지게 된다.

퍼지 계획법에 의하여 단일화된 최적화 설계 문제에서의 만족도(degree of satisfaction)지수는 두 가지 목적에 대한 퍼지적 만족의 정도를 산술적으로 표현하는 양이며, 두 가지 목적함수에 대한 중요도(가중치)를 동일하게 설정하였을 때 최소의 값을 갖게 된다. Fig. 2와 Fig. 3은 각각 가중치 지수 q_1, q_2 가 1.0, 0.2 일 때의 목적함수 및 만족도(Fig. 2)와 설계변수인 섬유각과 두께(Fig. 3)의 최적설계 수렴과정을 퍼지 다목적 최적화 설계 과정의 예로 나타내고 있다.

5. 결론

본 연구는 각각의 목적함수에 대한 가중치를 고려하여 섬유강화 복합재 적층 보에 대한 퍼지 다목적 최적설계를 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 퍼지 이론을 이용하여 다목적 최적화 설계 문제의 퍼지적 합의에 의한 절충해를 도출할 수 있었다.

- 각각의 목적함수에 대한 가중치 정의함으로써 상이한 목적함수들에 대한 중요도를 효과적으로 설계에 적용할 수 있었다.

- 다양한 가중치를 근거로 계산된 다목적 설계문제의 절충해로부터 적절한 설계값을 발취하여 효과적으로 설계를 수행할 수 있었다.

본 연구에서 제시된 최적화 문제는 단지 복합재 보의 중량과 좌굴하중만을 고려하였지만, 보다 일반화된 복합재 판/셸의 설계문제에서도 전술했던 일련의 퍼지 다목적 설계 과정을 적용하여 목적함수의 가중치가 고려된 다목적 설계 문제에서 절충해를 도출할 수 있으리라 예상된다.